高三三诊模拟考试数文

一、选择题： 本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知集合 $A=\{x|x^2-2x-3\leq 0\}$，$B=\{x|3^{x-1}>1\}$，则 $A\cap B=$（　　）

（A）$(-1，1]$　　（B）$[-1，3]$　　（C）$(1，3]$　　（D）$[3，+\infty)$

2．已知一样本数据（如茎叶图所示）的中位数为 12，若 x，y 均小于 4，则 $x+y$ 的值为（　　）

0	1 2 3 5
1	x y 4 5 6
2	0

（A） 2　　（B） 3　　（C） 4　　（D） 5

3．已知角α的顶点在坐标原点，始边与x轴非负半轴重合，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$P(m,2)$为其终边上一点，则$m=$(　　)

（A） -4　　（B） 4　　（C） -1　　（D） 1

4．已知$a=\log_5 2$，$b=\log_2 a$，$c=(\frac{1}{2})^b$，则(　　)

（A） $c>b>a$　　（B） $c>a>b$

（C） $a>b>c$　　（D） $b>c>a$

5. 若实数x，y满足约束条件$\begin{cases}x-y-1\geq 0,\\ x+y-3\leq 0,\\ y\geq 0.\end{cases}$则$\frac{y}{x}$的最大值为(　　)

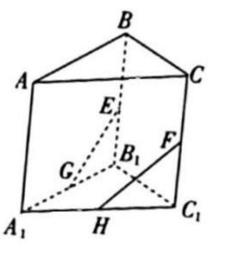
（A） 0　　（B） $\frac{1}{3}$　　（C） $\frac{1}{2}$　　（D） 2

6. “中国剩余定理”又称“孙子定理”，1852 年英国来华传教士伟烈亚力将《孙子算经》中“物不知数”问题的解法传至欧洲. 1874 年英国数学家马西森指出此法符合 1801 年由高斯得出的关于同余式解法的一般性定理，因而西方称之为“中国剩余定理”，“中国剩余定理”讲的是一个关于同余的问题.现有这样一个问题：将正整数中能被 3 除余 1 且被 2 除余 1 的数按由小到大的顺序排成一列，构成数列$\{a_n\}$，则$a_{10}=$(　　)

（A） 55　　（B） 49　　（C） 43　　（D） 37

7. 如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，E，F，G，H分别为BB_1，CC_1，A_1B_1，A_1C_1的中点，则下列说法错误的是(　　)

（A） E，F，G，H四点共面　　（B） $EF\ //\ GH$



（C） EG，FH，AA_1三线共点　　（D） $\angle EGB_1=\angle FHC_1$

8. 若$a<x<3$是不等式$\log_{\frac{1}{2}}x>-1$成立的一个必要不充分条件，

则实数a的取值范围是(　　)

（A） $(-\infty,0)$　　（B） $(-\infty,0]$　　（C） $[0,2)$　　（D） $(2,3)$

9. 在ΔABC中，$AB=3,AC=2,\angle BAC=120°$，且$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=$(　)

（A） $\frac{1}{3}$　　（B） $\frac{2}{3}$　　（C） 1　　（D） 2

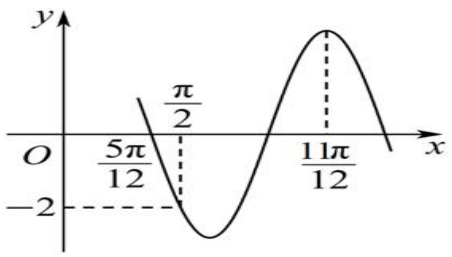
10. 已知函数$f(x)=Asin(\omega x+\varphi)(A,\omega,\varphi$为常数，$\omega>0$，$A>0)$的部分图像如图所示，若将$f(x)$的图像向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，得到函数$g(x)$的图像，则$g(x)$的解析式可以为(　　)

（A） $g(x)=2\sqrt{2}\sin(3x+\frac{\pi}{4})$

(B) $g(x)=2\sqrt{2}\cos(3x+\frac{\pi}{4})$

(C) $g(x)=2\sqrt{2}\sin(3x-\frac{\pi}{4})$

(D) $g(x)=-2\sqrt{2}\cos(3x-\frac{\pi}{4})$



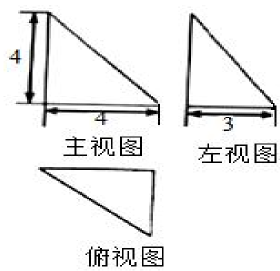
11．已知F_1，F_2是双曲线$E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左，右焦点，点$M(x_0，y_0)(y_0\neq 0)$是双曲线$E$上的点，点$C$是△$MF_1F_2$内切圆的圆心，若$S_{\triangle CMF_1}=S_{\triangle CMF_2}+\frac{1}{2}S_{\triangle CF_1F_2}$，则双曲线$E$的渐近线为(　　)

（A） $y\pm\sqrt{3}x=0$　　（B） $x\pm\sqrt{3}y=0$　　（C） $2x\pm\sqrt{3}y=0$　　（D） $2y\pm\sqrt{3}x=0$

12．若$x\in[0,+\infty)$，$x^2+ax+1\le e^x$恒成立，则实数a的最大值为(　　)

（A） e　　（B） 2　　（C） $e-1$　　（D） $e-2$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.



13．《九章算术》中，称四个面均为直角三角形的四面体为“鳖臑”.已知某“鳖臑”的三视图如图所示，则该“鳖臑”的体积为______.

14．若复数z满足$|z-2|=1$，则$|z|$的最小值为__________.

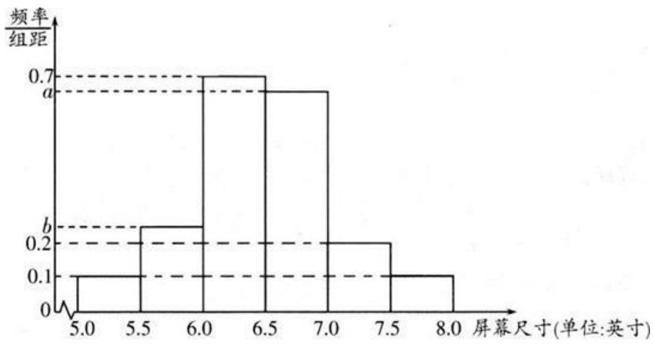
15. 设抛物线$y^2=6x$的焦点为F，准线为l，P是抛物线上位于第一象限内的一点，过P作l的垂线，垂足为Q，若直线QF的倾斜角为$120°$，则$|PF|=$__________.

16．已知三棱锥$S-ABC$的顶点都在球O的表面上，若球O的表面积为36π，$AB=\sqrt{5}$，$AC=2\sqrt{5}$，$\angle ACB=30°$，则当三棱锥$S-ABC$的体积最大时，$BS=$________.

三、**解答题：**共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答；第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．（一）必考题：共 60 分．

17. (本小题 12 分)

某手机生产厂商要生产一款 $5G$手机，在生产之前，该公司对手机屏幕的需求尺寸进行社会调查，共调查了 400 人，将这 400 人按对手机屏幕的需求尺寸分为 6 组，分别是：[5.0,5.5)，[5.5,6.0)，[6.0,6.5)，[6.5,7.0)，[7.0,7.5)，[7.5,8.0)(单位：英寸)，得到如下频率分布直方图：其中，屏幕需求尺寸在[5.5,6.0)的一组人 数为 50 人．



(1)求a和b的值;

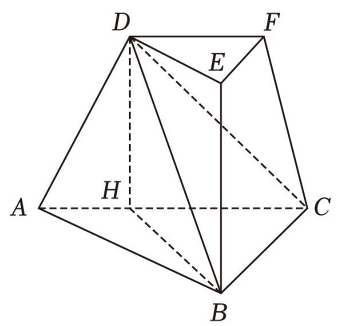
(2)用分层抽样的方法在屏幕需求尺寸为[5.0,5.5)和[7.0,7.5)两组人中抽取 6 人参加座谈，并在 6 人中选择 2 人做代表发言，则这 2 人来自同一分组的概率是多少?

18. (本小题 12 分)

已知正项数列$\{a_n\}$的前n项积为T_n，且满足$a_n=\frac{T_n}{3T_n-1}(n\in N^*)$.

(1)求证：数列$\{T_n-\frac{1}{2}\}$为等比数列;

(2)求数列$\{T_n\}$的前n项和M_n.



19．(本小题 12 分)

如图，在三棱台$ABC-DEF$中，H在AC边上，平面$ACFD\perp$平面ABC，$\angle ACD=60°$，$CH=2$，$CD=4$，$BC=\sqrt{3}$，$BH\perp BC$．

（1）证明：$EF\perp BD$；

（2）若$AC=2DF$且ΔABC的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$，求三棱锥$D-ABH$的体积.

20．(本小题 12 分)

已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的长轴为双曲线$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$的实轴，且椭圆$C$过点$P(2,1)$.

（Ⅰ）求椭圆C的标准方程;

（Ⅱ）点 A，B 是椭圆 C 上异于点 P 的两个不同的点，直线 PA 与 PB 的斜率均存在，分别记为 k_1，k_2，且 $k_1\cdot k_2=-\frac{1}{2}$，证明：直线 AB 的经过定点，并求出定点坐标.

21．(本小题 12 分)

已知函数 $f(x)=lnx-ax+1$，其中实数 $a\in R$.

（1）求证：函数 $f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线恒过定点，并求出该定点的坐标；

（2）若函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1，x_2，且 $x_1>2x_2$，求 a 的取值范围.

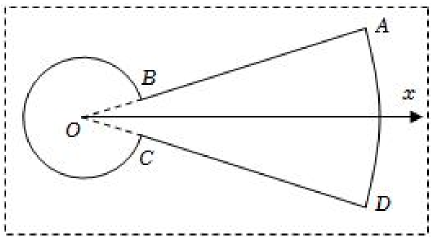
22．(本小题 10 分)

多样化的体育场地会为学生们提供更丰富的身体锻炼方式. 现有一个标准的铅球场地如图，若场地边界曲线 M 分别由两段同心圆弧 $\widehat{BC},\widehat{AD}$ 和两条线段 AB，CD 四部分组成，在极坐标系 Ox 中，$\angle AOD=\angle BOC=\frac{7\pi}{36}$，$A$、$O$、$B$ 三点共线. $A(20,\frac{7\pi}{72})$，点 C 在半径为 1 的圆上.

（1）分别写出组成边界曲线 M 的两段圆弧和两条线段的极坐标方程；

（2）若需设置一个距边界曲线 M 距离不小于 1 且关于极轴所在直线对称的矩形警示区域，如图，求警示区域所围的最小面积.

注：$\sin\frac{7\pi}{72}\approx 0.3\cos\frac{7\pi}{72}\approx 0.95$.



23．(本小题 10 分)

已知函数 $f(x)=|x+a|+|x-1|$，$a\in R$.

（1）当 $a=2$ 时，求不等式 $f(x)\le 4$；

（2）对任意 $m\in(0,3)$. 关于 x 的不等式 $f(x)<m+\frac{1}{m}+2$ 总有解，求实数 a 的取值范围.

高三三诊模拟考试数文科答案

一、选择题：1---5：CCDBC　6---10：ADBCA　11---12：AD

二、 填空题：13. 8　14. 1　15. 6　16. $\sqrt{30}$

三、解答题：

17. 解：（1）因为屏幕需求尺寸在[5.5,6.0)的一组人数为 50 人，

所以其频率为$\frac{50}{400}=0.125$．又因为组距为 0.5，所以$b=\frac{0.125}{0.5}=0.25$．

又因为$(0.1+0.25+0.7+a+0.2+0.1)\times 0.5=1$，所以$a=0.65$，

即$a=0.65$，$b=0.25$． ....6 分

(2)因为屏幕需求尺寸为[5.0,5.5)人数为：$0.1\times 0.5\times 400=20$，

屏幕需求尺寸为[7.0,7.5)人数为 $0.2\times 0.5\times 400=40$，

若要用分层抽样的方法抽取 6 人，

所以要在[5.0,5.5)组中抽 2 人，设为x，y；要在[7.0,7.5)组中抽 4 人，设为a，b，c，d，

因此样本空间$\Omega=\{(x,y),(x,a),(x,b),(x,c),(x,d)$,

(y,a)，(y,b)，(y,c)，(y,d)，(a,b)，(a,c)，

(a,d)，(b,c)，(b,d)，$(c,d)\}$，共 15 个基本事件，

而这 2 人来自同一分组为事件A，

$A=\{(x,y),(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(c,d)\}$，共 7 个基本事件，

所以这 2 人来自同一分组的概率$P(A)=\frac{7}{15}$. ....12 分

18. 解：(1)证明：因为$a_n=\frac{T_n}{3T_n-1}$，且$a_n=\frac{T_n}{T_{n-1}}(n\geq 2)$，所以$\frac{T_n}{T_{n-1}}=\frac{T_n}{3T_n-1}$，

因为$a_n>0$，所以$T_n>0$，所以得 $3T_n-1=T_{n-1}$，则$T_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}(T_{n-1}-\frac{1}{2})$，

因为当$n=1$ 时，$a_1=\frac{T_1}{3T_1-1}$，得$a_1=\frac{2}{3}$，所以$T_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

所以数列$\{T_n-\frac{1}{2}\}$是首项为$\frac{1}{6}$，公比为$\frac{1}{3}$的等比数列． ....6 分

(2)由(1)知：$T_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}$，即$T_n=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{3})^n+\frac{1}{2}$.

所以$M_n=T_1+T_2+\cdots+T_n=\frac{1}{2}[\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^2+\cdots+(\frac{1}{3})^n+\frac{n}{2}=\frac{1}{4}[1-(\frac{1}{3})^n]+\frac{n}{2}$.

.... 12 分

19.

证明：(1) $\angle ACD=60^\circ$，$CH=2$，$CD=4$，

由余弦定理得 $\cos\angle ACD=\frac{1}{2}=\frac{CD^2+CH^2-DH^2}{2\cdot CD\cdot CH}$，解得 $DH=2\sqrt{3}$，

所以 $CD^2=CH^2+DH^2$，所以 $DH\perp AC$，

又因为平面 $ACFD\perp$ 平面 ABC，平面 $ACFD\cap$ 平面 $ABC=AC$，

$DH\subset$ 平面 $ACFD$，所以 $DH\perp$ 平面 ABC，

因为 $BC\subset$ 平面 ABC，所以 $DH\perp BC$，

又因为 $BH\perp BC$，$BH\bigcap DH=H$，$BH\subset$ 平面 BDH，$DH\subset$ 平面 BDH，

所以 $BC\perp$ 平面 BDH，因为 $DB\subset$ 平面 BDH，所以 $BC\perp DB$，

又因为 $BC//EF$，所以 $EF\perp DB$；　..6 分

(2) 在 $Rt\Delta BHC$ 中，$CH=2$，$BC=\sqrt{3}$，$BH\perp BC$，

所以 $BC=\sqrt{CH^2-BC^2}=1$，$\cos\angle ACB=\frac{BC}{CH}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\angle ACB=30^\circ$，

因为 $S_{\Delta ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，又 $S_{\Delta ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}\times AC\times BC\times\sin 30^\circ$，

解得 $AC=3$，则 $AC=3=AH+HC$，所以 $AH=1$

$V_{D-ABH}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABH}.DH=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2\sqrt{3}=\frac{1}{2}$ . . . . 12 分

20．解：(1) 由题意，知 $\begin{cases}2a=4\sqrt{2},\\ \frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2\sqrt{2}\\ b^2=2\end{cases}$，

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$． ....5 分

(2) ①当直线 AB 的斜率存在时，设其方程为 $y=kx+t$，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，

联立 $\begin{cases}x^2+4y^2=8\\ y=kx+t\end{cases}$，得 $(4k^2+1)x^2+8ktx+4t^2-8=0$，

由韦达定理得 $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-8kt}{4k^2+1}\\ x_1x_2=\frac{4t^2-8}{4k^2+1}\end{cases}$，所以 $\begin{cases}y_1+y_2=\frac{2t}{4k^2+1}\\ y_1y_2=\frac{t^2-8k^2}{4k^2+1}\end{cases}$，

因为

$k_1\cdot k_2=\frac{y_1-1}{x_1-2}\cdot\frac{y_2-1}{x_2-2}=\frac{y_1y_2-(y_1+y_2)+1}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}=\frac{t^2-2t-4k^2+1}{4t^2+16kt+16k^2-4}=\frac{(t-1)^2-4k^2}{4(t+2k)^2-4}=\frac{t-1-2k}{4(t+2k+1)}=-\frac{1}{2}$

，

所以 $3t+2k+1=0$，即 $t=-\frac{2k+1}{3}$，所以直线 AB 的方程为 $y=kx-\frac{2k+1}{3}$，

即 $(3x-2)k-(3y+1)=0$，由 $\begin{cases}3x-2=0\\ 3y+1=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=\frac{2}{3}\\ y=-\frac{1}{3}\end{cases}$，故直线 AB 恒过点 $M(\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$；

②当直线 AB 的斜率不存在时，设 $A(x_0,\ y_0)$，则 $B(x_0,\ -y_0)$，

所以$k_1\cdot k_2=\frac{y_0-1}{x_0-2}\cdot\frac{-y_0-1}{x_0-2}=\frac{1-y_0^2}{(x_0-2)^2}=\frac{x_0+2}{4(x_0-2)}=-\frac{1}{2}$，解得$x_0=\frac{2}{3}$，

所以此时直线AB也过点$M(\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$ ....12 分

21. 解：(1)证明：因为$f(x)=lnx-ax+1$，所以$f'(x)=\frac{1}{x}-a$，所以$f'(l)=1-a$，又$f(l)=l-a$，

所以切线方程为$y-(l-a)=(1-a)(x-1)$，即$y=(1-a)x$，

则当$x=0$时$y=0$，所以切线恒过定点$(0,0)$；..................................,5 分

（2）解：因为$f(x)=lnx-ax+1$的定义域为$(0,+\infty)$，所以$f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$，

当$a\leqslant 0$时，$f'(x)>0$恒成立，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

故$f(x)$不可能有两个零点，故舍去；

当$a>0$时，令$f'(x)>0$，解得$0<x<\frac{1}{a}$，令$f'(x)<0$，解得$x>\frac{1}{a}$，

所以$f(x)$在$(0,\frac{1}{a})$上单调递增，在$(\frac{1}{a}，+\infty)$上单调递减，

所以$f(x)_{max}=f(\frac{1}{a})=ln\frac{1}{a}$，要使$f(x)$有两个零点，则$f(x)_{max}=f(\frac{1}{a})=ln\frac{1}{a}>0$，解得$0<a<l$，

又$f(\frac{1}{e})=ln\frac{1}{e}-a\cdot\frac{1}{e}+1-\frac{a}{e}<0$，$f(\frac{4}{a^2})=ln\frac{4}{a^2}-\frac{4}{a}+1<\frac{2}{a}-\frac{4}{a}+1=1-\frac{2}{a}<0$，

所以当$0<a<1$时，$f(x)$在$(\frac{1}{e}，\frac{1}{a})$和$(\frac{1}{a}，\frac{4}{a^2})$上各有一个零点$x_2$，$x_1$且$x_1>x_2$，

所以$\begin{cases}lnx_1-ax_1+1=0\\ lnx_2-ax_2+1=0\end{cases}$，由$f(x)$单调性知，当$x\in(x_2，x_1)$时，$f(x)>0$，当$x\in(x_1，+\infty)$时

$f(x)<0$，

因为$x_2<2x_2<x_1$，所以$f(2x_2)>0$，即$ln(2x_2)-a-2x_2+1>lnx_2-ax_2+l$，

所以$ax_2<ln2$，而$ax_2-lnx_2+1<ln2$，所以$0<x_2<\frac{2}{e}$，

所以$a=\frac{lnx_2+1}{x_2}$，令$h(x)=\frac{lnx+1}{x}$，$x\in(0,\frac{2}{e})$，

则$h'(x)=\frac{1-lnx-1}{x^2}=\frac{-lnx}{x^2}>0$，所以$h(x)$在$(0,\frac{2}{e})$上单调递增，

所以$h(x)<h(\frac{2}{e})=\frac{ln2}{\frac{2}{e}}=\frac{eln2}{2}$，所以$a\in(0,\frac{eln2}{2})$．.......................................12 分

22．解：（1）由题意，以O为原点，$\overset{\frown}{AD}$的垂直平分线为极轴建立极坐标系，

线段$AB:\theta=\frac{1}{2}\angle AOD=\frac{7\pi}{72}(1\le\rho\le 20)$，

线段$CD:\theta=2\pi-\frac{7\pi}{72}=\frac{137\pi}{72}(1\le\rho\le 20)$，

弧 BC：

$$\rho=1(\frac{7\pi}{72}\le\theta\le\frac{137\pi}{72})$$

弧 $\overset{\frown}{AD}:\rho=20\left(0\le\theta\le\dfrac{7\pi}{72},\dfrac{137\pi}{72}\le\theta<2\pi\right)$；……………………………5 分

（2）解：求警示区域最小值即让内界线到 M 距离恰好为 1，设矩形长为 l，

则 $l=1+1+1+1+20=23$（包括弧长半径、圆半径、两边距距离），

矩形宽为 d，则 $d_1=20\cdot\sin\dfrac{7\pi}{72}=6,d_2=20\cdot\sin\dfrac{7\pi}{72}=6$，$d=d_1+d_2+1+1=14$，

所以 $S=l\cdot d=14\cdot23=332$.……………………………………………10 分

23．解：(1) 由已知，不等式 $f(x)\le4$ 即为 $|x+2|+|x-1|\le4$，

解得 $-\dfrac{5}{2}\le x\le\dfrac{3}{2}$

故不等式的解集为 $[-\dfrac{5}{2}，\dfrac{3}{2}]$．…………………………………………5 分

(2) 对任意 $m\in(0,3)$．关于 x 的不等式 $f(x)<m+\dfrac{1}{m}+2$ 总有解 $\Leftrightarrow f(x)_{min}<(m+\dfrac{1}{m}+2)_{min}$，

而 $y=m+\dfrac{1}{m}+2\geqslant2\sqrt{m\bullet\dfrac{1}{m}}+2=4$，当且仅当 $m=\dfrac{1}{m}$，即 $m=1$ 时取得最小值.

又 $f(x)\ge|(x+a)-(x-1)|=|a+1|$（当且仅当 $(x+a)(x-1)\leqslant0$ 时取等号），

故只需 $|a+1|<4$，解得 $-5<a<3$，即实数 a 的取值范围为 $(-5,3)$．……………………12 分