2024年普通高等学校招生全国统一考试(模拟)

数　学

2024.5

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的考生号、姓名、考点学校、考场号及座位号填写在答题卡上。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需要改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知i为虚数单位，$(1-i)^2\cdot z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，则$|z|=$

A.$\frac{1}{4}$　　B.$\frac{1}{2}$　　C.$\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

2.若$A=\{x\in\mathbf{Z}|\frac{x-2}{8-x}\leqslant 0\}$，$B=\{x|\log_5 x<1\}$，则$A\cap B$的元素个数为

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

3.一组数据按从小到大的顺序排列为1，4，m，12，14，21，若该组数据的中位数是极差的$\frac{2}{5}$，则该组数据的第45百分位数是

A.4　　B.6　　C.8　　D.12

4.若有2名女生和4名男生到“山东旅发”大会的两个志愿服务站参加服务活动，分配时每个服务站均要求既有女生又有男生，则不同的分配方案种数为

A.16　　B.20　　C.28　　D.40

5.已知函数$f(x)=\sin(2x+\varphi)$（$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）图象的一个对称中心为$(\frac{\pi}{6},0)$，则

A.$f(x)$在区间$[-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{3}]$上单调递增

B.$x=\frac{5\pi}{6}$是$f(x)$图象的一条对称轴

C.$f(x)$在$[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$上的值域为$[-1,\frac{\sqrt{3}}{2}]$

D.将$f(x)$图象上的所有点向左平移$\frac{5\pi}{12}$个长度单位后，得到的函数图象关于y轴对称

6.若实数 a,b,c 满足 $a=2\sin\frac{\pi}{12},b^3=7,3^c=10$,则

A.$a<b<c$　　B.$b<c<a$　　C.$a<c<b$　　D.$b<a<c$

7.已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,M,N 分别为 CC_1,C_1D 的中点,则

A.直线 MN 与 A_1C 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$

B.平面 BMN 与平面 BC_1D_1 夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{10}$

C.在 BC_1 上存在点 Q,使得 $B_1Q\perp BD_1$

D.在 B_1D 上存在点 P,使得 PA∥平面 BMN

8.椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2,P 为椭圆上第一象限内的一点,且 $PF_1\perp PF_2,PF_1$ 与 y 轴相交于点 Q,离心率 $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$,若$\overrightarrow{QF_1}=\lambda\overrightarrow{PF_1}$,则 $\lambda=$

A.$\frac{3}{8}$　　B.$\frac{5}{8}$　　C.$\frac{1}{3}$　　D.$\frac{2}{3}$

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分。

9.已知$\{a_n\}$是等差数列,S_n 是其前 n 项和,则下列命题为真命题的是

A.若 $a_3+a_4=9,a_7+a_8=18$,则 $a_1+a_2=5$

B.若 $a_2+a_{13}=4$,则 $S_{14}=28$

C.若 $S_{15}<0$,则 $S_7>S_8$

D.若$\{a_n\}$和$\{a_n\cdot a_{n+1}\}$都为递增数列,则 $a_n>0$

10.设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$是抛物线 $C:x^2=8y$ 上两个不同的点,以 A,B 为切点的切线交于点 $P(x_0,y_0)$.若弦 AB 过焦点 F,则

A.$x_1+x_2=2x_0$

B.若 PA 的方程为 $x-2y-1=0$,则 $x_2=-4$

C.点 P 始终满足$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$

D.$\triangle PAB$ 面积的最小值为 16

11.已知定义在 R 上的函数 $f(x)$满足 $f(x+1)+f(x+3)=f(2024)$,$f(-x)=f(x+2)$,且 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$,则

A. $f(x)$的最小正周期为 4　　B. $f(2)=0$

C. 函数 $f(x-1)$是奇函数　　D.$\sum_{k=1}^{2024}k\cdot f(k-\frac{1}{2})=-2024$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分。

12. $(1+\frac{1}{x^3})(1+x)^7$ 展开式中 x^2 项的系数为________.

13. 若直线 $y=ax+1$ 与曲线 $y=b+\ln x$ 相切，则 ab 的取值范围为________.

14. 根据统计数据，某种植物感染病毒之后，其存活日数 X 满足：对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，$X=n+1$ 的样本在 $X>n$ 的样本里的数量占比与 $X=1$ 的样本在全体样本中的数量占比相同，均等于 $\frac{1}{5}$，即 $P(X=n+1\mid X>n)=P(X=1)=\frac{1}{5}$，则 $P(X>n)=$________，设 $a_n=nP(X=n)$，$\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_n=$________.

四、解答题：本题共5小题，共77分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（13分）

在△ABC 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，已知 $c\cos(A-B)=2\sqrt{3}a\sin B\cos C-c\cos C$.

（1）求 C；

（2）若点 D 在线段 AB 上，且 $BD=2DA$，求 $\frac{CD^2}{2a^2+5b^2}$ 的最大值.

16.（15分）

“赶大集”出圈彰显了传统民俗的独特魅力.为了解年轻人对“赶大集”的态度，随机调查了200位年轻人，得到的统计数据如下面的不完整的2×2列联表所示（单位：人）.

	非常喜欢	感觉一般	合计
男性	$3t$		100
女性		t	
合计		60	

（1）求 t 的值，试根据小概率 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，能否认为年轻人对“赶大集”的态度与性别有关；

（2）从样本中筛选出5名男性和3名女性共8人作为代表，这8名代表中有2名男性和2名女性非常喜欢“赶大集”.现从这8名代表中任选3名男性和2名女性进一步交流，记 X 为这5人中非常喜欢“赶大集”的人数，求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$.

参考公式：$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

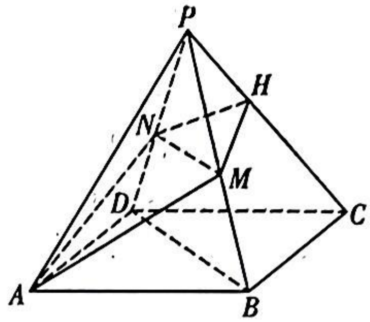
α	0.1	0.05	0.01	…
x_α	2.706	3.841	6.635	…

17.(15分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为菱形,$\angle BAD=60°$,$BD//$平面 $AMHN$,点 M,N,H 分别在棱 PB,PD,PC 上,且 $MN\perp PC$.

(1)证明:$PB=PD$;

(2)若 H 为 PC 的中点,$PA=PC$,PA 与平面 PBD 所成角为 $60°$,四棱锥 $P-ABCD$ 被平面 $AMHN$ 截为两部分,记四棱锥 $P-AMHN$ 体积为 V_1,另一部分体积为 V_2,求$\frac{V_1}{V_2}$.



18.(17分)

已知向量 $\boldsymbol{a}=(0,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,0)$,点 $P(1,0)$,$Q(-1,0)$,直线 PD,QD 的方向向量分别为 $2\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$2\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$,其中 $\lambda\in\mathbf{R}$,记动点 D 的轨迹为 E.

(1)求 E 的方程;

(2)直线 l 与 E 相交于 A,B 两点,

i)若 l 过原点,点 C 为 E 上异于 A,B 的一点,且直线 AC,BC 的斜率 k_{AC},k_{BC} 均存在,求证:$k_{AC}\cdot k_{BC}$ 为定值;

ii)若 l 与圆 $O:x^2+y^2=r^2$ 相切,点 N 为 AB 的中点,且 $|AB|=2|ON|$,试确定圆 O 的半径 r.

19.(17分)

已知函数 $f(x)=\ln(ax)+(a-1)x-e^x$.

(1)当 $a=1$ 时,求证:$f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0,且 $f(x_0)<-2$;

(2)若 $f(x)$ 存在两个零点,记较小的零点为 x_1,t 是关于 x 的方程 $\ln(1+x)+3=2ax_1+\cos x$ 的根,证明:$e^t+1>2e^{x_1}$.