高三数学考试

本试卷满分 150 分,考试用时 120 分钟。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\left\{x\in\mathbf{Z}\left|\dfrac{x+1}{x-2}\leqslant 0\right.\right\}$, $B=\{x|y=\sqrt{x^2-1}\}$,则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=$ (　　)

(A)$\{0\}$　　(B)$\{0,1\}$

(C)$\{-1,0\}$　　(D)$\{-1,0,1\}$

2. 设复数 z 满足 $(1+i)\cdot z=3-i$,则 $|z-1|=$ (　　)

(A)1　　(B)2

(C)3　　(D)$\sqrt{2}$

3. 已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$, $\boldsymbol{a}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$,则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$ (　　)

(A)1　　(B)$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(C)$\sqrt{2}$　　(D)$\sqrt{3}$

4. 某高校决定从甲、乙等 7 支队伍中选出 4 支队伍参加全国的数学建模大赛,已知甲队被选出,则乙队也被选出的概率为 (　　)

(A)$\dfrac{1}{2}$　　(B)$\dfrac{2}{7}$

(C)$\dfrac{10}{21}$　　(D)$\dfrac{1}{21}$

5. 已知 O 是坐标原点, M 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 右支上任意一点,过点 M 作双曲线的切线,与其渐近线交于 A,B 两点,若 $\triangle AOB$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}b^2$,则双曲线的离心率为 (　　)

(A)$\sqrt{2}$　　(B)$\sqrt{3}$

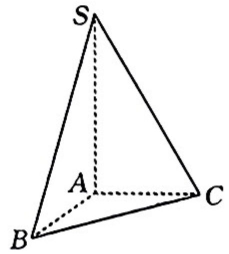
(C)$\sqrt{5}$　　(D)2

6. 已知函数 $f(x)=\sin\omega x-\cos\omega x(\omega>0,x\in\mathbf{R})$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内没有零点,则 $f(x)$ 周期的最小值是 (　　)

(A)12π　　(B)2π

(C)$\dfrac{12\pi}{5}$　　(D)4π

7. 已知三棱锥 $S-ABC$, $SA\perp$ 平面 ABC, $AB=AC=2$, $\angle BAC=120^\circ$,若三棱锥外接球的表面积为 28π,则此三棱锥的体积为 (　　)



(A)1　　(B)2

(C)3　　(D)4

8.已知$a,b,c\in(1,+\infty)$，$\frac{8}{a}=\frac{\ln a}{\ln 10}$，$\frac{7}{b}=\frac{\ln b}{\ln 11}$，$\frac{6}{c}=\frac{\ln c}{\ln 12}$，则下列大小关系正确的是（　　）

(A)$c>b>a$　　(B)$a>b>c$

(C)$b>c>a$　　(D)$c>a>b$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.

9.根据中国报告大厅对2023年3月～10月全国太阳能发电量进行监测统计，太阳能发电量(单位：亿千瓦时)月度数据统计如下表：

月份	3	4	5	6
发电量/亿千瓦时	242.94	230.87	240.59	259.33
月份	7	8	9	10
发电量/亿千瓦时	258.9	269.19	246.06	244.31

关于2023年3月～10月全国太阳能发电量，下列四种说法正确的是（　　）

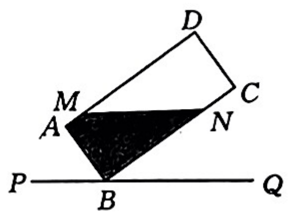
(A)中位数是259.115

(B)极差是38.32

(C)第85百分位数是259.33

(D)第25百分位数是240.59

10.已知一个装有半瓶水的圆柱形玻璃杯，其底面半径为3 cm，玻璃杯高为16 cm（玻璃厚度忽略不计），其倾斜状态的正视图如图所示，PQ表示水平桌面.当玻璃杯倾斜时，瓶内水面为椭圆形，阴影部分$ABNM$为瓶内水的正视图.设$\angle CBQ=\theta$，则下列结论正确的是（　　）



(A)当$\theta=30^\circ$时，椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$

(B)当椭圆的离心率最大时，$\tan\theta=\frac{1}{2}$

(C)当椭圆的焦距为4时，$\tan\theta=\frac{3}{4}$

(D)当$\theta=45^\circ$时，椭圆的焦距为6

11.已知函数$f(x)$及其导函数$f'(x)$的定义域均为$\mathbf{R}$，记$g(x)=f'(x)$，若$f(3+2x)$为偶函数，$g(1+x)$为奇函数，则下列结论正确的是（　　）

(A)$g(x)$的图象关于直线$x=1$对称.

(B)$g(x)$的图象关于点$(3,0)$对称.

(C)$\sum_{i=1}^{2024}f(i)=1$

(D)$g(2023)=0$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12. 已知一个基因由若干个碱基对组成，而一个碱基对由A，T，C，G四种碱基中任取两个碱基配对排列而成，其中A只能与T配对，C只能与G配对.如果n个碱基对组成一个基因，那么n个碱基对组成的基因个数为________.

13. 已知$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，AD是$\triangle ABC$的中线.若$AD=2$，且$b^2+c^2+bc=(b\cos C+c\cos B)^2$，则$\triangle ABC$面积的最大值为________.

14. 已知$a^{\frac{1}{x}}-x^{\frac{1}{2}}<0(a>0,a\neq 1)$对任意$x\in(0,+\infty)$恒成立，则实数$a$的取值范围是________.

四、解答题：本题共5小题，共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13分）

已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，$(0,\sqrt{2})$是椭圆的短轴的一个顶点.

(1)求椭圆C的方程.

(2)设圆$O:x^2+y^2=a^2+b^2$，过圆O上一动点P作椭圆C的两条切线，切点分别为A,B.设两切线的斜率均存在，分别为k_1,k_2，问：k_1k_2是否为定值？若不是，说明理由；若是，求出定值.

16.（15分）

某学校的数学兴趣小组对学校学生的冰雪运动情况进行调研，发现约有$\frac{1}{4}$的学生喜欢滑雪运动.从这些被调研的学生中随机抽取3人进行调查，假设每个学生被选到的可能性相等.

(1)记X表示喜欢滑雪运动的人数,求X的数学期望.

(2)若该数学兴趣小组计划在全校学生中抽选一名喜欢滑雪运动的学生进行访谈.抽选规则如下:在全校学生中随机抽选一名学生,如果该学生喜欢滑雪运动,就不再抽选其他学生,结束抽选活动;如果该学生不喜欢滑雪运动,则继续随机抽选,直到抽选到一名喜欢滑雪运动的学生为止,结束抽选活动.并且规定抽取的次数不超过$n(n\in\mathbf{N}^*)$次,其中n小于当次调查的总人数.设在抽选活动结束时,抽到不喜欢滑雪运动的学生的人数为Y,求抽到Y名学生不喜欢滑雪运动的概率.

17.(15分)

已知函数$f(x)=\cos x+2x$.

(1)当$x\in(-\infty,0)$时,证明:$f(x)<e^x$.

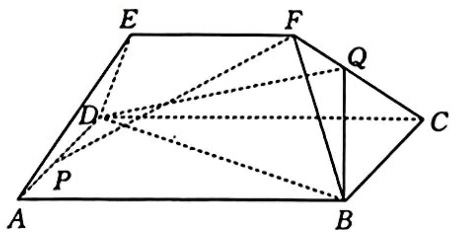
(2)若函数$g(x)=\ln(x+1)+e^x-f(x)$,试问:函数$g(x)$是否存在极小值?若存在,求出极小值;若不存在,请说明理由.

18.(17分)

我国古代数学名著《九章算术》中记载:"刍(chú)甍(méng)者,下有袤有广,而上有袤无广.刍,草也.甍,窟盖也."翻译为"底面有长有宽为矩形,顶部只有长没有宽为一条棱.刍甍的字面意思为茅草屋顶".如图,现有一个"刍甍",四边形$ABCD$为矩形,四边形$ABFE$,$CDEF$为两个全等的等腰梯形,$EF//AB$,$AB=4$,$EF=AD=2$,P是线段AD上一点.

(1)若P是线段AD上靠近点A的三等分点,Q为线段CF上一点,且$\overrightarrow{FQ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{FC}$,证明:$PF//$平面$BDQ$.

(2)若点E到平面$ABCD$的距离为$\frac{3}{2}$,PF与平面BCF所成角的正弦值为$\frac{2\sqrt{39}}{13}$,求AP的长.



19.(17分)

已知$\alpha_0=(a_0,b_0,c_0,d_0)$和数表$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$,其中$a_i,b_i,c_i,d_i\in\mathbf{N}^*$ $(i=0,1,2,3)$.若数表A满足如下两个性质,则称数表A由α_0生成.

①对任意$i\in\{0,1,2\}$,$a_{i+1}-a_i,b_{i+1}-b_i,c_{i+1}-c_i,d_{i+1}-d_i$中有三个$-1$,一个$3$;

②存在$k\in\{1,2,3\}$,使a_k,b_k,c_k,d_k中恰有三个数相等.

(1)判断数表$A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 & 6 \\ 4 & 5 & 5 & 9 \\ 3 & 8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$是否由$\alpha_0=(6,7,7,3)$生成.(结论无需证明)

(2)是否存在数表A由$\alpha_0=(6,7,7,4)$生成?说明理由.

(3)若存在数表A由$\alpha_0=(7,12,3,d_0)$生成,写出d_0所有可能的值.

1.A　2.B　3.D　4.A　5.C　6.C　7.B　8.B

9.BC　10.AD　11.BD　12.4^n　13.$4\sqrt{3}$

14.$\left(0, e^{-\frac{1}{2e}}\right)$

15.(1)$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$;(2)$k_1k_2=-1$.

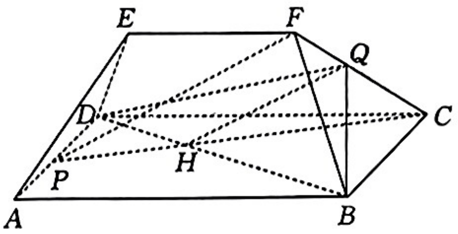
16.(1)$E(X)=\frac{3}{4}$.

(2)$P=\begin{cases}\frac{3^k}{4^{k+1}}, 0\leqslant k\leqslant n-1\\ \left(\frac{3}{4}\right)^n, k=n\end{cases}$

17.(1)略;

(2)当$x=0$时,函数$g(x)$有极小值,极小值为$g(0)=0$.

18.(1)证明:连接CP,交BD于点H,连接HQ,如图所示.



因为$AD/\!/BC$,且$PD=\frac{2}{3}AD$,

所以$\frac{PH}{HC}=\frac{PD}{BC}=\frac{PD}{AD}=\frac{2}{3}$,

因为$\overrightarrow{FQ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{FC}$,所以$\frac{FQ}{QC}=\frac{2}{3}$,

所以$\frac{FQ}{QC}=\frac{PH}{HC}$,所以$PF/\!/HQ$.

因为$HQ\subset$平面BDQ,$PF\not\subset$平面BDQ,

所以$PF/\!/$平面BDQ.

(2)解:取AD,BC的中点分别为I,J,连接EI,IJ,FJ,则$IJ/\!/AB$,且$IJ=AB$,

因为四边形$ABFE$与四边形$CDEF$为全等的等腰梯形,所以$EA=ED=FB=FC$,四边形$EIJF$为等腰梯形,且$EF/\!/IJ$,$EF=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}IJ$,$EI\perp AD$,$FJ\perp BC$,

又$AD/\!/BC$,所以$FJ\perp AD$,

因为$EI\subset$平面$EIJF$,$FJ\subset$平面$EIJF$,且EI,FJ为两条相交直线,

所以$AD\perp$平面$EIJF$,

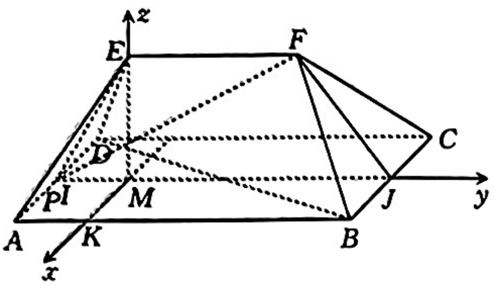
所以平面$ABCD\perp$平面$EIJF$.

过点E在平面$EIJF$内作IJ的垂线,垂足为点M,则$EM\perp$平面$ABCD$,

所以$EM=\frac{3}{2}$,$IM=\frac{1}{2}(IJ-EF)=1$.

过点M作$MK/\!/AD$,易得MK,MJ,ME两两垂

直、以M为坐标原点，MK、MJ、ME所在直线分别为x轴、y轴、z轴建立空间直角坐标系$M-xyz$，如图所示，则$F\left(0,2,\frac{3}{2}\right)$，$B(1,3,0)$，$C(-1,3,0)$.



设$P(a,-1,0)(-1\leqslant a\leqslant 1)$，

所以$\overrightarrow{PF}=\left(-a,3,\frac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{FB}=\left(1,1,-\frac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{FC}=\left(-1,1,-\frac{3}{2}\right)$.

设平面BCF的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FB}=0\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FC}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x+y-\frac{3}{2}z=0\\-x+y-\frac{3}{2}z=0\end{cases}$

令$z=2$，解得$x=0$，$y=3$，

所以$\boldsymbol{n}=(0,3,2)$，

设PF与平面BCF所成角的大小为θ，

则$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PF},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{PF}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{PF}|\cdot|\boldsymbol{n}|}$

$=\frac{12}{\sqrt{a^2+\frac{45}{4}}\times\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{39}}{13}$，

解得$a=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，满足题意，

所以$AP=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$或$AP=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

19. 解：(1)数表$A=\begin{pmatrix}5&6&6&6\\4&5&5&9\\3&8&4&8\end{pmatrix}$由$\alpha_0=(6,7,7,3)$生成.

检验性质①：

当$i=0$时，$5-6=-1$，$6-7=-1$，$6-7=-1$，$6-3=3$，共三个-1，一个3；

当$i=1$时，$4-5=-1$，$5-6=-1$，$5-6=-1$，$9-6=3$，共三个-1，一个3；

当$i=2$时，$3-4=-1$，$8-5=3$，$4-5=-1$，$8-9=-1$，共三个-1，一个3.

综上，对任意$i\in\{0,1,2\}$，$a_{i+1}-a_i$，$b_{i+1}-b_i$，$c_{i+1}-c_i$，$d_{i+1}-d_i$中有三个-1，一个3.

检验性质②：

当$k=1$时，$a_1=5$，$b_1=6$，$c_1=6$，$d_1=6$，恰有3个数相等.

(2)不存在数表A由$\alpha_0=(6,7,7,4)$生成. 理由如下：

若存在这样的数表A，由性质①对任意$i\in\{0,1,2\}$，$a_{i+1}-a_i$，$b_{i+1}-b_i$，$c_{i+1}-c_i$，$d_{i+1}-d_i$中有三个-1，一个3，则$a_{i+1}-a_i=3$或-1，总有a_{i+1}与a_i的奇偶性相反.

类似地，b_{i+1}与b_i的奇偶性相反，c_{i+1}与c_i的奇偶性相反，d_{i+1}与d_i的奇偶性相反.

因为$a_0=6$，$b_0=7$，$c_0=7$，$d_0=4$中恰有2个奇数，2个偶数，所以对任意的$k\in\{1,2,3\}$，a_k，b_k，c_k，d_k中均有2个奇数，2个偶数，

此时a_k，b_k，c_k，d_k中至多有2个数相等，不满足性质②.

综上，不存在数表A由$\alpha_0=(6,7,7,4)$生成.

(3)d_0的所有可能的值为3，7，11.

当$d_0=3$时，$(7,12,3,3)$可以生成数表$A=\begin{pmatrix}6&11&2&6\\5&10&5&5\\4&13&4&4\end{pmatrix}$；

当$d_0=7$时，$(7,12,3,7)$可以生成数表$A=\begin{pmatrix}6&11&6&6\\5&14&5&5\\4&17&4&4\end{pmatrix}$；

当$d_0=11$时，$(7,12,3,11)$可以生成数表$A=\begin{pmatrix}6&11&6&10\\5&10&9&9\\8&9&8&8\end{pmatrix}$.

若存在数表A由$\alpha_0=(7,12,3,d_0)$生成，则需证明d_0除以4余3. 证明如下：

对任意的$i=0,1,2,3$，令$\Delta_i=a_i-b_i$，则$\Delta_{i+1}-\Delta_i=(a_{i+1}-b_{i+1})-(a_i-b_i)=(a_{i+1}-a_i)-(b_{i+1}-b_i)$，

(Ⅰ)若$a_{i+1}-a_i=-1$，且$b_{i+1}-b_i=-1$，则$\Delta_{i+1}-\Delta_i=0$；

(Ⅱ)若$a_{i+1}-a_i=-1$，且$b_{i+1}-b_i=3$，则$\Delta_{i+1}-\Delta_i=-4$；

(Ⅲ)若$a_{i+1}-a_i=3$，且$b_{i+1}-b_i=-1$，则$\Delta_{i+1}-\Delta_i=4$.

上述三种情况均有Δ_{i+1}与Δ_i除以4的余数相同.

特别地,"存在$k\in\{1,2,3\}$,使得$a_k=b_k$"的一个必要不充分条件为"a_0、b_0除以4的余数相同";

类似地,"存在$k\in\{1,2,3\}$,使得$a_k=c_k$"的一个必要不充分条件为"a_0,c_0除以4的余数相同";

"存在$k\in\{1,2,3\}$,使得$a_k=d_k$"的一个必要不充分条件为"a_0,d_0除以4的余数相同";

"存在$k\in\{1,2,3\}$,使得$b_k=c_k$"的一个必要不充分条件为"b_0,c_0除以4的余数相同";

"存在$k\in\{1,2,3\}$,使得$b_k=d_k$"的一个必要不充分条件为"b_0,d_0除以4的余数相同";

"存在$k\in\{1,2,3\}$,使得$c_k=d_k$"的一个必要不充分条件为"c_0,d_0除以4的余数相同"

所以,存在$k\in\{1,2,3\}$,使得a_k,b_k,c_k,d_k中恰有3个数相等的一个必要不充分条件是a_k,b_k,c_k,d_k中至少有3个数除以4的余数相同.

注意到$a_0=7$与$c_0=3$除以4余3,$b_0=12$除以4余0,故d_0除以4余3.

所以还需证明$d_0\in\{3,7,11,15\}$.证明如下:

要证明$d_0\in\{3,7,11,15\}$,

只需证明$d_0\leqslant 15$,

由上述证明知,若$\alpha_0=(7,12,3,d_0)$可以生成数表A,则必存在$k\in\{1,2,3\}$,使得$a_k=c_k=d_k$.

若$d_0>15$,则$d_0-c_0>15-3=12$,$d_1-c_1\geqslant(d_0-c_0)-4>8$,$d_2-c_2\geqslant(d_1-c_1)-4>4$,$d_3-c_3\geqslant(d_2-c_2)-4>0$,

所以对任意$k\in\{1,2,3\}$,均有$d_k-c_k>0$,矛盾.

最后需证明$d_0\neq 15$.证明如下:

由上述证明可得若$\alpha_0=(7,12,3,d_0)$可以生成数表A,则必存在$k\in\{1,2,3\}$,使得$a_k=c_k=d_k$,

$d_0-c_0=15-3=12$,$d_1-c_1\geqslant(d_0-c_0)-4=8$,$d_2-c_2\geqslant(d_1-c_1)-4\geqslant 4$,$d_3-c_3\geqslant(d_2-c_2)-4\geqslant 0$,

欲使上述等号成立,对任意的$k\in\{1,2,3\}$,$c_{k+1}-c_k=3$,$d_{k+1}-d_k=-1$,则$a_{k+1}-a_k=-1$,$b_{k+1}-b_k=-1$,$A=\begin{pmatrix}6&11&6&14\\5&10&9&13\\4&9&12&12\end{pmatrix}$,

经检验,不符合题意.

综上,d_0所有可能的取值为3,7,11.