2024年甘肃省高三月考试卷（3月）

数学

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号框涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号框.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

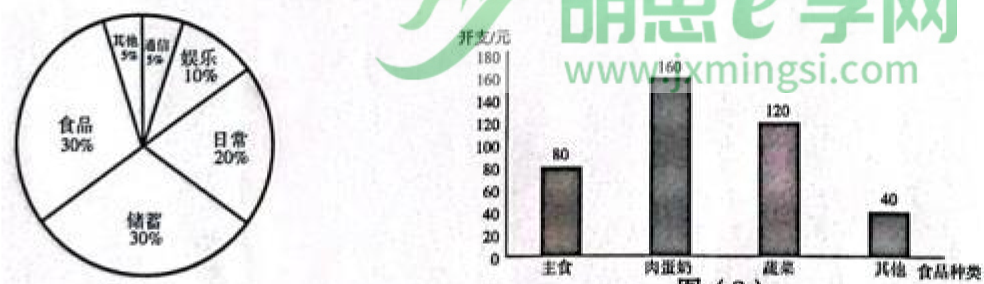
1.若复数$\left[1+(1+a)\mathrm{i}\right]\mathrm{i}$在复平面内对应的点位于第二象限，则实数$a$的取值范围是（　　）

A.$a>-1$　　B.$a<-1$　　C.$a>1$　　D.$a<1$

2.设集合$A=\left\{x| y=\sqrt[3]{2-x}\right\}, B=\left\{-1,0,1,2,3\right\}$，则$A\cap B=$（　　）

A.$\left\{-1,0,1,2\right\}$　　B.$\left\{-1,0,1,2,3\right\}$　　C.$\left\{-1,0,1\right\}$　　D.$\left(-1,2\right]$

3.小李一周的总开支分布如图（1）所示，其中一周的食品开支如图（2）所示，则以下判断错误的是（　　）



图（1）　　图（2）

A.小李这一周用于肉蛋奶的支出高于用于娱乐的支出

B.小李这一周用于食品中其他类的支出在总支出中是最少的

C.小李这一周用于主食的支出比用于通信的支出高

D.小李这一周用于主食和蔬菜的总支出比日常支出高

4.已知点$P\left(3m,4m\right)\left(m\neq 0\right)$为角$\alpha$终边上一点，则$\sin 2\alpha=$（　　）

A.$\dfrac{7}{25}$　　B.$-\dfrac{24}{25}$　　C.$\dfrac{24}{25}$　　D.$-\dfrac{7}{25}$

5.已知数列$\left\{a_n\right\}$为等差数列，$a_4+a_5+a_6=6, a_7+a_8+a_9=11$，则$a_{10}+a_{11}+a_{12}=$（　　）

A.16　　B.19　　C.25　　D.29

6.已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F, O$为坐标原点，过$F$作圆$x^2+y^2=a^2$的切线交$y$轴于

点 A，切点为 B，若 $\overrightarrow{FB}=3\overrightarrow{BA}$，则双曲线的渐近线为（　　）

A. $y=\pm\sqrt{3}x$　　B. $y=\pm\sqrt{2}x$

C. $y=\pm x$　　D. $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

7.已知函数 $f(x)=\left|\ln|x|\right|$, $a=f\left(\ln\dfrac{1}{2}\right)$, $b=f\left(\ln\dfrac{e^2}{2}\right)$, $c=f\left(\ln\dfrac{3}{2}\right)$，则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$

C. $c<a<b$　　D. $a<c<b$

8.已知函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$（e 为自然对数的底），$x\in[0,+\infty)$，记 x_n 为 $f(x)$ 从小到大的第 n 个极值点，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $a_n=f(x_n)$，则 $S_{2024}=$（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{2}\left(e^{\pi}-e^{-2023\pi}\right)}{2e^{\frac{\pi}{4}}\left(1-e^{\pi}\right)}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}\left(1-e^{2024\pi}\right)}{2e^{\frac{\pi}{4}}\left(1-e^{\pi}\right)}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}\left(e^{\pi}-e^{-2023\pi}\right)}{2e^{\frac{\pi}{4}}\left(e^{\pi}+1\right)}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}\left(1-e^{2024\pi}\right)}{2e^{\frac{\pi}{4}}\left(e^{\pi}+1\right)}$

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9.下列说法正确的有（　　）

A.数据 $29,30,39,25,37,41,42,32$ 的第 75 百分位数是 40

B.若 $\xi\sim N(25,4)$，则 $P(20\leqslant\xi\leqslant25)+P(\xi\geqslant30)=\dfrac{1}{2}$

C.4 名学生选报 3 门校本选修课，每人只能选其中一门，则总选法数为 C_4^3 种

D. $(1-x)^8$ 展开式中 x^3 项的二项式系数为 56

10.梯形 $ABCD$ 中，$AD\,//\,BC$, $AB=AD=DC=\dfrac{1}{2}BC=2$, $\triangle DAC$ 沿着 AC 翻折，使点 D 到点 P 处，得到三棱锥 $P-ABC$，则下列说法正确的是（　　）

A.存在某个位置的点 P，使 $AC\perp$ 平面 PAB

B.若 AC 的中点为 E，则异面直线 PE 与 AB 所成角的大小和平面 PAC 与平面 ABC 所成角的大小相等

C.若平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积是 20π

D.若 BC 的中点为 F，则必存在某个位置的点 P，使 $FC=FP$

11.围棋是古代中国人发明的最复杂的智力博弈游戏之一.东汉的许慎在《说文解字）中说：“弈，围棋也”，因

此，“对弈"在当时特指下围棋，现甲与乙对弈三盘，每盘赢棋的概率是 p_1，其中甲只赢一盘的概率低于甲只赢两盘的概率.甲也与丙对弈三盘，每盘赢棋的概率是 p_2，而甲只赢一盘的概率高于甲只赢两盘的概率.若各盘棋的输赢相互独立，甲与乙、丙的三盘对弈均为只赢两盘的概率分别是 $P(A)$ 和 $P(B)$，则以下结论正确的是（　　）

A. $0<p_2<\frac{1}{2}<p_1<1$

B.当 $p_1+p_2=1$ 时，$P(A)>P(B)$

C. $\exists p_1\in(0,1)$，使得对 $\forall p_2\in(0,1)$，都有 $P(A)>P(B)$

D.当 $P(A)=P(B)$ 时，$p_1^2+p_1p_2+p_2^2>\frac{4}{3}$

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12.已知单位向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|3\vec{a}-4\vec{b}|=m$，则 m 的范围是__________.

13.已知正四棱台的上、下底面边长分别为 2 和 4，侧棱与底面所成的角为 $\frac{\pi}{3}$，则该四棱台的体积为__________.

14.若曲线 $C: mx^2+ny^2=1(mn\neq 0$，且 $m\neq n)$ 经过 $(6,-\sqrt{15}),(-2,\sqrt{3}),(4,0)$ 这三点中的两点，则曲线 C 的离心率可能为__________.（写出一个即可）.

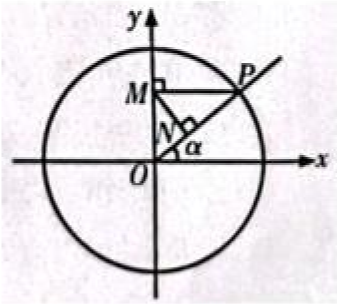
四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分.解应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13 分）已知 F_1,F_2 为椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左.右焦点，P 为椭圆 E 上任意一点，$|PF_1|+|PF_2|=8,|PF_1|$ 的最大值为 6.

（1）求椭圆 E 的标准方程；

（2）过点 F_2 的直线 l 交椭圆于 A,B 两点，若 $\overrightarrow{F_1A}\cdot\overrightarrow{F_1B}=-2$，求直线 l 的方程.

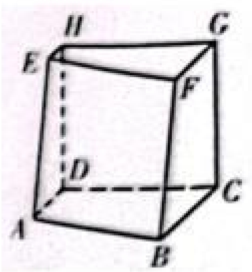
16.（15 分）如图，角 $\alpha(\alpha\in\mathbf{R})$ 的始边为 x 轴非负半轴，终边与单位圆交于点 P，过点 P 作 y 轴的垂线，垂足为 M，M 到直线 OP 的距离为 $|MN|$.若将 $|MN|$ 关于角 α 的函数关系记为 $y=f(x)$.



（1）求 $y=f(x)$ 的解析式；

（2）将 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$（纵坐标不变），再将所得图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，求 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 的单调递增区间.

17.（15分）如图，空间六面体 $ABCDEFGH$ 中，$AD\parallel BC, EH\parallel FG, \angle BCD=\angle FGH=90^\circ$，平面 $ABCD\parallel$ 平面 $EFGH$, $CDHG$ 为正方形，平面 $HDCG\perp$ 平面 $ABCD$, $AD=FG=2EH$, $BC=3EH$.



（1）求证：$AE\parallel BF$；

（2）若 $EF=2EH$，求平面 ABF 与平面 $ABCD$ 所成角的余弦值.

18.（17分）下表是2017年至2021年连续5年全国研究生在学人数的统计表：

年份序号 x	1	2	3	4	5
人数 y（万人）	263	273	286	314	334

（1）现用模型 $\hat{y}=\hat{b}(x+1)^2+\hat{a}$ 作为回归方程对变量 x 与 y 的关系进行拟合，发现该模型的拟合度很高.请计算该模型所表示的回归方程（$\hat{a}$ 与 $\hat{b}$ 精确到0.01）；

（2）已知2021年全国硕士研究生在学人数约为267.2万人，某地区在学硕士研究生人数占该地在学研究生的频率值与全国的数据近似.当年该地区要在本地区在学研究生中进行一项网络问卷调查，每位在学研究生均可进行问卷填写.某天某时段内有4名在学研究生填写了问卷，X 表示填写问卷的这4人中硕士研究生的人数，求 X 的分布列及数学期望.

参考公式及数据：对于回归方程

$\hat{y}=\hat{m}x+\hat{n},\hat{m}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{2}-n\overline{x}^2}$，

$\hat{n}=\overline{y}-\hat{m}\overline{x},1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，$\sum\limits_{i=1}^{5}y_i=1470.$

19.（17分）已知函数$f\left(x\right)=x\ln x(x>0)$．

（1）求函数$f\left(x\right)$的极值点及极值；

（2）若$0<x_1<x_2<1$，且$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$，求证：$\sqrt{x_1x_2}<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$(e为自然对数的底)．

2024年甘肃省高三月考（3月）

数学试题答案及评分参考

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分.

1.A　2.B　3.D　4.C　5.A　6.A　7.B　8.C

二、多选题：本题共3小题，每小题6分，共18分.全部选对的得5分，部分选对的得部分分（9，11题答对一个选项得2分，10题答对一个选项得3分），有选错的得0分.

9.ABD　10.BC　11.ABC

三、填空题：本大题共3小题，每小题5分，共15分.

12. $[1,7]$　13. $\frac{28\sqrt{6}}{3}$　14. $\frac{\sqrt{33}}{3},\frac{\sqrt{7}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}$（只写一个即可）

四、解答题：本大题共5小题，共77分.解应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

15.解：（1）由题意，$2a=8,a+c=6$，

解得 $a=4,c=2,b=2\sqrt{3}$，

所以椭圆 E 的标准方程是 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

（2）由（1）可知 $F_1(-2,0),F_2(2,0)$

当直线 AB 的方程为 $y=0$ 时，$A(-4,0),B(4,0)$，

则 $\overrightarrow{F_1A}\cdot\overrightarrow{F_1B}=(4+2,0)\cdot(-4+2,0)\neq-2$，不符合题意.

不妨设直线 AB 的方程为 $x=my+2,A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}x=my+2\\3x^2+4y^2=48\end{cases}$，得 $(3m^2+4)y^2+12my-36=0$.

则有 $y_1+y_2=\frac{-12m}{3m^2+4},y_1y_2=\frac{-36}{3m^2+4},\Delta>0$ 恒成立.

由 $\overrightarrow{F_1A}\cdot\overrightarrow{F_1B}=-2$，得 $(x_1+2)(x_2+2)+y_1y_2=-2$.

又 $x_1=my_1+2,x_2=my_2+2$，可得：

$(my_1+4)(my_2+4)+y_1y_2=-2$

即 $\frac{-36m^2+28}{3m^2+4}=-2$，解得 $m^2=\frac{6}{5}$.

所以$m=\dfrac{\sqrt{30}}{5}$或$m=-\dfrac{\sqrt{30}}{5}$.

故直线l的方程为$5x\pm\sqrt{30}y-10=0$.

16.解：（1）可知$P(\cos\alpha,\sin\alpha),M(0,\sin\alpha)$，

又直线OP的方程为$\sin\alpha\cdot x-\cos\alpha\cdot y=0$，

故根据点到直线距离公式$|MN|=\dfrac{|\sin\alpha\cos\alpha|}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}=\dfrac{1}{2}|\sin2\alpha|$，

即$f(x)=\dfrac{1}{2}|\sin2x|$.

（2）可知$g(x)=\dfrac{1}{2}\left|\sin\left(4x+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right|$，

由$k\pi\leqslant 4x+\dfrac{2\pi}{3}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得$-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{4}\leqslant x\leqslant-\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$，

所以当$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$时，函数$g(x)$的单调增区间为$\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{24}\right]$和$\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{11\pi}{24}\right]$

17.解：（1）$\because AD /\!/ BC,AD\not\subset$平面$BCGF,BC\subset$平面$BCGF$，

$\therefore AD /\!/$平面$BCGF$.

$\because CDHG$为正方形，$\therefore HD /\!/ CG$，同理可得$HD /\!/$平面$BCGF$.

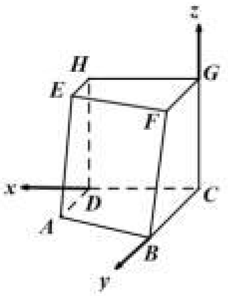
$\because AD\cap HD=D,AD\subset$平面$ADHE,HD\subset$平面$ADHE$，

$\therefore$平面$ADHE /\!/$平面$BCGF$.

$\because$平面$ADHE\cap$平面$ABFE=AE$,平面$BCGF\cap$平面$ABFE=BF$，

$\therefore AE /\!/ BF$.

（2）由于$CDHG$为正方形，平面$HDCG\perp$平面$ABCD$，可得$CG\perp$平面$ABCD$如图，建立空间直角坐标系$C-xyz$，



设 $EH=a$，根据条件可知 $HG=CG=\sqrt{3}a$

则 $D\left(\sqrt{3}a,0,0\right),A\left(\sqrt{3}a,2a,0\right),B\left(0,3a,0\right),E\left(\sqrt{3}a,a,\sqrt{3}a\right),F\left(0,2a,\sqrt{3}a\right)$，

可知平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\vec{m}=\left(0,0,1\right)$，

设平面 ABF 的一个法向量为 $\vec{n}=\left(x_0,y_0,z_0\right)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-\sqrt{3}ax_0+ay_0=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=-ay_0+\sqrt{3}az_0=0.\end{cases}$ 取 $\vec{n}=\left(1,\sqrt{3},1\right)$，

$\therefore\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore$ 平面 ABF 与平面 $ABCD$ 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

18.解：可令 $z=(x+1)^2$，则 z 与 y 成线性回归关系，

根据公式可得 $\hat{y}=2.29z+252.74$，即 $\hat{y}=2.29(x+1)^2+252.74$.

（2）可求得该地区硕士研究生在学生数占总在学研究生人数的频率值为 $\dfrac{4}{5}$，可知 $X\sim B\left(4,\dfrac{4}{5}\right)$，因此随机变量 X 的分布列如下：

X	0	1	2	3	4
P	$C_4^0\left(\frac{1}{5}\right)^4=\frac{1}{625}$	$C_4^1\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{16}{625}$	$C_4^2\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{96}{625}$	$C_4^3\left(\frac{4}{5}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right)^1=\frac{256}{625}$	$C_4^4\left(\frac{4}{5}\right)^4=\frac{256}{625}$

$E\left(X\right)=4\times\dfrac{4}{5}=3.2$（人）.

19.解：（1）由于 $f'\left(x\right)=\ln x+1$，

故当 $0<x<\frac{1}{e}$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 为减函数，

当 $x>\frac{1}{e}$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 为增函数，

所以当 $x=\frac{1}{e}$ 时，函数取极小值 $-\frac{1}{e}$，

即函数 $f(x)$ 的极小值点为 $x=\frac{1}{e}$，且极小值为 $-\frac{1}{e}$；无极大值点和极大值.

（2）令 $\frac{x_2}{x_1}=t$，则 $t>1$，

因为 $x_1\ln x_1=x_2\ln x_2$，所以 $\ln x_1=\frac{t\ln t}{1-t}$，$\ln x_2=\frac{\ln t}{1-t}$，

要证 $\sqrt{x_1x_2}<\frac{1}{e}\Leftrightarrow \ln x_1+\ln x_2<-2\Leftrightarrow \frac{(t+1)\ln t}{1-t}<-2$，

而 $t>1$，只需证 $(t+1)\ln t>2t-2$，即证 $(t+1)\ln t-2t+2>0$，

令 $g(t)=(t+1)\ln t-2t+2(t>1)$，则 $g'(t)=\ln t+\frac{1}{t}-1$，

令 $h(t)=\ln t+\frac{1}{t}-1(t>1)$，则 $h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}=\frac{t-1}{t^2}>0$，

所以 $g'(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 为增函数，$g'(t)>g'(1)=0$，

所以 $g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 为增函数，$g(t)>g(1)=0$，故原不等式成立.