九江市2024年第三次高考模拟统一考试

数学试题

注意事项：

1.答题前，考生务必将自己的姓名、班级、准考证号填写在答题卡上.

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试题卷上无效.

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并收回.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.为深入学习党的二十大精神，某校开展“奋进新征程，强国伴我行”二十大主题知识竞赛，其中高三年级选派8名同学参赛，这8名同学的成绩（总分10分）依次如下：9，8，10，7，10，8，8，9，则这组数据的75%分位数为（C）

A. 8　　B. 9　　C. 9.5　　D. 10

解:8名同学成绩数据由小到大重新排列为：7，8，8，8，9，9，10，10，$\because 8\times75\%=6$是整数，$\therefore 75\%$分位数是第6位数和第7位数的平均数，即$\dfrac{9+10}{2}=9.5$.故选C.

2.在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，已知$2c-a=2b\cos A$，则$B=$(B)

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\dfrac{5\pi}{6}$

解:由正弦定理，得$2\sin C-\sin A=2\sin B\cos A$，$\therefore 2\sin(A+B)-2\sin B\cos A=\sin A$，

$\therefore 2\sin A\cos B=\sin A$. $\because \sin A>0$，$\therefore \cos B=\dfrac{1}{2}$，又$B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\dfrac{\pi}{3}$,故选B.

3.已知等差数列$\{a_n\}$的公差为d（$d\neq0$）,a_5是a_4与a_8的等比中项,则$\dfrac{a_1}{d}=$(A)

A. $-\dfrac{5}{2}$　　B. $-\dfrac{2}{5}$　　C. $\dfrac{5}{2}$　　D. $\dfrac{2}{5}$

解:由${a_5}^2=a_4a_8$，得$(a_1+4d)^2=(a_1+3d)(a_1+7d)$,化简得$2a_1d=-5d^2$,$\because d\neq0$，$\therefore \dfrac{a_1}{d}=-\dfrac{5}{2}$，故选A.

4.考古发现在金字塔内有一组神秘的数字“142857”，我们把它和自然数1到6依次相乘，得$142857\times1=142857$，$142857\times2=285714$，$142857\times3=428571$，$142857\times4=571428$，$142857\times5=714285$，$142857\times6=857142$，结果是同样的数字，只是调换了位置.若将这组神秘数字“142857”进行重新排序，其中偶数均相邻的排法种数为(D)

A. 24　　B. 36　　C. 72　　D. 144

解:由条件，得$A_4^4A_3^3=144$.故选D.

5.已知圆锥的侧面展开图是面积为2π的半圆，则该圆锥的体积是（A）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$　　B. $\sqrt{3}\pi$　　C. $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\pi$　　D. $8\sqrt{3}\pi$

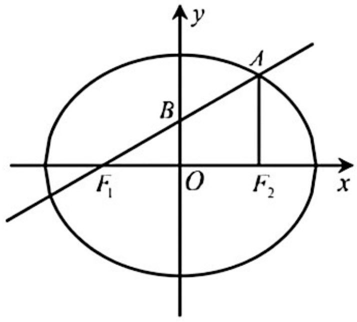
解:设圆锥底面圆半径为r，母线为l，高为h.由题意得$\begin{cases}2\pi r=\pi l,\\ \pi l^2=4\pi,\end{cases}$ 解得$l=2$，$r=1$，

$\therefore h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{3}$，$\therefore$该圆锥的体积是$V=\dfrac{1}{3}\times\pi\times 1^2\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$.故选A.

6.已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左右焦点分别为$F_1,F_2$，过$F_1$且倾斜角为$\dfrac{\pi}{6}$的直线交$C$于第一象限内一点$A$.若线段$AF_1$的中点在$y$轴上，$\triangle AF_1F_2$的面积为$2\sqrt{3}$，则$C$的方程为(D)

A. $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$　　B. $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$　　C. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1$　　D. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{6}=1$

解:如图，$\because O$为线段F_1F_2的中点，B为线段AF_1的中点，$\therefore OB//AF_2$，又$OB\perp x$轴，$\therefore AF_2\perp x$轴.



设$|AF_2|=t$，则$|AF_1|=2t$，$|F_1F_2|=\sqrt{3}t$.$\because\triangle AF_1F_2$的面积为$2\sqrt{3}$，

$\therefore\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}t\times t=2\sqrt{3}$，$t=2$.$\therefore 2a=|AF_1|+|AF_2|=3t=6$，$a=3$，

$2c=|F_1F_2|=\sqrt{3}t=2\sqrt{3}$，$c=\sqrt{3}$，$\therefore C$的方程为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{6}=1$，故选D.

7.若$2\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{3})=\cos(\alpha-\dfrac{\pi}{3})$，则$\tan(\alpha-\dfrac{\pi}{6})=$(C)

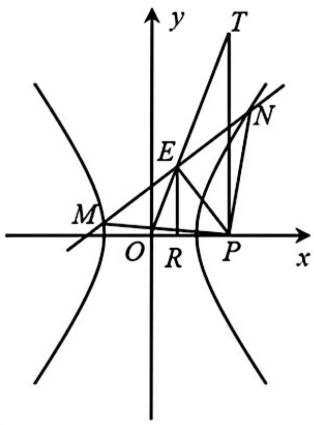
A. $-4-\sqrt{3}$　　B. $-4+\sqrt{3}$　　C. $4-\sqrt{3}$　　D. $4+\sqrt{3}$

解:令$\beta=\alpha-\dfrac{\pi}{6}$，得$2\sin(\beta+\dfrac{\pi}{2})=\cos(\beta-\dfrac{\pi}{6})$，即$2\cos\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta+\dfrac{1}{2}\sin\beta$，

即$\sin\beta=(4-\sqrt{3})\cos\beta$，$\therefore\tan(\alpha-\dfrac{\pi}{6})=\tan\beta=4-\sqrt{3}$，故选C.

8.在平面直角坐标系xOy中，已知直线l与双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$）的左右两支分别交于$M,N$两点，$E$是线段$MN$的中点，$P$是$x$轴上一点，且$PM=PN$，$3\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OP}^2$，则$C$的离心率为（B）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 3



解:$\because E$是线段MN的中点，$PM=PN$，$\therefore PE\perp MN$，$\therefore k_{PE}\cdot k_{MN}=-1$.

又$3\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OP}^2$，$\therefore\overrightarrow{OP}\cdot(3\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OP})=0$，即$\overrightarrow{OP}\perp(3\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OP})$.

设$\overrightarrow{OT}=3\overrightarrow{OE}$，则$OP\perp PT$.过$E$作$x$轴的垂线，垂足为$R$，则$ER//PT$，

$PR=2OR$，$\therefore k_{OE}=-2k_{PE}$.易知$k_{OE}\cdot k_{MN}=e^2-1$，$\therefore e^2=3$，$e=\sqrt{3}$，故选B.

二、多项选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全

部选对的得 6 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分.

9. 已知二项式$(x-\frac{1}{y})^{10}$，则(AD)

A. 展开式中 x^8y^{-2} 的系数为 45

B. 展开式中二项式系数最大的项是第 5 项

C. 展开式中各项系数之和为 1

D. 展开式中系数最大的项是第 5 项或第 7 项

解: $T_{k+1}=C_{10}^{k}(-1)^k x^{10-k}y^{-k}$，当 $k=2$ 时，$T_3=C_{10}^{2}x^8y^{-2}$，系数为 45，A 正确;

由组合数性质可知，中间项系数 C_{10}^{5} 最大，∴展开式中二项式系数最大的项是第 6 项，B 错误;

令 $x=1,y=1$，得展开式中各项系数之和为 $(1-1)^{10}=0$，C 错误;

当 k 为奇数时，系数为负数，当 k 为偶数时，系数为正数，∴当 $k=4$ 或 $k=6$ 时，系数最大，D 正确.
故选 AD.

10. 已知虚数 z 满足 $z^2=\bar{z}$，则下列结论正确的是(ABD)

A. $|z|=1$　　B. $z^3=1$　　C. z 的虚部为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $|z+\bar{z}|=1$

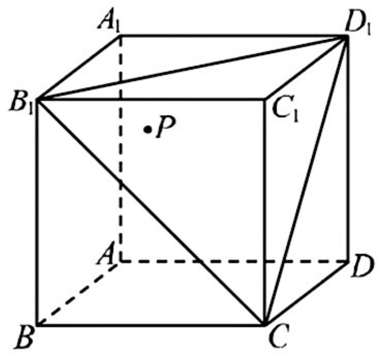
解: 由 $z^2=\bar{z}$，得 $|z|^2=|\bar{z}|=|z|$，$\because |z|\neq 0$，$\therefore |z|=1$，A 正确;
由 $z^2=\bar{z}$，得 $z^3=z\cdot\bar{z}=|z|^2=1$，B 正确;

设 $z=a+bi$ ($a,b\in\mathbf{R}$，$b\neq 0$)，则 $\bar{z}=a-bi$，$z^2=a^2-b^2+2abi$，$\therefore \begin{cases}a^2-b^2=a,\\2ab=-b.\end{cases}$

解得 $a=-\frac{1}{2}$，$b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore z$ 的虚部为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$，C 错误.

又 $|z+\bar{z}|=2|a|=1$，D 正确. 故选 ABD.

11. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，点 P 在截面 B_1CD_1 内，且 $|PC_1|=\frac{\sqrt{5}}{3}$，则（ACD）

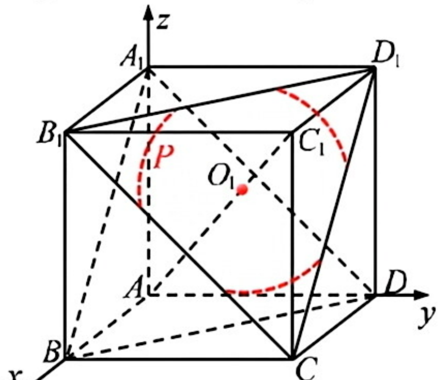


A. 三棱锥 $P-A_1BD$ 的体积为 $\frac{1}{6}$

B. 线段 PA 的长为 $\frac{\sqrt{10}}{3}$

C. 点 P 的轨迹长为 $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$

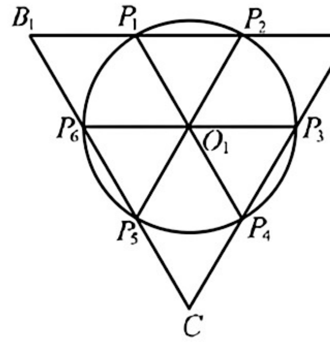
D. $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的最大值为 $\frac{5}{9}$



解: 在正方体中，$AC_1\perp$平面 B_1CD_1，平面 B_1CD_1 // 平面 A_1BD，

且两平面间的距离为 $\frac{1}{3}|AC_1|=\frac{\sqrt{3}}{3}$，又 $\triangle A_1BD$ 的面积 $S_{\triangle A_1BD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴三棱锥 $P-A_1BD$ 的体积

$V_{P-A_1BD}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{6}$，A 正确；



设$\triangle B_1CD_1$的中心为O_1，则$O_1C_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$AO_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

$PO_1=\sqrt{PC_1^2-O_1C_1^2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$，$PA=\sqrt{AO_1^2+PO_1^2}=\frac{\sqrt{14}}{3}$，B 错误；

如图，由$P_1O_1=P_2O_1=P_1P_2=\frac{\sqrt{2}}{3}$知，$\angle P_1O_1P_2=60^\circ$，点$P$的轨迹是以$O_1$为圆心，$\frac{\sqrt{2}}{3}$为半径的圆的一部分，由三段$P_1P_6,P_2P_3,P_4P_5$劣弧构成，其长度为圆$O_1$周长的一半$\frac{1}{2}\times2\pi\times\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$，C 正确；

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AP}^2-\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{14}{9}-\sqrt{2}\,|\overrightarrow{AP}|\cos\angle PAC$，$|\overrightarrow{AP}|\cos\angle PAC$为$\overrightarrow{AP}$在$\overrightarrow{AC}$方向上的投影，由图可知，当$P$位于点$P_1$或$P_2$的位置时，$|\overrightarrow{AP}|\cos\angle PAC$最小，此时$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$取得最大值，

如图所示，建立空间直角坐标系，则$C(1,1,0),P_1(\frac{2}{3},\frac{1}{3},1),P_2(\frac{1}{3},\frac{2}{3},1)$，

$\overrightarrow{P_1A}\cdot\overrightarrow{P_1C}=(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-1)\cdot(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-1)=\frac{5}{9}$，D 正确.

故选 ACD.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．其中第 14 题第 1 问 2 分，第 2 问 3 分.

12. 若集合$A=\{x|\log_3(x-1)<1\}$，$B=\{x|1\leqslant x<2\}$，则$A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=$ $\underline{\{x|2\leqslant x<4\}}$.

解:$\because\log_3(x-1)<1$，$\therefore 0<x-1<3$，$1<x<4$，$\therefore A=\{x|1<x<4\}$. 又$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|x<1或x\geqslant2\}$，

故$A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x|2\leqslant x<4\}$.

13. 已知函数$f(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{4})$（$\omega>0$）在区间$(0,\pi)$上有且仅有三个零点，则$\omega$的取值范围是$\underline{(\frac{9}{4},\frac{13}{4}]}$.

解：令$t=\omega x-\frac{\pi}{4}$，$\because x\in(0,\pi)$，$\therefore t\in(-\frac{\pi}{4},\omega\pi-\frac{\pi}{4})$，问题转化为函数$y=\sin t$在区间$(-\frac{\pi}{4},\omega\pi-\frac{\pi}{4})$上有且仅有三个零点，$\therefore 2\pi<\omega\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant3\pi$，解得$\frac{9}{4}<\omega\leqslant\frac{13}{4}$.

14. 某儿童游乐场有一台打地鼠游戏机，共有 9 个洞. 游戏开始后，每次有且仅有一只地鼠从某洞中冒出，地鼠第 1 次从 1 号洞冒出来. 假设游戏过程中地鼠从上一个洞继续冒出的概率为$\frac{1}{5}$，从其它洞冒出的可能性相等，则地鼠第 3 次从 1 号洞冒出的概率是$\underline{\frac{3}{25}}$. 假设游戏结束时，地鼠一共冒出n次，则地鼠从 1 号洞冒出的次数期望值为$\underline{\frac{n}{9}+\frac{80}{81}(1-\frac{1}{10^n})}$.

解:令p_n表示地鼠第n次从 1 号洞冒出的概率，则$p_1=1$，$p_2=\frac{1}{5}$. 当地鼠第 2 次从 1 号洞冒出时，第 3

次从 1 号洞冒出的概率为$\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$；当地鼠第 2 次没有从 1 号洞冒出时，第 3 次从 1 号洞冒出的概率为$\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{8}=\frac{2}{25}$，$\therefore p_3=\frac{1}{25}+\frac{2}{25}=\frac{3}{25}$.

同理可得: $p_n=p_{n-1}\times\frac{1}{5}+(1-p_{n-1})\times\frac{1}{10}=\frac{1}{10}p_{n-1}+\frac{1}{10}$，$\therefore p_n-\frac{1}{9}=\frac{1}{10}(p_{n-1}-\frac{1}{9})$，

$\therefore \{p_n-\frac{1}{9}\}$是以$\frac{8}{9}$为首项，$\frac{1}{10}$为公比的等比数列，$\therefore p_n-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}\times(\frac{1}{10})^{n-1}$，$p_n=\frac{1}{9}+\frac{8}{9}\times(\frac{1}{10})^{n-1}$. 游戏结束时，地鼠一共冒出 n 次，则地鼠从 1 号洞冒出的次数期望值为 $p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}+p_n=\frac{n}{9}+\frac{80}{81}(1-\frac{1}{10^n})$.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）

车胎凹槽深度是影响汽车刹车的因素，汽车行驶会导致轮胎胎面磨损. 某实验室通过实验测得轿车行驶里程与某品牌轮胎凹槽深度的数据，如下表所示：

行驶里程 x/万 km	0.0	0.4	1.0	1.6	2.4	2.8	3.4	4.4
轮胎凹槽深度 h/mm	8.0	7.8	7.2	6.2	5.6	4.8	4.4	4.0

$\sum_{i=1}^{8}x_ih_i=79.68$，$\sum_{i=1}^{8}(x_i-\overline{x})^2=16.24$，$\sqrt{\sum_{i=1}^{8}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{8}(h_i-\overline{h})^2}\approx 16.56$.

(1) 求该品牌轮胎凹槽深度 h 与行驶里程 x 的相关系数 r，并判断二者之间是否具有很强的线性相关性；(结果保留两位有效数字)

(2) 根据我国国家标准规定：轿车轮胎凹槽安全深度为 1.6mm（当凹槽深度低于 1.6mm 时刹车距离增大，驾驶风险增加，必须更换新轮胎）. 某人在保养汽车时将小轿车的轮胎全部更换成了该品牌的新轮胎，请问在正常行驶情况下，更换新轮胎后继续行驶约多少公里需对轮胎再次更换？

附: 变量 x 与 y 的样本相关系数 $r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$；对于一组数据 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，……，(x_n,y_n)，其线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

解: (1) 计算得 $\overline{x}=\frac{16}{8}=2$，$\overline{h}=\frac{48}{8}=6$…………2 分

由公式知，$r=\dfrac{\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})(h_i-\bar{h})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{8}(h_i-\bar{h})^2}}=\dfrac{\sum_{i=1}^{8}x_ih_i-8\bar{x}\bar{h}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{8}(h_i-\bar{h})^2}}\approx\dfrac{79.68-8\times2\times6}{16.56}$

≈ -0.99…………4 分

$\therefore$ 二者之间具有很强的线性关系…………5 分

(2) 设轮胎凹槽深度 h 与行驶里程 x 的线性回归方程为 $\hat{h}=\hat{a}+\hat{b}x$，

则 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})(h_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_ih_i-8\bar{x}\bar{h}}{\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})^2}=-\dfrac{16.32}{16.24}\approx-1$…………7 分

$a=\bar{h}-\hat{b}\bar{x}=6+1\times2=8$…………9 分

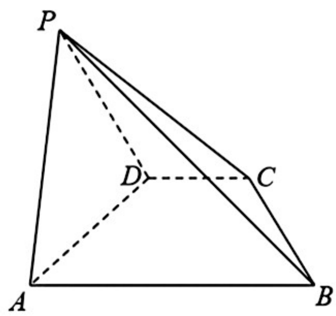
$\therefore$ 线性回归方程为 $h=8-x$…………10 分

令 $h=1.6$，得 $x=6.4$…………12 分

即更换新轮胎后继续行驶约 6.4 万公里需要对轮胎再次更换…………13 分

16.（本小题满分 15 分）

如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为直角梯形，$AB//CD$，$AB\perp BC$，$\angle BAD=\dfrac{\pi}{3}$，$AB=AD$，$\triangle PAD$ 为等边三角形.



(1) 证明：$PB\perp AD$；

(2) 若二面角 $P-AD-B$ 的大小为 $\dfrac{2\pi}{3}$，求二面角 $A-PB-C$ 的正弦值.

解：(1) 取 AD 的中点 O，连接线段 PO，BO，BD………1 分

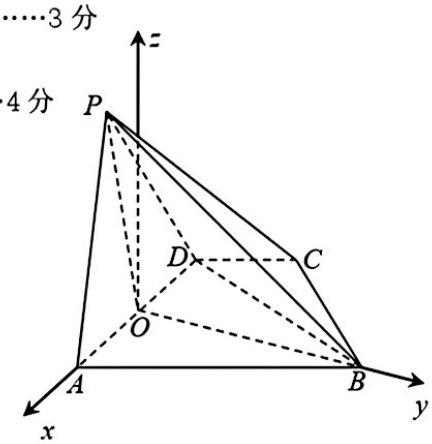
$\because PA=PD$，$\therefore AD\perp PO$………2 分

$\because AB=AD$，$\angle BAD=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore\triangle ABD$ 为等边三角形，$AD\perp BO$………3 分

又 $PO\cap BO=O$，$PO,BO\subseteq$ 平面 POB，$\therefore AD\perp$ 平面 POB………4 分

又 $PB\subseteq$ 平面 POB，$\therefore PB\perp AD$………5 分

(2) 如图，以 O 为坐标原点，建立空间直角坐标系………6 分



不妨设 $AB=2$，则 $|PO|=|BO|=\sqrt{3}$，

由 (1) 知 $\angle POB$ 为二面角的平面角，即 $\angle POB=\dfrac{2\pi}{3}$………8 分

故 $A(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$P(0,-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2})$，$C(-\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},0)$………9 分

设平面 PBA 的法向量为 $\overrightarrow{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\because\overrightarrow{PB}=(0,\dfrac{3\sqrt{3}}{2},-\dfrac{3}{2})$，$\overrightarrow{AB}=(-1,\sqrt{3},0)$，

$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{PB}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}y_1-\dfrac{3}{2}z_1=0,\\ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{AB}=-x_1+\sqrt{3}y_1=0,\end{cases}$ 不妨取 $y_1=1$，得 $\overrightarrow{m}=(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$ ………11 分

设平面 PBC 的法向量为 $\overrightarrow{n}=(x_2,y_2,z_2)$，$\because\overrightarrow{CB}=(\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},0)$，$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{PB}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}y_2-\dfrac{3}{2}z_2=0,\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{CB}=\dfrac{3}{2}x_2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y_2=0,\end{cases}$

不妨取 $x_2=1$，得 $\overrightarrow{n}=(1,-\sqrt{3},-3)$ ………13 分

设二面角 $A-PB-C$ 的平面角为 θ，则 $|\cos\theta|=\dfrac{|\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{m}|\cdot|\overrightarrow{n}|}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}$ ………14 分

$\therefore\sin\theta=\dfrac{8\sqrt{91}}{91}$，即二面角 $A-PB-C$ 的正弦值为 $\dfrac{8\sqrt{91}}{91}$ ………15 分

17.（本小题满分 15 分）

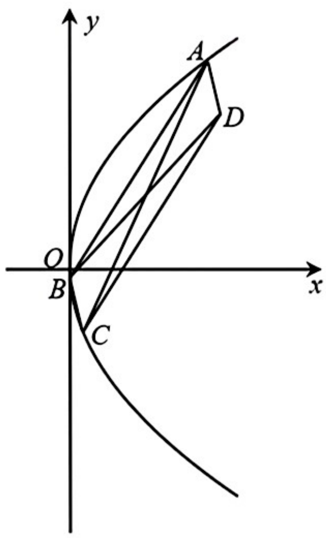
在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $E:y^2=2px$（$p>0$）的焦点为 F，A 是 E 上第一象限内的动点.

当直线 AF 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 时，$|AF|=4$.

(1) 求 E 的方程；

(2) 已知点 $D(2,2)$，B,C 是 E 上不同两点. 若四边形 $ABCD$ 是平行四边形，证明：直线 AC 过定点.

解: (1) 过点 A 作 x 轴的垂线，垂足为 H_1，作准线的垂线，垂足为 H_2，



由抛物线定义，得 $|AH_2|=|AF|=4$ ………2 分

$\because$ 直线 AF 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore|FH_1|=2$，又 $|AH_2|=p+2$，

$\therefore p+2=4$，$p=2$ ………5 分

故 E 的方程为 $y^2=4x$ ………6 分

(2) 设直线 AC 方程为 $x=my+n$.

联立方程组 $\begin{cases}y^2=4x,\\ x=my+n,\end{cases}$ 消去 x 整理得 $y^2-4my-4n=0$ …………8 分

设 $A(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，$B(x_0,y_0)$，则 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4n$ …………10 分

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore x_0=x_1+x_2-2=m(y_1+y_2)+2n-2=4m^2+2n-2$，

$y_0=y_1+y_2-2=4m-2$，即 $B(4m^2+2n-2,4m-2)$ …………12 分

代入 $y^2=4x$ 中，得 $(4m-2)^2=4(4m^2+2n-2)$，即 $n=\dfrac{3}{2}-2m$…………14 分

故直线 AC 过定点 $(\dfrac{3}{2},2)$…………15 分

18.（本小题满分 17 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{ax}+\mathrm{e}^{-ax}$（$a\in\mathbf{R}$，且 $a\neq 0$）.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若方程 $f(x)=x+x^{-1}$ 有三个不同的实数解，求 a 的取值范围.

解: (1) 解法一：$f'(x)=a(\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^{-ax})$………1 分

令 $g(x)=a(\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^{-ax})$，则 $g'(x)=a^2(\mathrm{e}^{ax}+\mathrm{e}^{-ax})>0$………2 分

$\therefore g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增………3 分

又 $g(0)=0$，$\therefore$ 当 $x<0$ 时，$g(x)<0$，即 $f'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$

…………5 分

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增…………6 分

解法二：$f'(x)=a(\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^{-ax})=\dfrac{a(\mathrm{e}^{ax}+1)(\mathrm{e}^{ax}-1)}{\mathrm{e}^{ax}}$………1 分

①当 $a>0$ 时，由 $f'(x)<0$ 得 $x<0$，由 $f'(x)>0$ 得 $x>0$ ………2 分

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增………3 分

②当 $a<0$ 时，同理可得 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增………5 分

综上，当 $a\neq 0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增………6 分

(2) 解法一：由 $f(x)=x+x^{-1}$，得 $\mathrm{e}^{ax}+\mathrm{e}^{-ax}=x+x^{-1}$，易得 $x>0$ ………7 分

令 $h(x)=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}$，则 $h(ax)=h(\ln x)$ ………8 分

又 $\because h(x)=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}$ 为偶函数，$\therefore h(|ax|)=h(|\ln x|)$ ………9 分

由 (1) 知 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore |ax|=|\ln x|$，即 $\left|\dfrac{\ln x}{x}\right|=|a|$ 有三个不同的实数解………11 分

令 $m(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$m'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，由 $m'(x)>0$，得 $0<x<\mathrm{e}$；由 $m'(x)<0$，得 $x>\mathrm{e}$，

$\therefore m(x)$ 在 $(0,\mathrm{e}]$ 上单调递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减，且 $m(1)=0$，$m(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$………13 分

$\therefore y=|m(x)|$ 在 $(0,1]$ 上单调递减，在 $(1,\mathrm{e}]$ 上单调递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减………15 分

当 $x\to 0$ 时，$m(x)\to+\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$m(x)\to 0$，故 $0<|a|<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$…………16 分

解得 $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}<a<0$ 或 $0<a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，故 a 的取值范围是 $(-\dfrac{1}{\mathrm{e}},0)\cup(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}})$…………17 分

解法二：由 $f(x)=x+x^{-1}$ 得 $\mathrm{e}^{ax}+\mathrm{e}^{-ax}=x+x^{-1}$，易得 $x>0$………7 分

令 $h(x)=x+x^{-1}$，则 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

由 $h(\mathrm{e}^{ax})=h(x)$，得 $\mathrm{e}^{ax}=x$ 或 $\mathrm{e}^{ax}=x^{-1}$………9 分

两边同时取以 e 为底的对数，得 $ax=\ln x$ 或 $ax=-\ln x$，

$\therefore |ax|=|\ln x|$，即 $\left|\dfrac{\ln x}{x}\right|=|a|$ 有三个不同的实数解………11 分

下同解法一.

19.（本小题满分 17 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 共有 m（$m\geqslant 2$）项，且 $a_n\in\mathbf{Z}$，若满足 $|a_{n+1}-a_n|\leqslant 1$（$1\leqslant n\leqslant m-1$），则称 $\{a_n\}$ 为“约束数列”. 记“约束数列” $\{a_n\}$ 的所有项的和为 S_m.

(1) 当 $m=5$ 时，写出所有满足 $a_1=a_5=1$，$S_5=6$ 的“约束数列”；

(2) 当 $m=2000$，$a_1=25$ 时，设 p：$a_{2000}=2024$；q：“约束数列” $\{a_n\}$ 为等差数列. 请判断 p 是 q 的什么条件，并说明理由；

(3) 当 $a_1=1$，$a_{2k}=0$（$1\leqslant k\leqslant\dfrac{m}{2},k\in\mathbf{N}_+$）时，求 $|S_m|$ 的最大值.

解: (1) 当 $m=5$ 时，所有满足 $a_1=a_5=1$，$S_5=6$ 的“约束数列”有：

①1，1，2，1，1；②1，1，1，2，1；③1，2，1，1，1. ………4 分

(2) p 是 q 的充分不必要条件………5 分

①当 $a_{2000}=2024$ 时，$\because |a_{n-1}-a_n|\leqslant 1$（$n=1,2,\cdots,1999$），$\therefore a_{n+1}-a_n\leqslant 1$.

则 $a_{2000}=(a_{2000}-a_{1999})+(a_{1999}-a_{1998})+(a_{1998}-a_{1997})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1\leqslant 1999+a_1=2024$

………6 分

当且仅当 $a_{2000}-a_{1999}=a_{1999}-a_{1998}=a_{1998}-a_{1997}=\cdots=a_2-a_1=1$ 时，$a_{2000}=2024$ 成立………7 分

$\therefore$ “约束数列” $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列………8 分

②当“约束数列” $\{a_n\}$ 是等差数列时，由 $|a_{n+1}-a_n|\leqslant 1$，得 $a_{n+1}-a_n=1$，或 $a_{n+1}-a_n=0$，或 $a_{n+1}-a_n=-1$

………9 分

若 $a_{n+1}-a_n=0$，则 $\{a_n\}$ 的公差为 0，$\therefore a_{2000}=a_1=25$；

若 $a_{n+1}-a_n=-1$，则 $\{a_n\}$ 的公差为 -1，$\therefore a_{2000}=a_1-1999=-1974$；

若 $a_{n+1}-a_n=1$，则 $\{a_n\}$ 的公差为 1，$\therefore a_{2000}=a_1+1999=2024$………10 分

即当“约束数列”$\{a_n\}$ 是等差数列时，$a_{2000}=25$ 或 -1974 或 2024．

由①②，得 p 是 q 的充分不必要条件………11 分

(3) $\because a_1=1$，$a_{2k}=0$，$\therefore$ 要使得 $|S_m|$ 取最大值，则 $a_n\geqslant 0$………12 分

当且仅当同时满足以下三个条件时，$|S_m|$ 取最大值.

①当 $2\leqslant n\leqslant k$ 时，$a_n-a_{n-1}=1$；②当 $k+1\leqslant n\leqslant 2k$ 时，$a_n-a_{n-1}=-1$；③当 $2k+1\leqslant n\leqslant m$ 时，

$a_n-a_{n-1}=1$………15 分

$$\therefore |S_m|_{\max}=[\frac{k(1+k)}{2}\times 2-k]+[0\times(m-2k+1)+\frac{(m-2k+1)(m-2k)}{2}\times 1]$$
$$=k^2+\frac{(m-2k)(m-2k+1)}{2}$$ ………17 分