2015 年福建省福州市中考数学试卷

（全卷共 4 页，三大题，26 小题；满分 150 分；考试时间：120 分钟）

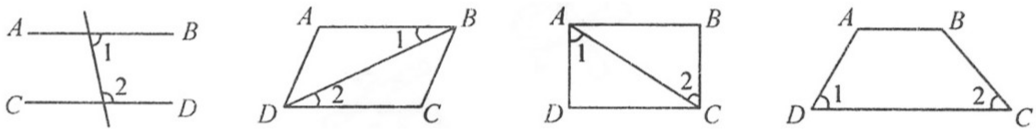
一、选择题（共 10 小题，每题 3 分，满分 30 分，满分 30 分；每小题只有一个正确选项．）

1． a 的相反数是（　）

A．$|a|$　　B．$\dfrac{1}{a}$　　C．$-a$　　D．$\sqrt{a}$

【答案】C

2．下列图形中，由∠1＝∠2 能得到 AB∥CD 的是（　）



A．　　B．　　C．　　D．

【答案】B

【解答过程】解：A、D 两项中，∠1 和∠2 是同旁内角，同旁内角相等，两直线不一定平行；B 项正确；C 项中，∠1 和∠2 是内错角，但由∠1＝∠2 只能得到 AD∥BC，不能得到 AB∥CD．故选择 B.

3．不等式组 $\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 2 \end{cases}$ 的解集在数轴上表示正确的是（　）

A．　　B．　　C．　　D．

【答案】A

【解答过程】解：不等式组 $\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 2 \end{cases}$ 的解集是 $-1 \leqslant x < 2$，解集在数轴上的表示为 A，故选择 A．

4．计算 $3.8\times10^7-3.7\times10^7$，结果用科学记数法表示为（　）

A．0.1×10^7　　B．0.1×10^6　　C．1×10^7　　D．1×10^6

【答案】D

【解答过程】解：$3.8\times10^7-3.7\times10^7=(3.8-3.7)\times10^7=0.1\times10^7=10^{-1}\times10^7=10^6=1\times10^6$，故选择 D．

5．下列选项中，显示部分在总体中所占百分比的统计图是（　）

A．扇形图　　B．条形图　　C．折线图　　D．直方图

【答案】A

【解答过程】解：A 项是扇形统计图，它能够显示部分在总体中所占百分比，符合题意；B 项是条形统计图，它能够清楚地显示每组数据具体数值是多少；C 项是折线图，它能够反映一组数据的变化趋势；D 项是直方图，它能够反映数据在各个小范围内的分布情况，故选择 A.

6．计算 $a\cdot a^{-1}$ 的结果为（　）

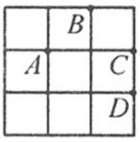
A．-1　　B．0　　C．1　　D．$-a$

【答案】C

【解答过程】解：$a\cdot a^{-1}=a^{1-1}=a^0=1$，故选择 .C

7．如图，在 3×3 的正方形网格中有四个格点 A，B，C，D，以其中一点为原点，网格线所在直线为坐标轴，建立平面直角坐标系，使其余三个点中存在两个点关于一条坐标轴对称，则原点是（　）

A．A 点　　B．B 点　　C．C 点　　D．D 点

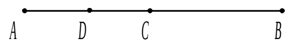


【答案】*B*

【解答过程】解：观察正方形网格，得 *A*、*C* 两点的连线被过点 *B* 的网格线所在直线垂直平分，所以满足条件的原点是点 *B*，故选择 *B*.

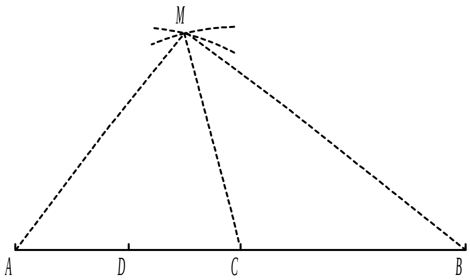
8．如图，*C*，*D* 分别是线段 *AB*，*AC* 的中点，分别以点 *C*，*D* 为圆心，*BC* 长为半径画弧，两弧交于点 *M*，测量∠*AMB* 的度数，结果为（　）

A．80°　　B．90°　　C．100°　　D．105°



【答案】*B*

【解题思路】分别以点 *C*，*D* 为圆心，*BC* 长为半径画弧，两弧交于点 *M*，实际上是线段 *CD* 的垂直平分线的作法.



由作法不难看出 *CA*＝*CM*＝*CB*，因此∠*A*＝∠*CMA*，∠*B*＝∠*BMC*，由于∠*A*＋∠*CMA*＋∠*B*＋∠*BMC*＝180°，因此∠*CMA*＋∠*BMC*＝90°.

【解答过程】解：如上图，测量∠*AMB* 的度数为 90°．故选择 *B*．

9．若一组数据 1，2，3，4，*x* 的平均数与中位数相同，则实数 *x* 的值不可能是（　）

A．0　　B．2.5　　C．3　　D．5

【答案】C

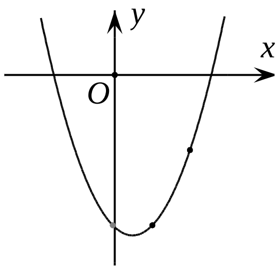
【解答过程】解：由题意得中位数为 2 或 *x* 或 3. 由 $\frac{1}{5}$（1＋2＋3＋4＋*x*）＝2，得 *x*＝0. 由 $\frac{1}{5}$（1＋2＋3＋4＋*x*）＝*x*，得 *x*＝2.5. 由 $\frac{1}{5}$（1＋2＋3＋4＋*x*）＝3，得 *x*＝5.故选择 *C*．

10．已知一个函数图象经过(1，－4)，(2，－2)两点，在自变量 *x* 的某个取值范围内，都有函数值 *y* 随 *x* 的增大而减小，则符合上述条件的函数可能是（　）

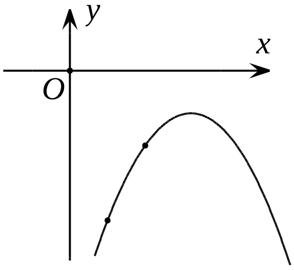
A．正比例函数　B．一次函数　C．反比例函数　D．二次函数

【答案】*D*

【解答过程】解：若正比例函数过(1，－4)，(2，－2)两点，则这个正比例函数不存在；若一次函数、反比例函数过(1，－4)，(2，－2)两点，那么这些函数的函数值 *y* 随 *x* 的增大而增大．若二次函数过(1，－4)，(2，－2)两点如下图：



（1）



（2）

图（1）中，在对称轴的左侧，函数值 y 随 x 的增大而减小，图（2）中，在对称轴的右侧，函数值 y 随 x 的增大而减小，故选择 D．

二、填空题（共 6 小题，每题 4 分，满分 24 分）

11．分解因式 a^2-9 的结果是______________．

【答案】$(a+3)(a-3)$

【解答过程】解：$a^2-9=a^2-3^2=(a+3)(a-3)$

12．计算 $(x-1)(x+2)$ 的结果是_____________________．

【答案】x^2+x-2

【解答过程】解：$(x-1)(x+2)=x^2+2x-x-2=x^2+x-2$．

13．一个反比例函数图象过点 $A(-2,-3)$，则这个反比例函数的解析式是______________．

【答案】$y=\dfrac{6}{x}$

【解答过程】解：设反比例函数的解析式为 $y=\dfrac{k}{x}$，

∵双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 经过点 $A(-2,-3)$，

∴ $-3=\dfrac{k}{-2}$，解得 $k=6$．

∴反比例函数的解析式为 $y=\dfrac{6}{x}$．

14．
一组数据：2015，2015，2015，2015，2015，2015 的方差是______________．

【答案】0

【解答过程】解法 1：$\bar{x}=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$

$=\dfrac{1}{5}(2015+2015+2015+2015+2015)$

$=2015$.

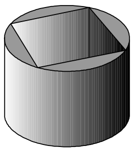
$s^2=\dfrac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$

$=\dfrac{1}{5}[(2015-2015)^2+(2015-2015)^2+\cdots+(2015-2015)^2]$

$=0$.

解法 2：∵该组数据都相等，∴ $s^2=0$.

15．一个工件，外部是圆柱体，内部凹槽是正方体，如图所示．其中，正方体一个面的四个顶点都在圆柱底面的圆周上，若圆柱底面周长为 2πcm，则正方体的体积为_______cm^3.



【答案】$2\sqrt{2}$

【解答过程】解：设圆柱的底面半径为 r.

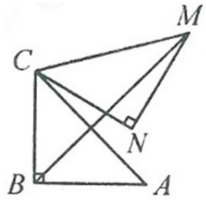
∵圆柱底面周长为 2π，

∴ $r=1$.

∴正方体的棱长为 $\sqrt{2}$．

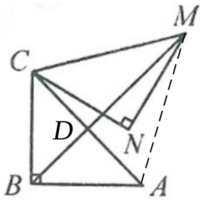
∴正方体的体积为 $2\sqrt{2}$．

16．如图，在 Rt△*ABC* 中，∠*ABC*＝90°，*AB*＝*BC*＝$\sqrt{2}$，将△*ABC* 绕点 *C* 逆时针旋转 60°，得到△*MNC*，连接 *BM*，则 *BM* 的长是______________.



【答案】$\sqrt{3}+1$

【解答过程】解：连接 *AM*，设 *BM* 与 *AC* 相交于点 *D*.



∵Rt△*ABC* 中，∠*ABC*＝90°，*AB*＝*BC*＝$\sqrt{2}$，

∴*AC*＝2.

∵∠*ACM*＝60°，*AC*＝*CM*＝2.

∴△*ACM* 是等边三角形.

∴*MC*＝*MA*.

∵*AB*＝*BC*，

∴*BM* 垂直平分 *AC*.

∴*DM*＝*AM*×sin60°＝$\sqrt{3}$.

又∵*BD*＝$\frac{1}{2}$*AC*＝1，

∴*BM*＝*BD*＋*DM*＝$\sqrt{3}+1$.

三、解答题（共 10 小题，满分 96 分）

17．（7 分）计算：$(-1)^{2015}+\sin 30^0+(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$.

【解答过程】解：原式＝$-1+\frac{1}{2}+(4-3)=\frac{1}{2}$.

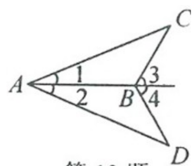
【易错点津】此类问题容易出错的地方是算错负数的奇次幂为正，记错特殊角的三角函数值等.

18．（7 分）化简：$\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}-\frac{2ab}{a^2+b^2}$.

【解答过程】解：原式$\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}-\frac{2ab}{a^2+b^2}=\frac{a^2+2ab+b^2-2ab}{a^2+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1$.

【易错点津】此类问题容易出错的地方是混淆分式本身的符号和分子的符号而运算错误.

19．（7 分）如图，∠1＝∠2，∠3＝∠4，求证：*AC*＝*AD*.



第 19 题

【解答过程】证明：∵∠3＝∠4，

∴∠*ABC*＝∠*ABD*.

在△ABC 和△ABD 中，$\begin{cases}\angle 1=\angle 2\\ AB=AB\\ \angle ABC=\angle ABD\end{cases}$，

∴△ABC≌△ABD (ASA)．

∴AC＝AD．

【易错点津】此类问题容易出错的地方是不能正确运用适当的方法来判定两个三角形全等，比如用边边角来证明两个三角形全等，这样就错了．

20．（8 分）已知关于 x 的方程 $x^2+(2m-1)x+4=0$ 有两个相等的实数根，求 m 的值．

【解答过程】解：∵关于 x 的方程 $x^2+(2m-1)x+4=0$ 有两个相等的实数根，

∴$\triangle=(2m-1)^2-4\times1\times4=0$．

∴$2m-1=\pm4$．

∴$m=\frac{5}{2}$ 或 $m=-\frac{3}{2}$．

【易错点津】此类问题容易出错的地方是弄错一元二次方程根的情况与根的判别式之间的关系．

21．（9 分）有 48 支队 520 名运动员参加篮球、排球比赛，其中每支篮球球队 10 人，每支排球队 12 人，每名运动员只能参加一项比赛，篮球、排球各有多少支参赛？

【解答过程】解：

方法一：设有 x 支篮球队和 y 支排球队参赛，由题意得 $\begin{cases}x+y=48\\ 10x+12y=520\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}x=28\\ y=20\end{cases}$．

答：篮球、排球队各有 28 支与 20 支参赛．

方法二：

设有 x 支篮球队，则有$(48-x)$支排球队参赛，由题意得 $10x+12(48-x)=520$，

解得 x＝28．

∴$48-x=48-28=20$．

答：篮球、排球队各有 28 支与 20 支参赛．

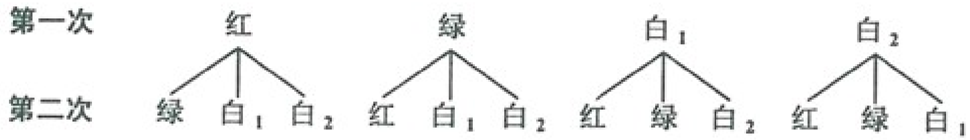
【易错点津】此类问题容易出错的地方是找不出两个相等关系，也就是理解不了题目的意思．

22．（9 分）一个不透明袋子中有 1 个红球，1 个绿球和 n 个白球，这些球除颜色外无其他差别．

（1）当 n＝1 时，从袋中随机摸出 1 个球，摸到红球和摸到白球的可能性是否相同？___（在答题卡相应位置填“相同”或“不相同”）

（2）从袋中随机摸出 1 个球，记录其颜色，然后放回．大量重复该实验，发现摸到绿球的频率稳定于 0.25，则 n 的值是_____；

（3）在一个摸球游戏中，所有可能出现的结果如下：



根据树状图呈现的结果，求两次摸出的球颜色不同的概率．

【解答过程】解：（1）相同；

（2）2；

（3）由树状图可知：共有 12 种结果，且每种结果出现的可能性相同．其中两次摸出的球颜色不同（记为事件 A）的结果共有 10 种，

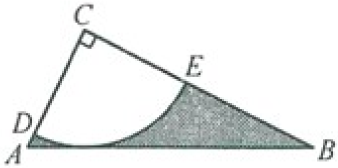
∴$P(A)=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$．

【易错点津】此类问题容易出错的地方是不注意随机摸球后的放回和不放回的区别．

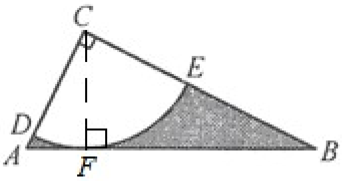
23. （10 分）如图，Rt△*ABC* 中，∠*C*＝90°，*AC*＝$\sqrt{5}$，tan*B*＝$\frac{1}{2}$．半径为 2 的⊙*C*，分别交 *AC*、*BC* 于点 *D*、*E*，得到弧 *DE*．

（1）求证：*AB* 为⊙*C* 的切线；

（2）求图中阴影部分的面积．



【解答过程】解：（1）如图所示，过点 *C* 作 *CF*⊥*AB* 于点 *F*，



在 Rt△*ABC* 中，$\tan B=\frac{AC}{BC}=\frac{1}{2}$，

∴$BC=2AC=2\sqrt{5}$．

∴ $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5})^2}=5$，

∴ $CF=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}}{5}=2$．

又∵⊙*C* 的半径为 2，

∴*AB* 为⊙*C* 的切线．

（2）$S_{阴影}=S_{\Delta ABC}-S_{扇形CDE}$

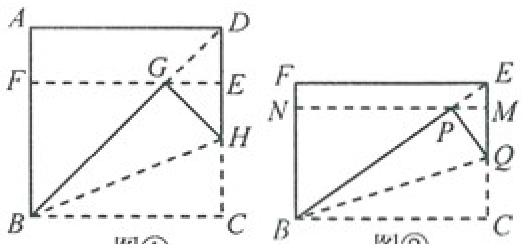
$=\frac{1}{2}AC\cdot BC-\frac{n\pi r^2}{360}$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}-\frac{90\pi\times 2^2}{360}$

$=5-\pi$．

【易错点津】此类问题容易出错的地方是用错扇形的面积公式．

24. （12 分）定义：长宽比为 $\sqrt{n}:1$（*n* 为正整数）的矩形称为 $\sqrt{n}$ 矩形．下面，我们通过折叠的方式折出一个 $\sqrt{2}$ 矩形，如图①所示．



操作 1：将正方形 *ABCD* 沿过点 *B* 的直线折叠，使折叠后的点 *C* 落在对角线 *BD* 上的点 *G* 处，折痕为 *BH*．

操作 2：将 *AD* 沿过点 *G* 的直线折叠，使点 *A*，点 *D* 分别落在边 *AB*，*CD* 上，折痕为 *EF*．则四边形 *BCEF* 为 $\sqrt{2}$ 矩形．

证明：设正方形 *ABCD* 的边长为 1，则 $BD=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$．

由折叠性质可知 *BG*＝*BC*＝1，∠*AFE*＝∠*BFE*＝90°，则四边形 *BCEF* 为矩形．

∴∠*A*＝∠*BFE*．

∴$EF // AD$.

∴$\dfrac{BG}{BD}=\dfrac{BF}{AB}$，即$\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{BF}{1}$.

∴$BF=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

∴$BC:BF=1:\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}:1$.

∴四边形 $BCEF$ 为$\sqrt{2}$矩形.

阅读以上内容，回答下列问题：

（1）在图①中，所有与 CH 相等的线段是______，$\tan\angle HBC$ 的值是______；

（2）已知四边形 $BCEF$ 为$\sqrt{2}$矩形，模仿上述操作，得到四边形 $BCMN$，如图②，求证：四边形 $BCMN$ 为$\sqrt{3}$矩形；

（3）将图②中的$\sqrt{3}$矩形 $BCMN$ 沿用（2）中的方式操作 3 次后，得到一个“$\sqrt{n}$矩形”，则 n 的值是_____.

【解答过程】解：（1）由轴对称的性质可知 $CH=GH$，$\angle BGH=\angle C=90°$，

又由于四边形 $ABCD$ 为正方形，

∴$\angle BDC=45°$.

∴$\triangle DGH$ 为等腰直角三角形.

∴$GD=GH$.

因此第一处的答案应该是 GH，DG.

设 $CH=a$，则 $DH=\sqrt{2}a$，所以 $CD=(\sqrt{2}+1)a$，

∴$\tan\angle HBC=\dfrac{CH}{BC}=\dfrac{a}{(\sqrt{2}+1)a}=\sqrt{2}-1$.

∴第二处答案应是$\sqrt{2}-1$.

（2）证明：∵$BF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$BC=1$，

∴$BD=\sqrt{BF^2+BC^2}=\sqrt{(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2+1^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

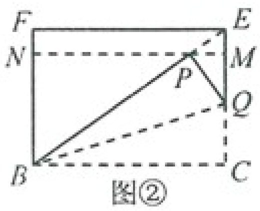
由折叠的性质可知：$BP=BC=1$，$\angle FNM=\angle BNM=90°$，

则四边形 $BCEF$ 为矩形.

∴$\angle BNM=\angle F$.

∴$MN // EF$.

∴$\dfrac{BP}{BE}=\dfrac{BN}{BF}$，即 $BP\cdot BF=BE\cdot BN$.



图②

∴$\dfrac{\sqrt{6}}{2}BN=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

∴$BN=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

∴$BC:BN=1:\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}:1$.

∴四边形 $BCMN$ 为$\sqrt{3}$矩形.

（3）将图②中的$\sqrt{3}$矩形 $BCMN$ 沿用（2）中的方式，操作 1 次后得到$\sqrt{4}$矩形；操作 2 次后得到$\sqrt{5}$矩形；操作 3 次后得到$\sqrt{6}$矩形.

故此处填 6.

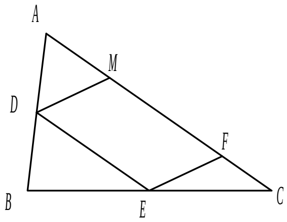
【易错点津】此类问题容易出错的地方是不知用类比的解题方法解不同的$\sqrt{n}$矩形．

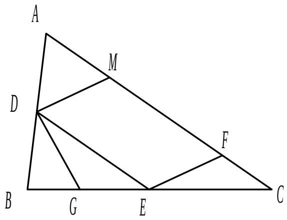
25．（13 分）如图①，在锐角△*ABC* 中，*D*、*E* 分别是 *AB*、*BC* 的中点，*F* 为 *AC* 上一点，且∠*A*＝∠*AFE*，*DM*∥*EF* 交 *AC* 于点 *M*．

（1）证明：*DM*＝*DA*；

（2）点 *G* 在 *BE* 上，且∠*BDG*＝∠*C*．如图②，求证：△*DGE*∽△*EFC*；

（3）在图②中，（2）的条件下，取 *CE* 上一点 *H*，使得∠*CFH*＝∠*B*，若 *BG*＝1，求 *EH* 的长．





图①　　　　　图②

【解答过程】

证明：（1）∵*DM*∥*EF*，

∴∠*AMD*＝∠*AFE*．

∵∠*AFE*＝∠*A*．

∴∠*AMD*＝∠*A*．

∴*DM*＝*DA*．

（2）∵*D*、*E* 分别是 *AB*、*BC* 的中点，

∴*DE*∥*AC*．

∴∠*DEG*＝∠*C*，∠*BDE*＝∠*A*，

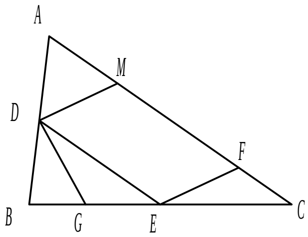
∴∠*BDE*＝∠*AFE*．

∴∠*BDG*＋∠*GDE*＝∠*C*＋∠*FEC*．

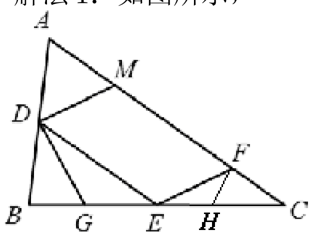
∵∠*BDG*＝∠*C*，

∴∠*EDG*＝∠*FEC*．

∴△*DEG*∽△*ECF*．



（3）解法 1：如图所示，



∵∠*BDG*＝∠*C*＝∠*DEB*，∠*B*＝∠*B*，

∴△*BDG*∽△*BED*．

∴$\dfrac{BD}{BE}=\dfrac{BG}{BD}$，即 $BD^2=BE\cdot BG$．

∵∠*A*＝∠*AFE*，∠*B*＝∠*CFH*，

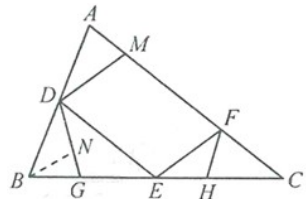
∴∠*C*＝180°－∠*AFE*－∠*CFH*＝∠*EFH*．

又∵∠*FEH*＝∠*CEF*，

∴△*EFH*∽△*ECF*．

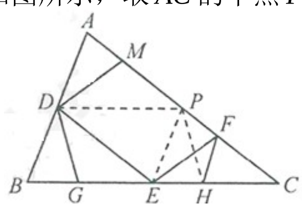
∴$\dfrac{EH}{EF}=\dfrac{EF}{EC}$，即 $EF^2=EH\cdot EC$．

∵$DE∥AC$，$DM∥EF$，
∴四边形 $DEFM$ 是平行四边形.
∴$EF=DM=AD=BD$.
∵$BE=EC$，
∴$EH=BG=1$.
解法 2：如图所示，在 DG 上取一点 N，使得 $DN=FH$.

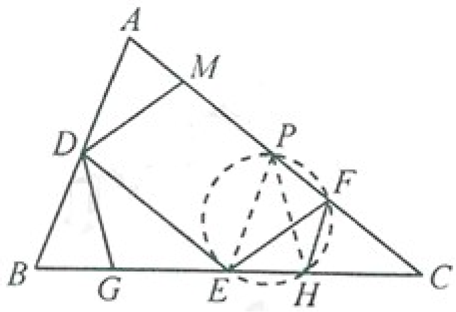


∵$\angle A=\angle AFE$，$\angle ABC=\angle CFH$，$\angle C=\angle BDG$，
∴$\angle EFH=180°-\angle AFE-\angle CFH=\angle C=\angle BDG$.
∵$DE∥AC$，$DM∥EF$，
∴四边形 $DEFM$ 是平行四边形.
∴$EF=DM=AD=BD$.
∴$\triangle BDN\cong\triangle EFH$.
∴$BN=EH$，$\angle BND=\angle EHF$.
∴$\angle BNG=\angle FHC$.
∵$\angle BDG=\angle C$，$\angle DBG=\angle CFH$，
∴$\angle BGD=\angle FHC$.
∴$\angle BNG=\angle BGD$.
∴$BN=BG$.
∴$EH=BG=1$.

解法 3：如图所示，取 AC 的中点 P，连接 PD、PE、PH，则 $PE∥AB$.



∴$\angle PEC=\angle B$.
∵$\angle CFH=\angle B$，
∴$\angle PEC=\angle CFH$.
又∵$\angle C=\angle C$，
∴$\triangle CEP\backsim\triangle CFH$.
∴$\dfrac{CE}{CF}=\dfrac{CP}{CH}$.
∴$\triangle CEF\backsim\triangle CPH$.
∴$\angle CFE=\angle CHP$.
由（2）可得$\angle CFE=\angle DGE$，
∴$\angle CHP=\angle DGE$.
∴$PH∥DG$.
∵D、P 分别为 AB、AC 的中点，
∴$DP∥GH$，$DP=\dfrac{1}{2}BC=BE$.
∴四边形 $DGHP$ 是平行四边形.
∴$DP=GH=BE$.
∴$EH=BG=1$.
解法 4：如图所示，作$\triangle EHF$ 的外接圆交 AC 于另一点 P，连接 PE、PH，则$\angle HPC=\angle HEF$，$\angle FHC=\angle CPE$.



∵∠B=∠CFH，∠C=∠C，

∴∠A=∠CHF.

∴∠A=∠CPE.

∴PE∥AB.

∵DE∥AC，

∴四边形 $ADEP$ 是平行四边形.

∴$DE=AP=\frac{1}{2}AC$.

∴$DE=CP$.

∵∠GDE=∠CEF，

∴∠GDE=∠CPH.

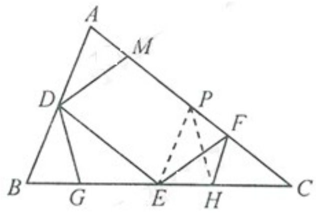
∵∠DEB=∠C，

∴△DEG≌△PCH.

∴$GE=HC$.

∴$EH=BG=1$.

解法 5：如图所示，取 AC 的中点 P，连接 PE、PH，则 PE∥AB.



∴∠PEC=∠B.

又∵∠CFH=∠B，

∴∠PEC=∠CFH.

又∵∠C=∠C，

∴△CEP∽△CFH.

∴$\frac{CE}{CF}=\frac{CP}{CH}$.

∴△CEF∽△CPH.

∴∠CEF=∠CPH.

由（2）可得∠CEF=∠EDG，∠C=∠DEG.

∵D、E 分别为 AB、AC 的中点，

∴$DE=\frac{1}{2}AC=PC$.

∴△DEG≌△PCH.

∴$GE=HC$.

∴$EH=BG=1$.

【易错点津】第（2）（3）两个小问题可能因不能寻找到证明相似所需要的相等的角，当然大多数同学可能根本找不到解决问题的思路而留空.

26．（13 分）如图，抛物线 $y=x^2-4x$ 与 x 轴交于 O，A 两点．P 为抛物线上一点，过点 P 的直线 $y=x+m$ 与对称轴交于点 Q.

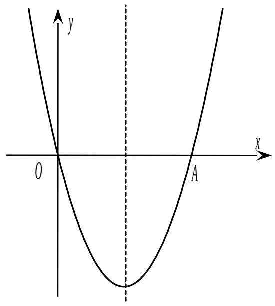
（1）这条抛物线的对称轴是______________；直线 PQ 与 x 轴所夹锐角的度数是_____________；

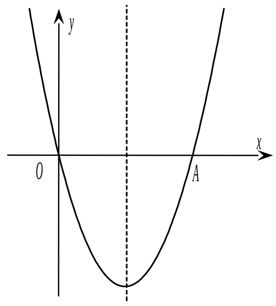
（2）若两个三角形面积满足 $S_{\triangle POQ}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle PAQ}$，求 m 的值；

（3）当点 P 在 x 轴下方的抛物线上时，过点 $C(2，2)$的直线 AC 与直线 PQ 交于点 D.

① 求 $PD+QD$ 的最大值；

② 求 $PD\cdot QD$ 的最大值.





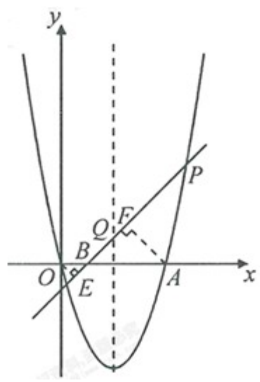
第 26 题图　　　　备用图

【解答过程】解：（1）（1）把 $a=1$，$b=-4$ 代入 $x=-\dfrac{b}{2b}$，可得对称轴为 $x=2$；直线 PQ 就是直线 $y=x+m$，与 x 轴所夹锐角的度数为 45°.

（2）设直线 PQ 交 x 轴于点 B，分别过点 O、A 作 PQ 的垂线，垂足分别为 E、F.

显然，当点 B 在 OA 的延长线上时，$S_{\Delta OQP}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta PAQ}$ 不成立.

① 如图所示，当点 B 落在线段 OA 上时，$\dfrac{S_{\Delta POQ}}{S_{\Delta PAQ}}=\dfrac{OE}{AF}=\dfrac{1}{3}$，由△$OBE$∽△$ABF$ 得 $\dfrac{OB}{AB}=\dfrac{OE}{AF}=\dfrac{1}{3}$，从而 $AB=3OB$.



∴$OB=\dfrac{1}{4}OA$.

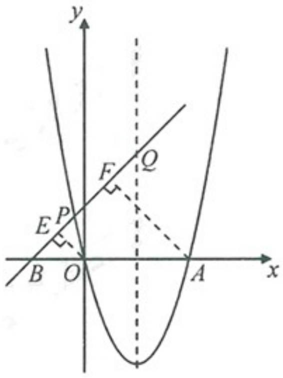
由 $y=x^2-4x$ 得点 A（4，0），从而 $OB=1$.

∴$B(1，0)$.

∴$1+m=0$.

∴$m=-1$.

② 如图所示，当点 B 落在线段 AO 的延长线上时，$\dfrac{S_{\Delta POQ}}{S_{\Delta PAQ}}=\dfrac{OE}{AF}=\dfrac{1}{3}$，



由△OBE∽△ABF 得 $\frac{OB}{AB}=\frac{OE}{AF}=\frac{1}{3}$，

∴AB＝3OB.

∴ $OB=\frac{1}{2}OA$.

由 $y=x^2-4x$ 得点 A（4，0），

∴OB＝2.

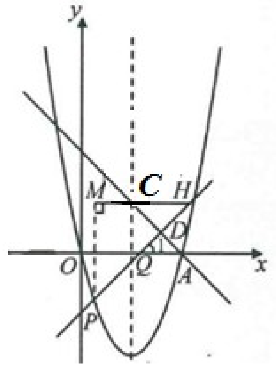
∴B(－2，0).

∴－2＋m＝0.

∴m＝2.

综上所述，当 m＝－1 或 2 时，$S_{\Delta OQP}=\frac{1}{3}S_{\Delta PAQ}$.

（3）①如图所示，过点 C 作 CH∥x 轴交直线 PQ 于点 H，则△CHQ 是等腰三角形.



∵∠CDQ＝45°＋45°＝90°，

∴AD⊥PH.

∴DQ＝DH.

∴PD＋DQ＝PH.

过点 P 作 PM⊥CH 于点 M，则△PMH 是等腰直角三角形.

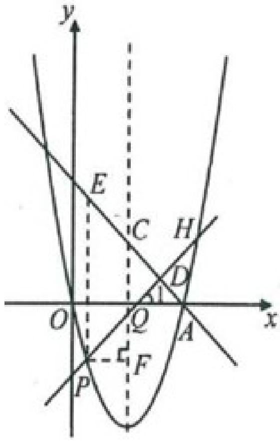
∴ $PH=\sqrt{2}PM$.

∴当 PM 最大时，PH 最大.

∴当点 P 在抛物线的顶点处时，PM 取得最大值，此时 PM＝6.

∴PH 的最大值为 $6\sqrt{2}$，即 PD＋DQ 的最大值为 $6\sqrt{2}$.

解法 2：如图所示，



过点 P 作 $PE\perp x$ 轴，交 AC 于点 E，作 $PF\perp CQ$ 于点 F，则△PDE、△CDQ、△PFQ 是等腰直角三角形.

设点 $P(x,x^2-4x)$，则 $E(x,-x+4)$，$F(2,x^2-4x)$.

∴ $PE=-x^2+3x+4$，$PF=FQ=|2-x|$.

∴点 $Q(2,x^2-5x+2)$.

∴ $CQ=-x^2+5x$.

∴$PD+DQ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(PE+CQ)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-2x^2+8x+4)=-\sqrt{2}(x-2)^2+6\sqrt{2}$（$0<x<4$）.

∴当 $x=2$ 时，$PD+DQ$ 的最大值为 $6\sqrt{2}$.

② 由①可知：$PD+DQ\leq 6\sqrt{2}$. 设 $PD=a$，则 $DQ\leq 6\sqrt{2}-a$.

∴$PD\cdot DQ\leq a(6\sqrt{2}-a)=-a^2+6\sqrt{2}a=-(a-3\sqrt{2})^2+18$.

∵当点 P 在抛物线的顶点时，$a=3\sqrt{2}$，

∴$PD\cdot DQ\leq 18$.

∴$PD\cdot DQ$ 的最大值为 18.

附加说明：（对 a 的取值范围的说明）

设点 P 的坐标为$(n，n^2-4n)$，延长 PM 交 AC 于 N.

$PD=a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}PN=\dfrac{\sqrt{2}}{2}[4-n-(n^2-4n)]=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(n^2-3n-4)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(n-\dfrac{3}{2})^2+\dfrac{25}{8}\sqrt{2}$

.

∵ $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<0$，$0<n<4$，

∴当 $n=\dfrac{3}{2}$ 时，由最大值为 $\dfrac{25}{8}\sqrt{2}$.

∴$0<a\leq\dfrac{25}{8}\sqrt{2}$.

【易错点津】在解决（2）小题时，不能将三角形的面积关系转化为两个距离之比，也可能会漏解其中一种情况；在解决第（3）小题的时候，不能将 $PD+QD$ 和 $PD\cdot QD$ 的值转化.