高三三诊模拟考试数理

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知集合 $A=\{x\,|\,x^2-2x-3\leqslant 0\}$，$B=\{x\,|\,3^{x-1}>1\}$，则 $A\bigcap B=($　　$)$

A．$(-1，1]$　　B．$[-1，3]$　　C．$(1，3]$　　D．$[3，+\infty)$

2．某圆锥的轴截面是斜边长为 2 的等腰直角三角形，则该圆锥的侧面积为(　　)

A．π　　B．$\sqrt{2}\pi$　　C．$\sqrt{3}\pi$　　D．2π

3．若角 α 的终边位于第二象限，且 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$，则 $\sin(\dfrac{\pi}{2}+\alpha)=($　　$)$

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$-\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4．若复数 z 满足 $|z-2|=1$，则 $|z|$ 的最小值为(　　)

A．0　　B．1　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

5．${}^{14}C$ 同位素测年法最早由美国学者 *Willard Frank Libby* 在 1940 年提出并试验成功，它是利用宇宙射线在大气中产生的 ${}^{14}C$ 放射性和衰变原理来检测埋在地下的动植物的死亡年代，当动植物被埋地下后，体内的碳循环就会停止，只进行放射性衰变．经研究发现，动植物死亡后的时间 n（单位：年）与死亡 n 年后 ${}^{14}C$ 的含量 P_n 满足关系式 $nlg2=5730lg\dfrac{P_0}{P_n}$（其中动植物体内初始 ${}^{14}C$ 的含量为 P_0）．现在某古代祭祀坑中检测出一样本中 ${}^{14}C$ 的含量为原来的 70%，可以推测该样本距今约（参考数据：$lg2\approx 0.3$，$lg7\approx 0.85$)(　　)

A．2750 年　　B．2865 年　　C．3050 年　　D．3125 年

6．在 ΔABC 中，“$|\overline{CA}+\overline{CB}|<|\overline{AB}|$”是“$\angle ACB$ 是钝角”的(　　)

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

7．2023 世界科幻大会在成都举办，主题场馆以自由、扩散、无界的未来建筑形象诠释科学与科幻主题，提取古蜀文化中神秘“古蜀之眼（黄金面具）”融入“星云”屋顶造型，建筑首层围绕共享中庭设置了剧场、主题展区及博物馆三大主题空间．现将 4 名志愿者安排到这三个主题空间进行志愿服务，则每个主题空间都有志愿者的不同的安排方式有(　　)

A．6 种　　B．18 种　　C．24 种　　D．36 种

8．已知一样本数据（如茎叶图所示）的中位数为 12，若 x，y 均小于 4，则该样本的方差最小时，x，y 的值分别为(　　)

0	1 2 3 5
1	x y 4 5 6
2	0

A．1，3　　B．11，13　　C．2，2　　D．12，12

9．记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_4=-5$，$S_6=21S_2$，则 $S_8=$（　　）.

A．-85　　B．85　　C. 120　　D．-120

10．已知 F_1，F_2 是双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左，右焦点，点 $M(x_0,y_0)(y_0\neq 0)$ 是双曲线 E 上的点，点 C 是△MF_1F_2 内切圆的圆心，若 $S_{\triangle CMF_1}=S_{\triangle CMF_2}+\dfrac{1}{2}S_{\triangle CF_1F_2}$，则双曲线 E 的渐近线为(　　)

A．$y\pm\sqrt{3}x=0$　　B．$x\pm\sqrt{3}y=0$　　C．$2x\pm\sqrt{3}y=0$　　D．$2y\pm\sqrt{3}x=0$

11．已知三棱锥 $S-ABC$ 的顶点都在球 O 的表面上，若球 O 的表面积为 36π，$AB=\sqrt{5}$，$AC=2\sqrt{5}$，$\angle ACB=30^\circ$，则当三棱锥 $S-ABC$ 的体积最大时，$BS=$(　　)

A．4　　B．$2\sqrt{5}$　　C．5　　D．$\sqrt{30}$

12．已知 a，b，$c\in(1,+\infty)$，且 $a-\ln a=2$，$b-\dfrac{1}{2}=\ln b+2\ln 2$，$c-\sin 1=\ln c+\tan 1$，其中 e 是自然对数的底数，则（　）

A．$a<b<c$　　B．$b<a<c$　　C．$a<c<b$　　D．$b<c<a$

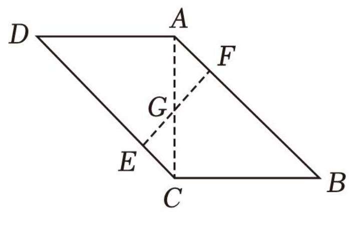
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．若抛物线 $y^2=-2px$ 过点 $(-1,2)$，则该抛物线的焦点为 ________.

14．曲线 $f(x)=e^x\cos x+x$ 在点 $(0,\ f(0))$ 处的切线方程为____________.

15．在 ΔABC 中，$\cos A=-\dfrac{1}{7}, AB=7, BC=8$，则 BC 边上的高为 ________.

16. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$DC=\sqrt{2}AD=\sqrt{2}AC=4, AB=4AF=4EC$，且 EF 交 AC 于点 G，现沿折痕 AC 将 ΔADC 折起，直至满足条件 $DC\perp BC$，此时 $\cos\angle EGF=$________.



三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 12 分）

在 ΔABC 中，$A=\dfrac{\pi}{3}, b=\sqrt{2}$，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求

（1）B 的大小；

（2）ΔABC 的面积.

条件①：$b^2+\sqrt{2}ac=a^2+c^2$；条件②：$a\cos B=b\sin A$.

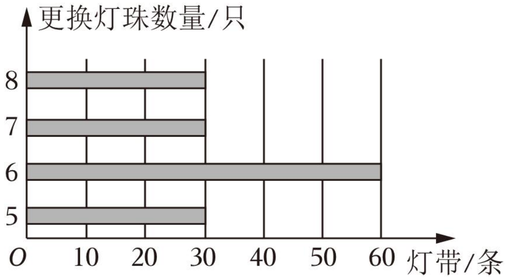
18.（本小题满分 12 分）

灯带是生活中常见的一种装饰材料，已知某款灯带的安全使用寿命为 5 年，灯带上照明的灯珠为易损配件，该灯珠的零售价为 4 元 / 只，但在购买灯带时可以以零售价五折的价格购买备用灯珠，该灯带销售老板为了给某顾客节省装饰及后期维护的支出，提供了 150 条这款灯带在安全使用寿命内更换的灯珠数量的数据，数据如图所示．以这 150 条灯带在安全使用寿命内更换的灯珠数量的频率代替 1 条灯带更换的灯珠数量发生的概率，若该顾客买 1 盒此款灯带，每盒有 2 条灯带，记 X 表示这 1 盒灯带在安全使用寿命内更换的灯珠数量，n 表示该顾客购买 1 盒灯带的同时购买的备用灯珠数量.

（1）求 X 的分布列；

（2）若满足 $P(X\geqslant n)\leqslant 0.6$ 的 n 的最小值为 n_0，求 n_0；

（3）在灯带安全使用寿命期内，以购买替换灯珠所需总费用的期望值为依据，比较 $n=n_0-1$ 与 $n=n_0$ 哪种方案更优.

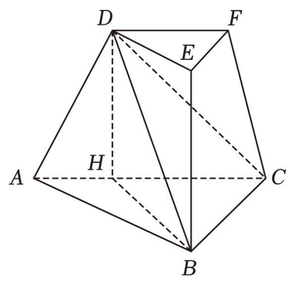


19.（本小题满分 12 分）

如图，在三棱台 $ABC-DEF$ 中，H 在 AC 边上，平面 $ACFD\perp$ 平面 ABC，$\angle ACD=60°$，$CH=2$，$CD=4$，$BC=\sqrt{3}$，$BH\perp BC$.

（1）证明：$EF\perp BD$；

（2）若 $AC=2DF$ 且 ΔABC 的面积为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，求 CF 与平面 ABD 所成角的正弦值.



20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的长轴为双曲线 $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 的实轴，且椭圆 C 过点 $P(2,1)$.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）点 A，B 是椭圆 C 上异于点 P 的两个不同的点，直线 PA 与 PB 的斜率均存在，分别记为 k_1，

k_2，且 $k_1 \cdot k_2 = -\frac{1}{2}$，当坐标原点 O 到直线 AB 的距离最大时，求直线 AB 的方程.

21．（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x) = lnx - ax + 1$，其中实数 $a \in R$.

（1）求证：函数 $f(x)$ 在 $(1，f(1))$ 处的切线恒过定点，并求出该定点的坐标；

（2）若函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1，x_2，且 $x_1 > 2x_2$，求 a 的取值范围.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分．作答时，用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑.

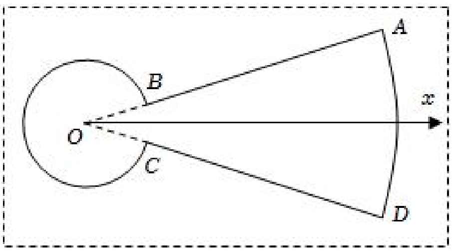
22．(本小题满分 10 分) 选修 4-4：坐标系与参数方程

多样化的体育场地会为学生们提供更丰富的身体锻炼方式．现有一个标准的铅球场地如图，若场地边界曲线 M 分别由两段同心圆弧 $\widehat{BC}, \widehat{AD}$ 和两条线段 AB，CD 四部分组成，在极坐标系 Ox 中，$\angle AOD = \angle BOC = \frac{7\pi}{36}$，$A$、$O$、$B$ 三点共线．$A(20, \frac{7\pi}{72})$，点 C 在半径为 1 的圆上.

（1）分别写出组成边界曲线 M 的两段圆弧和两条线段的极坐标方程；

（2）若需设置一个距边界曲线 M 距离不小于 1 且关于极轴所在直线对称的矩形警示区域，如图，求警示区域所围的最小面积.

注：$\sin\frac{7\pi}{72} \approx 0.3, \cos\frac{7\pi}{72} \approx 0.95$.



23．(本小题满分 10 分) 选修 4-5：不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x + a| + |x - 1|$，$a \in R$.

（1）当 $a = 2$ 时，求不等式 $f(x) \leqslant 4$；

（2）对任意 $m \in (0,3)$，关于 x 的不等式 $f(x) < m + \frac{1}{m} + 2$ 总有解，求实数 a 的取值范围.

高三三诊模拟考试数理

参考答案

一、选择题： CBDBB　CDCAA　DB

二、填空题： 13．$(-1,0)$；　14．$y=2x+1$；　15．$\frac{3\sqrt{3}}{2}$；　16．$-\frac{1}{2}$．

三、解答题

17．选择条件①：$b^2+\sqrt{2}ac=a^2+c^2$，

（1）由 $b^2+\sqrt{2}ac=a^2+c^2$，得 $a^2+c^2-b^2=\sqrt{2}ac$，

所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{2}ac}{2ac}=\frac{\sqrt{2}}{2}$；　……………4 分

又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$；　……………6 分

（2）由正弦定理知 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以 $a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\sqrt{3}$；　……………8 分

所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，　……………10 分

所以 ΔABC 的面积为 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}$．　……………12 分

选择条件②：$a\cos B=b\sin A$．

（1）由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以 $a\sin B=b\sin A$；

又 $a\cos B=b\sin A$，所以 $\sin B=\cos B$，所以 $\tan B=1$；　……………4 分

又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$；　……………6 分

（2）由正弦定理知 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以 $a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\sqrt{3}$；　……………8 分

所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，　……………10 分

所以 ΔABC 的面积为 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}$．　……………12 分

18．（1）设 ξ 表示 1 条灯带在安全使用寿命内更换的灯珠数量，

则 $P(\xi=5)=P(\xi=7)=P(\xi=8)=0.2$，$P(\xi=6)=0.4$，

X 的取值范围是 $\{10，11，12，13，14，15，16\}$，　……………1 分

$P(X=10)=0.2\times0.2=0.04$，

$P(X=11)=2\times0.2\times0.4=0.16$，

$P(X=12)=0.4^2+2\times0.2\times0.2=0.24$，

$P(X=13)=2\times(0.2\times0.2+0.2\times0.4)=0.24$，

$P(X=14)=0.2^2+2\times0.4\times0.2=0.2$，

$P(X=15)=2\times0.2\times0.2=0.08$，

$P(X=16)=0.2\times0.2=0.04$，　……………5 分

X 的分布列为

X	10	11	12	13	14	15	16
P	0.04	0.16	0.24	0.24	0.2	0.08	0.04

……………6 分

（2）由（1）可知 $P(X\geqslant 12)=0.8$， $P(X>13)=0.56$，故 $n_0=13$．……………8 分

（3）由（2）可知 $n=n_0-1=12$，在灯带安全使用寿命期内，

当 $n=12$ 时，设购买替换灯珠所需总费用为 u 元，

当 $n=13$ 时，设购买替换灯珠所需总费用为 v 元，

则 $E(u)=24+0.24\times4+0.2\times8+0.08\times12+0.04\times16=28.16$ ，……………10 分

$E(v)=26+0.2\times4+0.08\times8+0.04\times12=27.92$ ，……………11 分

$E(v)<E(u)$，故以购买替换灯珠所需总费用的期望值为依据， $n=n_0$ 比 n_0-1 的方案更优. ………12 分

19.（1）证明： $\angle ACD=60^\circ$， $CH=2$， $CD=4$，

由余弦定理得 $\cos\angle ACD=\dfrac{1}{2}=\dfrac{CD^2+CH^2-DH^2}{2\cdot CD\cdot CH}$，解得 $DH=2\sqrt{3}$，

所以 $CD^2=CH^2+DH^2$，所以 $DH\perp AC$，

又因为平面 $ACFD\perp$ 平面 ABC，平面 $ACFD\cap$ 平面 $ABC=AC$， $DH\subset$ 平面 $ACFD$，

所以 $DH\perp$ 平面 ABC，……………2 分

因为 $BC\subset$ 平面 ABC，所以 $DH\perp BC$，

又因为 $BH\perp BC$， $BH\cap DH=H$， $BH\subset$ 平面 BDH， $DH\subset$ 平面 BDH，所以 $BC\perp$ 平面 BDH，.....3 分

因为 $DB\subset$ 平面 BDH，所以 $BC\perp DB$，……………4 分

又因为 $BC//EF$，所以 $EF\perp DB$；……………5 分

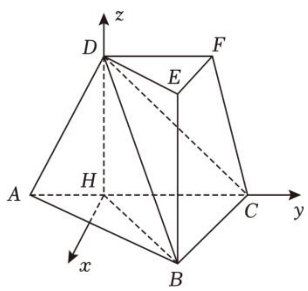
（2）在 RtΔBHC 中， $CH=2$， $BC=\sqrt{3}$， $BH\perp BC$，

所以 $BC=\sqrt{CH^2-BC^2}=1$， $\cos\angle ACB=\dfrac{BC}{CH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\angle ACB=30^\circ$，

因为 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，又 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1}{2}\times AC\times BC\times\sin30^\circ$，解得 $AC=3$，

则 $AC=3=AH+HC$，所以 $AH=1$，……………7 分

由（1）知 $DH\perp$ 平面 ABC，则以 H 为原点， $\overrightarrow{HC}$， $\overrightarrow{HD}$ 的方向为 y， z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(0，-1，0)$， $B(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},0)$， $D(0,0,2\sqrt{3})$， $C(0，2，0)$， $F(0,\dfrac{3}{2},2\sqrt{3})$，



所以 $\overrightarrow{AB}=(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2},0)$， $\overrightarrow{AD}=(0,1,2\sqrt{3})$， $\overrightarrow{CF}=(0,-\dfrac{1}{2},2\sqrt{3})$，

设平面 ABD 法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{3}{2}y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=y+2\sqrt{3}z=0\end{cases}$，

令 $y=-2\sqrt{3}$，得平面 ABD 的一个法向量为 $\vec{n}=(6,-2\sqrt{3},1)$，……………10 分

设 CF 与平面 ABD 所成角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{CF},\vec{n}>|=\dfrac{|\overrightarrow{CF}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{CF}||\vec{n}|}=\dfrac{3\sqrt{3}}{7\times\dfrac{7}{2}}=\dfrac{6\sqrt{3}}{49}$，

所以 CF 与平面 ABD 所成角的正弦值为 $\dfrac{6\sqrt{3}}{49}$．……………12 分

20．（1）由题意，知$\begin{cases}2a=4\sqrt{2},\\ \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=2\sqrt{2}\\ b^2=2\end{cases}$，所以椭圆$C$的标准方程为$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$． ………4 分

（2）①当直线AB的斜率存在时，设其方程为$y=kx+t$，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，

联立$\begin{cases}x^2+4y^2=8\\ y=kx+t\end{cases}$，得$(4k^2+1)x^2+8ktx+4t^2-8=0$，

由韦达定理得$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{-8kt}{4k^2+1}\\ x_1x_2=\dfrac{4t^2-8}{4k^2+1}\end{cases}$，所以$\begin{cases}y_1+y_2=\dfrac{2t}{4k^2+1}\\ y_1y_2=\dfrac{t^2-8k^2}{4k^2+1}\end{cases}$， ……………6 分

因为$k_1\cdot k_2=\dfrac{y_1-1}{x_1-2}\cdot\dfrac{y_2-1}{x_2-2}=\dfrac{y_1y_2-(y_1+y_2)+1}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}=\dfrac{t^2-2t-4k^2+1}{4t^2+16kt+16k^2-4}=\dfrac{(t-1)^2-4k^2}{4(t+2k)^2-4}=\dfrac{t-1-2k}{4(t+2k+1)}=-\dfrac{1}{2}$，

所以$3t+2k+1=0$，即$t=-\dfrac{2k+1}{3}$，所以直线AB的方程为$y=kx-\dfrac{2k+1}{3}$，即$(3x-2)k-(3y+1)=0$，

由$\begin{cases}3x-2=0\\ 3y+1=0\end{cases}$，得$\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}\\ y=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$，故直线$AB$恒过点$M(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3})$； ……………9 分

②当直线AB的斜率不存在时，设$A(x_0,\ y_0)$，则$B(x_0,\ -y_0)$，

所以$k_1\cdot k_2=\dfrac{y_0-1}{x_0-2}\cdot\dfrac{-y_0-1}{x_0-2}=\dfrac{1-y_0^2}{(x_0-2)^2}=\dfrac{x_0+2}{4(x_0-2)}=-\dfrac{1}{2}$，解得$x_0=\dfrac{2}{3}$，

所以此时直线AB也过点$M(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3})$， ……………10 分

因为点$M(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3})$在椭圆$C$的内部，所以当直线$AB$垂直于$OM$时，坐标原点$O$到直线$A$ 的距离最大，此时直线AB的方程为$6x-3y-5=0$． ……………12 分

21．（1）证明：因为$f(x)=lnx-ax+1$，所以$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a$，所以$f'(1)=1-a$，又$f(1)=1-a$，

所以切线方程为$y-(l-a)=(1-a)(x-1)$，即$y=(1-a)x$，

则当$x=0$时$y=0$，所以切线恒过定点$(0,0)$； ……………4 分

（2）解：因为$f(x)=lnx-ax+1$的定义域为$(0,+\infty)$，所以$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a=\dfrac{1-ax}{x}$， ……………5 分

当$a\leqslant 0$时，$f'(x)>0$恒成立，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，故$f(x)$不可能有两个零点，故舍去；

当$a>0$时，令$f'(x)>0$，解得$0<x<\dfrac{1}{a}$，令$f'(x)<0$，解得$x>\dfrac{1}{a}$，

所以$f(x)$在$(0,\dfrac{1}{a})$上单调递增，在$(\dfrac{1}{a},\ +\infty)$上单调递减，所以$f(x)_{max}=f(\dfrac{1}{a})=ln\dfrac{1}{a}$，

要使$f(x)$有两个零点，则$f(x)_{max}=f(\dfrac{1}{a})=ln\dfrac{1}{a}>0$，解得$0<a<l$， ……………7 分

又$f(\dfrac{1}{e})=ln\dfrac{1}{e}-a\cdot\dfrac{1}{e}+1-\dfrac{a}{e}<0$，$f(\dfrac{4}{a^2})=ln\dfrac{4}{a^2}-\dfrac{4}{a}+1<\dfrac{2}{a}-\dfrac{4}{a}+1=1-\dfrac{2}{a}<0$，

所以当$0<a<1$时，$f(x)$在$(\dfrac{1}{e},\ \dfrac{1}{a})$和$(\dfrac{1}{a},\ \dfrac{4}{a^2})$上各有一个零点$x_2$，$x_1$且$x_1>x_2$，

所以$\begin{cases} lnx_1-ax_1+1=0 \\ lnx_2-ax_2+1=0 \end{cases}$，由$f(x)$单调性知，当$x\in(x_2，\ x_1)$时，$f(x)>0$，当$x\in(x_1，\ +\infty)$时$f(x)<0$，

因为$x_2<2x_2<x_1$，所以$f(2x_2)>0$，即$ln(2x_2)-a-2x_2+1>lnx_2-ax_2+l$，

所以$ax_2<ln2$，而$ax_2-lnx_2+1<ln2$，所以$0<x_2<\frac{2}{e}$，所以$a=\frac{lnx_2+1}{x_2}$，令$h(x)=\frac{lnx+1}{x}$，$x\in(0,\frac{2}{e})$，

则$h'(x)=\frac{1-lnx-1}{x^2}=\frac{-lnx}{x^2}>0$，所以$h(x)$在$(0,\frac{2}{e})$上单调递增，

所以$h(x)<h(\frac{2}{e})=\frac{ln2}{\frac{2}{e}}=\frac{eln2}{2}$，所以$a\in(0,\frac{eln2}{2})$．　　　……………12 分

22．（1）由题以O为原点，$\widehat{AD}$的垂直平分线为极轴建立极坐标系，

线段$AB:\theta=\frac{1}{2}\angle AOD=\frac{7\pi}{72}(1\leqslant\rho\leqslant20)$；

线段$CD:\theta=2\pi-\frac{7\pi}{72}=\frac{137\pi}{72}(1\leqslant\rho\leqslant20)$；

弧$\widehat{BC}:\rho=1(0\leqslant\theta\leqslant\frac{7\pi}{72},\frac{137\pi}{72}\leqslant\theta<2\pi)$；

弧$\widehat{AD}:\rho=20(0\leqslant\theta\leqslant\frac{7\pi}{72},\frac{137\pi}{72}\leqslant\theta<2\pi)$．　　　……………6 分

（2）求警示区域最小值即让内界线到M距离恰好为 1，矩形长设为l，$l=1+1+1+20=23$（包括弧长半径、圆半径、两边距距离）；

宽为d，$d_1=20\cdot\sin\frac{7\pi}{72}=6,d_2=20\cdot\sin\frac{7\pi}{72}=6$．

$d=d_1+d_2+1+1=14$，

则$S=l\times d=14\times23=332$．　　　……………10 分

23．（1）由已知，不等式$f(x)\leqslant4$即为$|x+2|+|x-1|\leqslant4$，

则$\begin{cases} x\leqslant-2, \\ -(x+2)-(x-1)\leqslant4, \end{cases}$或$\begin{cases} -2\leqslant x\leqslant1, \\ x+2-(x-1)\leqslant4, \end{cases}$或$\begin{cases} x>1, \\ x+2+x-1\leqslant4, \end{cases}$

解得$-\frac{5}{2}\leqslant x\leqslant-2$或$-2<x\leqslant1$或$1<x\leqslant\frac{3}{2}$，

故不等式的解集为$[-\frac{5}{2}，\ \frac{3}{2}]$．　　　……………5 分

（2）对任意$m\in(0,3)$．关于x的不等式$f(x)<m+\frac{1}{m}+2$总有解$\Leftrightarrow f(x)_{min}<(m+\frac{1}{m}+2)_{min}$，

而$y=m+\frac{1}{m}+2\geqslant2\sqrt{m\bullet\frac{1}{m}}+2=4$，当且仅当$m=\frac{1}{m}$，即$m=1$时取得最小值．

又$f(x)\geqslant)=|(x+a)-(x-1)|=|a-1|$（当且仅当$(x+a)(x-1)\leqslant0$时取等号），

故只需$|a+1|<4$，解得$-5<a<3$，即实数a的取值范围为$(-5,3)$．……………10 分