赣州市2024年高三年级摸底考试

数学试卷

2024年3月

本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，共150分，考试时长120分钟

第I卷（选择题共58分）

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合 $A=\{x|\ x^2-4x>0\}, B=\{x|\ y=\log_2(2-x)\}$，则 $(\complement_{\mathrm{R}}A)\cap B=$（　　）

A. $[0,2)$　　B. $(-\infty,2)$　　C. $[0,4]$　　D. $(-\infty,4]$

2.已知i为虚数单位. $\dfrac{3+a\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=2+b\mathrm{i}\,(a,b\in\mathrm{R})$，则 $|a+b\mathrm{i}|=$（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. 4

3.在 $\triangle ABC$ 中，$AB=\sqrt{7}, AC=2, C=120^\circ$，则 $\sin A=$（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{7}}{14}$　　B. $\dfrac{\sqrt{21}}{14}$　　C. $\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$　　D. $\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$

4.在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 AD 的中点，过 B_1 且平行于平面 A_1BE 的平面截正方体所得截面面积为（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　B. $\dfrac{5}{4}$　　C. $\sqrt{6}$　　D. $2\sqrt{6}$

5.在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=3, AD=4, \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-6, \overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{DM}$，则 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=$（　　）

A. 16　　B. 14　　C. 12　　D. 10

6.若一组样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_8$ 的方差为 $2, \sum\limits_{i=1}^{8}(-1)^i x_i=-2, y_i=x_i+(-1)^i(i=1,2,\cdots,8)$，则样本数据 $y_1,y_2,\cdots,y_8$ 的方差为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 2.5　　D. 2.75

7.已知 $a=\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}, b=\dfrac{3}{\mathrm{e}}, c=\ln 3$，则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$

C. $b<c<a$　　D. $c<b<a$

8.在边长为4的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 是 BC 的中点，点 P 是侧面 ABB_1A_1 内的动点（含四条边），

且 $\tan\angle APD=4\tan\angle EPB$，则 P 的轨迹长度为（　　）

A. $\frac{\pi}{9}$　　B. $\frac{2\pi}{9}$　　C. $\frac{4\pi}{9}$　　D. $\frac{8\pi}{9}$

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分.

9.已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, a_3=18, S_3=26$，则（　　）

A. $a_n>0$　　B. $S_n>0$

C.数列 $\{|a_n|\}$ 为单调数列　　D.数列 $\{|S_n|\}$ 为单调数列

10.已知函数 $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$，则（　　）

A. 2π 是 $f(x)$ 的一个周期　　B. $f(x)$ 的图象关于原点对称

C. $f(x)$ 的图象过点 $(\pi,0)$　　D. $f(x)$ 为 R 上的单调函数

11.曲线 C 是平面内与两个定点 $F_1(0,1), F_2(0,-1)$ 的距离的积等于 $\frac{3}{2}$ 的点 P 的轨迹，则（　　）

A.曲线 C 关于坐标轴对称　　B. $\triangle F_1PF_2$ 周长的最小值为 $2+\sqrt{6}$

C. P 到 y 轴距离的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. P 到原点距离的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

第II卷（非选择题共 92 分）

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12.求值：$\sin\frac{\pi}{12}+\sin\frac{7\pi}{12}=$_________.

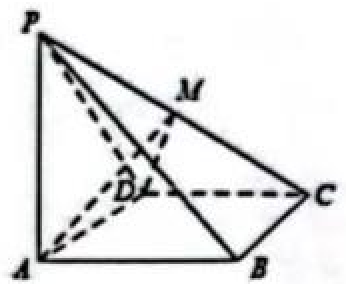
13. $\left(x^2+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^7$ 展开式中的常数项为_________.

14.已知 P 是抛物线 $E: x^2=y$ 上异于顶点的点，E 在 P 处的切线 l 分别交 x 轴、y 轴于点 S,T，过 P 作 l 的垂线分别交 x 轴、y 轴于点 M,N，分别记 $\triangle PMS$ 与 $\triangle PNT$ 的面积为 S_1,S_2，则 $\frac{S_2^2}{S_1}$ 的最小值为_________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$\angle ABC=\angle BCD=90^\circ, PA\perp$ 平面 $ABCD, PA=AB=BC=4, CD=3, M$ 为侧棱 PC 的中点.



（1）求点 D 到平面 PBC 的距离：

（2）求二面角 $M-AD-B$ 的正切值.

16.（15分）

某人准备应聘甲、乙两家公司的高级工程师，两家公司应聘程序都是：应聘者先进行三项专业技能测试，专业技能测试通过后进入面试.已知该应聘者应聘甲公司，每项专业技能测试通过的概率均为 $\frac{2}{3}$，该应聘者应聘乙公司，三项专业技能测试通过的概率依次为 $\frac{5}{6}$，$\frac{2}{3}$，m，其中 $0<m<1$，技能测试是否通过相互独立.

（1）若 $m=\frac{2}{3}$.求该应聘者应聘乙公司三项专业技能测试恰好通过两项的概率；

（2）已知甲、乙两家公司的招聘在同一时间进行，该应聘者只能应聘其中一家，应聘者以专业技能测试通过项目数的数学期望为决策依据，若该应聘者更有可能通过乙公司的技能测试，求 m 的取值范围.

17.（15分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，椭圆 C 的右焦点与点 $Q(2,-2)$ 所在直线的斜率为 -2.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）若过 Q 的直线 l 与椭圆 C 交于 A,B 两点.点 $P(3,0)$.直线 PA,PB 分别交椭圆 C 于点 M,N，直线 MN 的斜率是否为定值？若是，求出该定值，若不是，请说明理由.

18.（17分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x-1}-\ln x$.

（1）求 $f(x)$ 的单调区间，

（2）已知 $m>0$.若函数 $g(x)=f(x)-m(x-1)$ 有唯一的零点 x_0.证明，$1<x_0<2$.

19.（17分）

设数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_N\ (N\geq 2)$.如果对小于 $n(2\leq n\leq N)$ 的每个正整数 k 都有 $a_k>a_n$.则称 n 是数列 A 的一个"D时刻".记 $D(A)$ 是数列 A 的所有"D时刻"组成的集合，$D(A)$ 的元素个数记为 $\mathrm{card}(D,A)$.

（1）对数列 $A:-1,1,-2,2,-3,3$，写出 $D(A)$ 的所有元素；

（2）数列 $A: a_1, a_2, \cdots, a_6$ 满足 $\{a_1, a_2, \cdots, a_6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，若 $\mathrm{card}(D, A) = 4$ 求数列 A 的种数.

（3）证明：若数列 A 满足 $a_n - a_{n-1} .. -1 (n = 2, 3, 4, \cdots, N)$，则 $\mathrm{card}(D, A) .. a_1 - a_N$.

赣州市 2024 年高三年级摸底考试

数学（理科）参考答案

一、单选题（共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	B	A	A	C	D	D

二、多选题（共 18 分）

题号	9	10	11
答案	BC	ABC	ABD

三、填空题（共 15 分）

12. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　13. 630　　14. 1

四、解答题（共 77 分）

15. 解：（1）由 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，可得 $V_{三棱锥P-BCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot PA$

令点 D 到平面 PBC 的距离为 d，则 $V_{三棱锥D-PBC}=\frac{1}{3}S_{\triangle PBC}\cdot d$

由 $V_{三棱锥D-PBC}=V_{三棱锥P-BCD}$，可得 $\frac{1}{3}S_{\triangle PBC}\cdot d=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot PA$

则 $d=\frac{S_{\triangle BCD}\cdot PA}{S_{\triangle PBC}}$

由 $\angle ABC=90^{\circ},BC=4,CD=3$，可得：$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot CD=6$

由 $PA\perp$ 平面 $ABCD,\angle ABC=90^{\circ}$，可得 $BC\perp PB$，则 $S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}PB\cdot BC=8\sqrt{2}$

则 $d=\frac{6\times 4}{8\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，即点 D 到平面 PBC 的距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

（2）设 O 为 AC 的中点，过 O 作 $OH\perp AD$ 交 AD 于 H，连结 OM,HM

$\because M$ 是 PC 的中点，$\therefore OM\ /\!/\ PA,\therefore OM\perp$ 平面 $ABCD$

$\therefore OM\perp AD,\therefore AD\perp$ 平面 $MOH,\therefore AD\perp MH$，

$\therefore\angle MHO$ 为二面角 $M-AD-B$ 的一个平面角

又 $S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}AD\cdot OH=\frac{1}{2}S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}CD\cdot BC=3$，

且 $AD=\sqrt{17}$，可得 $OH=\frac{6}{\sqrt{17}}$

则 $\tan\angle MHO=\frac{OM}{OH}=\frac{\sqrt{17}}{3}$

即二面角 $M-AD-B$ 的正切值为 $\frac{\sqrt{17}}{3}$

说明：也可以利用向量法!

16.解：（1）记"该应聘者应聘乙公司三项专业技能测试恰好通过两项"为事件 A

由题设 $P(A)=\frac{5}{6}\times C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times C_2^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

（2）分别记"该应聘者应聘甲、乙公司三项专业技能测试中通过的项目数为 ξ,η"

由题设知：$\xi\sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$

所以 $E\xi=3\times\frac{2}{3}=2$

η 的所有可能取值为 $0,1,2,3$

$P(\eta=0)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\times(1-m)=\frac{1-m}{18}$，

$P(\eta=1)=\frac{5}{6}\times\frac{1}{3}\times(1-m)+\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\times(1-m)+\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\times m=\frac{7-6m}{18}$，

$P(\eta=2)=\frac{5}{6}\times\frac{2}{3}\times(1-m)+\frac{5}{6}\times\frac{1}{3}\times m+\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\times m=\frac{10-3m}{18}$，

$P(\eta=3)=\frac{5}{6}\times\frac{2}{3}\times m=\frac{10m}{18}=\frac{5m}{9}$

故 η 的分布列为

η	0	1	2	3
P	$\frac{1-m}{18}$	$\frac{7-6m}{18}$	$\frac{10-3m}{18}$	$\frac{5m}{9}$

从而 $E\eta=0\times\frac{1-m}{18}+1\times\frac{7-6m}{18}+2\times\frac{10-3m}{18}+3\times\frac{5m}{9}=\frac{2m+3}{2}$

由 $\begin{cases}E\eta>E\xi,\\0<m<1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\frac{2m+3}{2}>2,\\0<m<1,\end{cases}$

解得 $\frac{1}{2}<m<1$

17.解：（1）由题意可设椭圆的半焦距为 c，且椭圆 C 的右焦点为 $(c,0)$

由题意得：$\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{4}{3b^2}=1,\\ a^2=b^2+c^2,\\ \dfrac{-2-0}{2-c}=-2\end{cases}$

解得 $c=1, a^2=3, b^2=2$

所以 C 的方程为：$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$

（2）设 l 的方程为 $x=m(y+2)+2$，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),M(x_3,y_3),N(x_4,y_4)$，则直线 PA 的方程为

$x=\dfrac{x_1-3}{y_1}y+3$

由 $\begin{cases}x=\dfrac{x_1-3}{y_1}y+3,\\ \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 可得 $\left[2(x_1-3)^2+3{y_1}^2\right]y^2+12(x_1-3)y_1y+12{y_1}^2=0$

结合 $\dfrac{x_1^2}{3}+\dfrac{y_1^2}{2}=1$，可得 $(2-x_1)y^2+(x_1-3)y_1y+y_1^2=0$

可得 $y_1\cdot y_3=\dfrac{y_1^2}{2-x_1}$，解得 $y_3=\dfrac{y_1}{2-x_1}$

代入 $x=\dfrac{x_1-2}{y_1}y+2$，解得 $x_3=\dfrac{x_1-3}{y_1}\cdot\dfrac{y_1}{2-x_1}+3=\dfrac{1}{x_1-2}+2$

同理可得 $y_4=\dfrac{y_2}{2-x_2}, x_4=\dfrac{1}{x_2-2}+2$

故 $k_{MN}=\dfrac{y_4-y_3}{x_4-x_3}=\dfrac{\dfrac{y_2}{2-x_2}-\dfrac{y_1}{2-x_1}}{\dfrac{1}{x_2-2}-\dfrac{1}{x_1-2}}$

$=\dfrac{y_2(2-x_1)-y_1(2-x_2)}{x_1-x_2}$

$=\dfrac{y_2\left[2-(my_1+2m+2)\right]-y_1\left[2-(my_2+2m+2)\right]}{m(y_1-y_2)}$

$=\dfrac{2m(y_1-y_2)}{m(y_1-y_2)}=2$，故直线 MN 的斜率是定值，且定值为 2

18.解：（1）$\because f(x)=e^{x-1}-\ln x,\therefore f'(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{x}$

$\therefore f''(x)=e^{x-1}+\dfrac{1}{x^2}>0$

$\therefore$ 当 $x>0$ 时，$f'(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{x}$ 为增函数

又 $\because f'(1)=0$

$\therefore$ 当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0,f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0,f(x)$ 单调递增.

$\therefore f(x)$ 的减区间为 $(0,1)$，增区间为 $(1,+\infty)$

（2）$\because g(x)=f(x)-m(x-1)=e^{x-1}-\ln x-mx+m(m>0)$

$\therefore g'(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{x}-m(x>0,m>0)$

由（1）可知 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，且 $g'(1)=-m<0$，

又 $g'(1+m)=e^m-\dfrac{1}{1+m}-m>e^m-(m+1)>0$

$\therefore$ 存在唯一的 $t\in(1,1+m)\subseteq(1,+\infty)$ 使得 $g'(t)=0$

$\therefore$ 当 $x\in(0,t)$ 时 $g'(t)<0,g(x)$ 单调递减；当 $x\in(t,+\infty)$ 时 $g'(t)>0,g(x)$ 单调递增；

$\therefore g(x)_{\min}=g(t)=e^{t-1}-\ln t-mt+m$

若方程 $g(x)=e^{x-1}-\ln x-mx+m=0$ 有唯一的实数 x_0，则 $x_0=t>1$

$$\therefore\begin{cases}g'(t)=e^{t-1}-\dfrac{1}{t}-m=0,\\ g(t)=e^{t-1}-\ln t-mt+m=0\end{cases}$$

消去 m 可得 $(2-t)e^{t-1}-\ln t+1-\dfrac{1}{t}=0(t>1)$

令 $h(t)=(2-t)e^{t-1}-\ln t+1-\dfrac{1}{t}(t>1)$，

则 $h'(t)=(1-t)e^{t-1}-\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t^2}=(1-t)\left(e^{t-1}+\dfrac{1}{t^2}\right)<0$

$\therefore h(t)$ 在 $t\in(1,+\infty)$ 上为减函数

且 $h(1)=1>0, h(2)=\dfrac{1}{2}-\ln 2<0$

$\therefore$ 当 $h(t)=0$ 时 $t\in(1,2)$，即 $1<x_0<2$

19.解：（1）由题设知当 $n=3$ 时，$a_1>a_3, a_2>a_3$，故 $n=3$ 是数列 A 的一个"D 时刻"

同理当 $n=5$ 时，都有 $a_i>a_5(i=1,2,3,4)$，即 $n=5$ 也是数列 A 的一个"D 时刻"

综上，$D(A)=\{3,5\}$

（2）由 $\mathrm{card}(D,A)=4$，易知 $a_1=5$ 或 $a_1=6$

①当 $a_1=5$ 时，$4,3,2,1$ 必须从左往右排列，6 可以是 $a_i(i=2,3,4,5,6)$ 中任一个，共有 5 种情况

②当 $a_1=6$ 时，若 $D(A)$ 中的四个元素是由集合 A 中的元素 $4,3,2,1$ 或 $5,3,2,1$ 或 $5,4,2,1$ 或 $5,4,3,1$ 引起的

1.若由 $4,3,2,1$ 引起，即 4，3，2，1 从左往右排列，则 5 必须排在 4 的后面，共 4 种；

2.若由 $5,3,2,1$ 引起，即 5，3，2，1 从左往右排列，则 4 必须排在 3 的后面，共 3 种

3.若由 $5,4,2,1$ 引起，即 $5,4,2,1$ 从左往右排列，则 3 必须排在 2 的后面，共 2 种；

4.若由 $5,4,3,1$ 引起，即 $5,4,3,1$ 从左往右排列，则 2 必须排在 1 的后面，共 1 种

综上，符合 $\mathrm{card}(D,A)=4$ 的数列 A 有 15 种

另解：

因为数列 $A: a_1, a_2, \cdots, a_6\in\{1,2,3,4,5,6\}$，由题意可知 $D(A)$ 中的四个元素为 $2,3,4,5,6$ 中的四个共有 5 种情况：

①当 $D(A)=\{3,4,5,6\}$ 时，数列 $A=\{5,6,4,3,2,1\}$ 共有 1 种情况；

②当 $D(A)=\{2,4,5,6\}$ 时，数列 $A=\{6,4,5,3,2,1\},\{5,4,6,3,2,1\}$ 共有 2 种情况；

③当 $D(A)=\{2,3,5,6\}$ 时，数列 $A=\{6,5,3,4,2,1\},\{6,4,3,5,2,1\},\{5,4,3,6,2,1\}$ 共有 3 种情况；

④当 $D(A)=\{2,3,4,6\}$ 时，数列 $A=\{6,5,4,2,3,1\},\{6,5,3,2,4,1\},\{6,4,3,2,5,1\},\{5,4,3,2,6,1\}$ 共有 4 种情况；

⑤当 $D(A)=\{2,3,4,5\}$ 时，数列 $A=\{6,5,4,3,1,2\},\{6,5,4,2,1,3\},\{6,5,3,2,1,4\},\{6,4,3,2,1,5\}$，

$\{5,4,3,2,1,6\}$ 共有 5 种情况；

综上，符合$\operatorname{card}(D,A)=4$的数列$A$有 15 种

（3）①若$\operatorname{card}(D,A)=0$，由$a_1 \leqslant a_N$，所以$a_1-a_N \leqslant 0$，即$\operatorname{card}(D,A) \geqslant a_1-a_N$成立

②若$\operatorname{card}(D,A)=m(m \geqslant 1)$，

不妨设$D(A)=\{i_1,i_2,i_3,\cdots,i_m\},(i_1<i_2<i_3<\cdots<i_m)$且$2 \leqslant i_j \leqslant N(j=1,2,\cdots,m)$

从而$a_{i_1}-a_1 \geqslant a_{i_1}-a_{i_1-1} \geqslant -1; a_{i_2}-a_{i_1} \geqslant a_{i_2}-a_{i_2-1} \geqslant -1; \cdots\cdots; a_{i_m}-a_{i_{m-1}} \geqslant a_{i_m}-a_{i_m-1} \geqslant -1$

由累加法知：$a_{i_m}-a_1 \geqslant -m$

又$a_N-a_1 \geqslant a_{i_m}-a_1 \geqslant -m$，即$m \geqslant a_1-a_N$

综上：$\operatorname{card}(D,A) \geqslant a_1-a_N$.证毕