咸阳市2024年高考模拟检测（二）

数学（理科）试题

注意事项：

1．本试题共4页，满分150分，时间120分钟

2．答卷前，考生务必将答题卡上密封线内的各项目填写清楚

3．回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号，回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

4．考试结束后，监考员将答题卡按顺序收回，装袋整理；试题不回收。

第Ⅰ卷（选择题　共60分）

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符题目要求的。

1．若复数z满足$(1-\mathrm{i})z=3+4\mathrm{i}$，则复数$z$的共轭复数的虚部为（　　）

A．$-\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{7}{2}$　　C．$\dfrac{7}{2}\mathrm{i}$　　D．$-\dfrac{7}{2}$

2．已知集合$A=\left\{x\middle|\dfrac{x+1}{5-x}\geq 0\right\}, B=\left\{x\middle|y=\log_2\left(x^2-16\right)\right\}$，则$A\cap\left(\complement_{R}B\right)=$（　　）

A．$(-1,4)$　　B．$[-1,4]$　　C．$(-1,5]$　　D．$(4,5)$

3．已知在边长为1的菱形$ABCD$中，角A为$60°$，若点E为线段CD的中点，财$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EB}=$（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\dfrac{3}{4}$　　C．$-\dfrac{3}{4}$　　D．$-\dfrac{3}{2}$

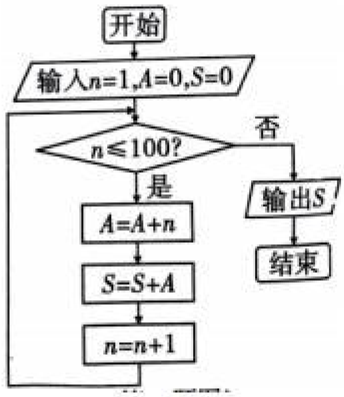
4．已知角α的始边为x轴的非负半轴，顶点为坐标原点，若它的终边经过点$P(1,-2)$，则$\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=$（　　）

A．$\dfrac{1}{5}$　　B．$-\dfrac{9}{5}$　　C．$-\dfrac{7}{5}$　　D．$-\dfrac{1}{5}$

5．已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_4=2, S_8=12$，则$S_{20}=$（　　）

A．30　　B．58　　C．60　　D．90

6．执行下侧的程序框图，则输出的结果是（　　）



A．5050　　B．4950　　C．166650　　D．171700

7．已知平面区域Ω中的点满足$\left[\left(\sqrt{2}+1\right)x-y\right]\left[x-\left(\sqrt{2}+1\right)y\right]<0$，若在圆面$x^2+y^2\le 2$中任取一点$P$，则该点取自区域$\Omega$的概率为（　　）

A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{1}{4}$　　C．$\dfrac{1}{6}$　　D．$\dfrac{1}{7}$

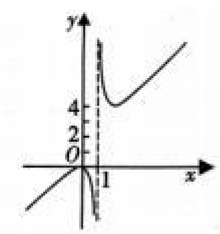
8．当函数$y=3\sin x+4\cos x$取得最小值时，$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=$（　　）

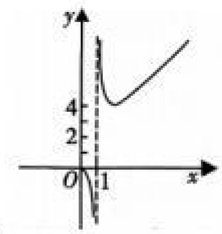
A．$-\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$　　B．$-\dfrac{3+4\sqrt{3}}{10}$　　C．$\dfrac{3+4\sqrt{3}}{10}$　　D．$\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$

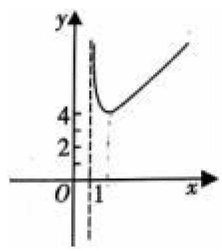
9．为了强化学生安全意识，落实"12530"安全教育，某学校让学生用这5个数字再加一个0来设定自己教室储物柜密码，若两个0之间至少有一个数字，且两0不都在首末两位，可以设置的密码共有（　　）

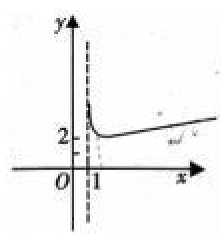
A．72　　B．120　　C．216　　D．240

10．若将$\ln y=\ln x+\ln(y-x)$确定的两个变量y与x之间的关系看成$y=f(x)$，则函数$f(x)$的大致图象为（　　）

A．

B．

C．

D．

11．已知点F为双曲线$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$的右焦点，过点$F$的直线$l$（斜率为$k$）交双曲线右支于$M,N$两点，若线段$MN$的中垂线交$x$轴于一点$P$，则$\dfrac{|MN|}{|PF|}=$（　　）

A．$\dfrac{5}{4}$　　B．$\dfrac{5}{8}$　　C．$\dfrac{4}{5}$　　D．$\dfrac{8}{5}$

12．已知函数$f(x)=2\cos^2\dfrac{x}{2}+\dfrac{a}{2}x^2$，若$x=0$是函数$f(x)$的唯一极小值点，则$a$的取值范围为（　　）

A. $[1,+\infty)$　　B. $(0,1)$　　C. $[-1,+\infty)$　　D. $(-\infty,1]$

第Ⅱ卷（非选择题　共90分）

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知总体的各个个体的值由小到大依次为$2,4,4,6,a,b,12,14,18,20$，且总体的平均值为10，则$\frac{4}{a}+\frac{9}{b}$的最小值为________。

14. P为抛物线$y^2=4x$上任意一点，点$A(2,4)$，设点P到y轴的距离为d，则$|PA|+d$的最小值为________。

15. 已知a,b,c分别为$\triangle ABC$三个内角A,B,C所对的边，若$a=b\cos C+\sqrt{3}c\sin B$，设点$D$为边$AC$的中点，且$BD=AC=4$，则$S_{\triangle ABC}=$________。

16. 已知三棱锥$D-ABC$中，$AB=4,AC=3,BC=5$，三角形DBC为正三角形，若二面角$D-BC-A$为120°，则该三棱锥的外接球的体积为________。

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22，23题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共60分。

17.（本小题满分12分）

已知正项数列$\{a_n\}$满足$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\frac{n(n+1)}{2}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$。

（1）若$b_n=a_{n+1}-a_n$，请判断并证明数列$\{b_n\}$的单调性；

（2）若$c_n=\left(\frac{1}{a_{n+1}a_n}\right)^2$，求数列$\{c_n\}$的前$n$项和$S_n$。

18.（本小题满分12分）

陕西省从2022年秋季启动新高考，新高考“$3+1+2$”模式中“3”为全国统一高考科目的语文、数学、外语，“1”为首选科目，要求从物理、历史2门科目中确定1门，“2”为再选科目，要求从思想政治、地理、化学、生物学4门科目中确定2门，共计产生12种组合。某班有学生50名，在选科时，首选科目选历史和物理的统计数据如下表所示：

	历史	物理	合计
男生	2	23	25
女生	8	17	25
合计	10	40	50

附：$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$。

α	0.100	0.050	0.010	0.005	0.001
χ_{α}	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

（1）根据表中的数据，判断是否有99%的把握认为学生选择历史与性别有关；

（2）从选择历史的10名学生中任意抽取3名同学参加学校"铭记历史，强国有我"演讲比赛，设X为抽取的三名学生中女生的人数，求X的分布列，并求数学期望和方差。

19.（本小题满分12分）

在几何体中，底面ABC是边长为2的正三角形。$AE\perp$平面ABC，若$AE \parallel CD \parallel BF, AE=5, CD=4, BF=3$。

（1）求证：平面$DEF\perp$平面$AEFB$；

（2）是否在线段AE上存在一点P，使得二面角$P-DF-E$的大小为$\frac{\pi}{3}$。若存在，求出AP的长度，若不存在，请说明理由。

20.（本小题满分12分）

已知两圆$C_1:(x-1)^2+y^2=25, C_2:(x+1)^2+y^2=1$，动圆$C$在圆$C_1$的内部，且与圆$C_1$相内切，与圆$C_2$相外切。

（1）求点C的轨迹方程；

（2）设点$M(-1,0), N(1,0)$，过点M的直线交C于P,Q两点，求$\triangle PQN$的内切圆面积的最大值。

21.（本小题满分12分）

已知函数$f(x)=ae^{x-1}-x+\ln a$。

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）若$f(x)\geq \ln x-x+1$，求a的取值范围。

（二）选考题：共10分，考生从22，23题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（本小题满分10分）【选修4-4：坐标系与参数方程】

在平面直角坐标系xOy中，直线l的参数方程为$\begin{cases} x=t\cos\alpha, \\ y=1+t\sin\alpha \end{cases}$（$t$为参数），以坐标原点$O$为极原点，$x$轴正半轴为极轴，建立极坐标系。曲线$C$的极坐标方程为$\rho^2-2\rho\cos\theta=3$。

（1）求曲线C的直角坐标方程和直线l的一般方程；

（2）设直线l与曲线C交于A,B两点，求$\triangle ABC$面积的最大值。

23.（本小题满分10分）【选修4-5：不等式选讲】

已知函数$f(x)=|2x+1|+|3x-3|$。

（1）解不等式 $f(x)>5$；

（2）设函数 $g(x)=-3x^2+12x+m$，若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象无公共点，求参数 m 的取值范围。

咸阳市 2024 年高考模拟检测（二）

数学（理科）试题参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

1．D　2．B　3．C　4．C　5．D　6．D　7．B　8．A　9．C　10．C　11．D　12．A

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．$\frac{5}{4}$　14．$\sqrt{17}-1$　15．$2\sqrt{3}$　16．$\frac{1625\sqrt{13}}{162}\pi$

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答，第 22，23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17．解：（1）因为 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\frac{n(n+1)}{2}(n\in\mathrm{N}^*)$，①

当 $n=1$ 时，$a_1^2=1$；

当 $n\geq 2$ 时，$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2=\frac{n(n-1)}{2}$，②

①-②得：$a_n^2=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n-1)}{2}=n(n\geq 2)$，

又 $n=1$ 时，$a_n^2=1=a_1^2$，

又 $a_n>0$，所以 $a_n=\sqrt{n}$，

则 $b_n=a_{n+1}-a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，

又 $b_{n+1}-b_n=\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)-\left(\sqrt{n+1}\right)-\sqrt{n}\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}<0$。

所以，数列$\{b_n\}$是单调递减数列。（9分）

（2）由（1）知$c_n=\left(\dfrac{1}{a_{n+1}a_n}\right)^2=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，

则$S_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$=1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$.（12分）

18．解：（1）将表中的数据带入，得到

$$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{50\times(2\times17-8\times23)^2}{25\times25\times10\times40}=4.5<6.635,$$

所以没有99%的把握认为学生选择历史与性别有关。（5分）

（2）由题意知，X的可能取值为$1,2,3$，

则$P(X=1)=\dfrac{C_2^2\times C_8^1}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{15}, P(X=2)=\dfrac{C_2^1\times C_8^2}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{15}, P(X=3)=\dfrac{C_8^3}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{15}$，

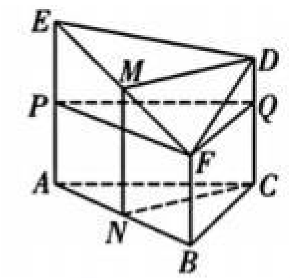
所以分布列为：

X	1	2	3
P	$\dfrac{1}{15}$	$\dfrac{7}{15}$	$\dfrac{7}{15}$

则数学期望$E(X)=1\times\dfrac{1}{15}+2\times\dfrac{7}{15}+3\times\dfrac{7}{15}=\dfrac{12}{5}$，

方差$D(X)=\left(1-\dfrac{12}{5}\right)^2\times\dfrac{1}{15}+\left(2-\dfrac{12}{5}\right)^2\times\dfrac{7}{15}+\left(3-\dfrac{12}{5}\right)^2\times\dfrac{7}{15}=\dfrac{28}{75}$.（12分）

19．解：（1）证明：如图，设M,N分别为EF,AB边的中点，连接MN,DM,CN，



因为$AE\perp$平面$ABC, AE\parallel CD\parallel BF, AE=5, CD=4, BF=3$，

所以$MN=4=CD$，且$MN\parallel CD$，

即四边形$CNMD$为平行四边形，可得$MD\parallel CN$，

在底面正三角形ABC中，N为AB边的中点，则$CN\perp AB$，

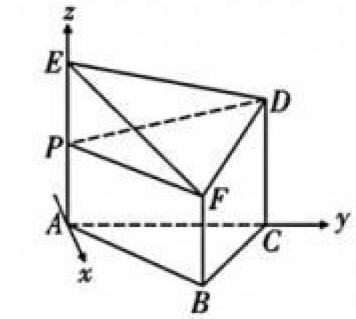
又$AE\perp$平面ABC，且CNÜ平面ABC，所以$AE\perp CN$。

由于 $AE\cap AB=A$，且 AE、AB Ü 平面 $ABFE$，所以 $CN\perp$ 平面 $ABFE$。

因为 $MD\parallel CN, CN\perp$ 平面 $ABFE$，则 $MD\perp$ 平面 $ABFE$，

又 MD Ü 平面 DEF，则平面 $DEF\perp$ 平面 $AEFB$。

（2）如图，以点 A 为坐标原点，建立空间直角坐标系，



则 $E(0,0,5), D(0,2,4), F\left(\sqrt{3},1,3\right)$。

设点 $P(0,0,t)$，则 $\overline{DF}=\left(\sqrt{3},-1,-1\right), \overline{DE}=(0,-2,1), \overline{DP}=(0,-2,t-4)$。

设平面 PDF 的法向量为 $n_1=(x_1,y_1,z_1)$，平面 EDF 的法向

量为 $n_2=(x_2,y_2,z_2)$。

由题意知 $\begin{cases} n_1\cdot\overline{DF}=0, \\ n_1\cdot\overline{DP}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \sqrt{3}x_1-y_1-z_1=0, \\ -2y_1+(t-4)z_1=0, \end{cases}$

令 $z_1=2$，则 $y_1=t-4, x_1=\dfrac{t-2}{\sqrt{3}}$，即 $n_1=\left(\dfrac{t-2}{\sqrt{3}}, t-4, 2\right)$，

同理可得：$n_2=\left(\sqrt{3},1,2\right)$，

由 $\cos\langle n_1,n_2\rangle=\dfrac{|n_1\cdot n_2|}{|n_1||n_2|}=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$，将 n_1, n_1 的坐标带入计算，

可得：$t=\pm3\sqrt{5}-4$，由于点 P 为线段 AE 上一点，故 $0\le t\le 5$，所以 $t=3\sqrt{5}-4$，

即存在点 P 满足，此时 $AP=3\sqrt{5}-4$.（12分）

20．解：（1）设点 $C(x,y)$ 为所求曲线轨迹上任意一点，

由题意知 $|CC_1|=5-r, |CC_2|=1+r$，其中 r 为圆 C 的半径，

则 $|CC_1|+|CC_2|=6>|C_1C_2|=2$，

由椭圆的定义知，点 C 是以 $(-1,0), (1,0)$ 为焦点，$a=3$ 的椭圆。

所以点 C 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.

（2）由题意知，直线 PQ 的斜率不为 0，故设直线 PQ 的方程为 $x=my-1$，

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1,\\ x=my-1,\end{cases}$ 消去 x 得 $\left(8m^2+9\right)y^2-16my-64=0$，

$\Delta=(-16m)^2+4\times64\times\left(8m^2+9\right)=2304\left(m^2+1\right)>0$,

设点 $P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$，则 $y_1+y_2=\frac{16m}{8m^2+9},y_1y_2=-\frac{64}{8m^2+9}$，

$S_{\triangle PNQ}=\frac{1}{2}|MN||y_1-y_2|=\sqrt{\left(y_1+y_2\right)^2-4y_1y_2}=\frac{48\sqrt{m^2+1}}{8m^2+9}$，

又 $\triangle PNQ$ 的周长 l 为 $4\times3=12$，

所以 $\triangle PNQ$ 的内切圆半径 $r=\frac{2S}{l}=\frac{8\sqrt{m^2+1}}{8m^2+9}=\frac{8}{8\sqrt{m^2+1}+\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}}$，

令 $t=\sqrt{m^2+1}$，则 $t\geq1$，

设函数 $f(t)=8t+\frac{1}{t}$，则 $f'(t)=8-\frac{1}{t^2}$，在 $[1,+\infty)$ 上 $f'(t)>0$，函数 $f(t)$ 单调递增，即 $f(t)\geq9$，

则 $r\leq\frac{8}{9}$，此时 $\triangle PNQ$ 的内切圆面积的最大值 $S_{\max}=\pi r^2=\frac{64}{81}\pi$。（12 分）

21．解：（1）因为 $f(x)=ae^{x-1}-x+\ln a$，定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $f'(x)=ae^{x-1}-1$，

因为 $a>0$，令 $f'(x)=ae^{x-1}-1=0$，解得 $x=1-\ln a$，

当 $x<1-\ln a$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,1-\ln a)$ 上单调递减；

当 $x>1-\ln a$ 时 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(1-\ln a,+\infty)$ 上单调递增；

综上：$f(x)$ 在 $(-\infty,1-\ln a)$ 上单调递减，$f(x)$ 在 $(1-\ln a,+\infty)$ 上单调递增。

（2）因为 $f(x)=ae^{x-1}-x+\ln a$，所以 $f(x)\geq\ln x-x+1$ 等价于

$e^{\ln a+x-1}+\ln a+x-1\geq\ln x+x=e^{\ln x}+\ln x$，

令 $g(x)=e^x+x$，上述不等式等价于 $g(\ln a+x-1)\geq g(\ln x)$，

显然$g(x)$为单调增函数，$\therefore$所求不等式等价于$\ln a+x-1\geq \ln x$，即$\ln a\geq 1+\ln x-x$，

令$h(x)=1+\ln x-x$，则$h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，

在$(0,1)$上$h'(x)>0,h(x)$单调递增；在$(1,+\infty)$上$h'(x)<0,h(x)$单调递减，

$\therefore h(x)_{\max}=h(1)=0$，

$\therefore \ln a\geq 0$，即$a\geq 1,\therefore a$的取值范围是$[1,+\infty)$。

（二）选考题：共10分，考生从22，23题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（本小题满分10分）【选修4-4：坐标系与参数方程】

解：（1）$\because$曲线C的极坐标方程为$\rho^2-2\rho\cos\theta=3$，

$\therefore$曲线C的直角坐标方程为$x^2+y^2-2x-3=0$，即$(x-1)^2+y^2=4$。（2分）

又$\because$直线l的参数方程为$\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$为参数），

$\therefore$直线l的一般方程为$\sin\alpha x-\cos\alpha y+\cos\alpha=0$。

（2）将直线l的参数方程$\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$为参数）带入$(x-1)^2+y^2=4$中，

得到$(t\cos\alpha-1)^2+(t\sin\alpha+1)^2=4$，

化简可以得到：$t^2+2\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)t-2=0$，

则$t_1+t_2=-2\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right),t_1t_2=-2<0$，

$$|AB|=|t_1|+|t_2|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{8\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+8}$$

$$=\sqrt{4\left[1-\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right]+8}=\sqrt{12-4\sin2\alpha}=2\sqrt{3-\sin2\alpha},$$

圆心C到直线l的距离$d=\sqrt{4-(3-\sin2\alpha)}=\sqrt{1+\sin2\alpha}$，

则$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d=\sqrt{3-\sin2\alpha}\sqrt{1+\sin2\alpha}\leq\frac{3-\sin2\alpha+1+\sin2\alpha}{2}=2$，

当且仅当$3-\sin2\alpha=1+\sin2\alpha$，即$\sin2\alpha=1$时取等号。

所以$\triangle ABC$的面积的最大值为 2。（10 分）

23.（本小题满分 10 分）【选修 4-5：不等式选讲】

解：（1） $f(x)=|2x+1|+|3x-3|=\begin{cases}2-5x, x\le -\dfrac{1}{2},\\ 4-x, -\dfrac{1}{2}<x<1,\\ 5x-2, x\ge 1,\end{cases}$

若$f(x)>5$，即$\begin{cases}x\le -\dfrac{1}{2},\\ 2-5x>5\end{cases}$ 或$\begin{cases}-\dfrac{1}{2}<x<1,\\ 4-x>5\end{cases}$ 或$\begin{cases}x\ge 1,\\ 5x-2>5,\end{cases}$

解之得：$x<-\dfrac{3}{5}$或$x>\dfrac{7}{5}$。

则原不等式的解集为$\left\{x \middle| x<-\dfrac{3}{5}或x>\dfrac{7}{5}\right\}$。（5 分）

（2）函数$g(x)=-3x^2+12x+m$，若函数$f(x)$与$g(x)$的图象无公共点，即

$f(x)=g(x)$在$[1,+\infty)$上无解，

可得：$3x^2-7x-m-2=0$在$[1,+\infty)$上无解，

即$m<\left(3x^2-7x-2\right)_{\min}, x\in[1,+\infty)$，

因为函数$y=3x^2-7x-2=3\left(x-\dfrac{7}{6}\right)^2-\dfrac{73}{12}$，当$x\in[1,+\infty), y_{\min}=-\dfrac{73}{12}$，

所以$m<-\dfrac{73}{12}$，即m的取值范围为$\left(-\infty,-\dfrac{73}{12}\right)$。（10 分）