2024年HGT第一次模拟测试

数学　参考答案及评分意见

一、单项选择题：共 8 小题，每题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	C	A	A	D	B	C

二、多项选择题：共 4 小题，每题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

题号	9	10	11	12
答案	BC	ABD	ACD	ACD

三、填空题：共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．$-\dfrac{1}{6}$　　14．160　　15．$[0,80\sqrt{3}]$　　16．$\dfrac{5}{3}$

四、解答题：共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．【解析】（1）$f'(x)=1+\ln 2-\ln x=\ln\dfrac{2e}{x}$，　…………………… 2 分

令 $f'(x)<0$，得 $0<\dfrac{2e}{x}<1$，即 $x>2e$，　…………………… 4 分

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(2e,+\infty)$．　…………………… 5 分

（2）当 $x\in(0,2e)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(2e,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，　…………………… 8 分

所以 $f(x)\le f(2e)=2e$，即 $f(x)$ 的最大值为 $2e$．　…………………… 10 分

18．【解析】由题意知 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{b_{n+2}}{b_n}$，　…………………… 2 分

（1）因为 $b_1=1$，且 $\{b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=4$，

因为 $a_1=1$，所以数列 $\{a_n\}$ 首项为 1，公比为 4 的等比数列，　…………………… 4 分

所以 $S_n=\dfrac{1\times(1-4^n)}{1-4}=\dfrac{1}{3}\times(4^n-1)$；　…………………… 6 分

（2）因为 $b_1=1$，且 $\{b_n\}$ 是公差为 2 的等差数列，所以 $b_n=2n-1$，

所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{b_{n+2}}{b_n}=\dfrac{2n+3}{2n-1}$，　…………………… 8 分

所以 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{2n+1}{2n-3}$，$\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\dfrac{2n-1}{2n-5}$，……，$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{5}{1}$，　…………………… 10 分

所以 $\dfrac{a_n}{a_1}=\dfrac{(2n+1)(2n-1)}{3\times1}$，因为 $a_1=1$，所以 $a_n=\dfrac{1}{3}\times(4n^2-1)$．

…………

19.【解析】（1）由已知，$AB = AC \cdot \cos\angle BAC = 10\times\frac{1}{2} = 5$，

$AD = AC \cdot \cos\angle DAC = 10\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$， ………………… 2 分

因为 $\angle BAD = \angle BAC + \angle DAC = 60^\circ + 45^\circ$，

所以 $\cos\angle BAD = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$，

………………… 4 分

所以在 ΔABD 中，$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB\cdot AD\cdot\cos\angle BAD$

$$= 25 + 50 - 2\times5\times5\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$= 50 + 25\sqrt{3}.$$ ………………… 6 分

（2）【解法 1】因为 $\sin\angle BAD = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$， ………………… 8 分

又因为 $S_{\Delta ABD} = S_{\Delta ABE} + S_{\Delta ADE}$，

所以 $\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AD\cdot\sin\angle BAD = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AE\cdot\sin\angle BAE + \frac{1}{2}\cdot AE\cdot AD\cdot\sin\angle EAD$，

………………… 10 分

即 $\frac{1}{2}\times5\times5\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}\times5\times AE\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\times AE\times5\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$，

解得 $AE = 5\sqrt{3} - 5$. ………………… 12 分

【解法 2】因为 $\frac{AE}{EC} = \frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta BCD}} = \frac{\frac{1}{2}\times AB\cdot AD\cdot\sin\angle BAD}{\frac{1}{2}\times BC\cdot CD\cdot\sin\angle BCD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$， ………… 9 分

又因为 $AC = 10$，所以 $AE + EC = 10$，则 $AE + \sqrt{3}AE = 10$，

所以 $AE = 5\sqrt{3} - 5$. ………………… 12 分

20. 【解析】（1）记投资期间经济形势好为事件 B_1，投资期间经济形势不好为事件 B_2，

投资咨询公司预测投资期间经济形势好为事件 A，

则 $P(B_1) = 0.4, P(B_2) = 0.6$， ………………… 2 分

因此 $P(A) = P(B_1A + B_2A) = 0.4\times0.8 + 0.6\times0.3 = 0.5$； ………………

（2）若采取方案一，则该公司获得的利润值 X 万元的分布列是

X	50	-20
P	0.4	0.6

$EX=50\times0.4-20\times0.6=8$ 万元； ………………… 7 分

若采取方案二：设该公司获得的利润值为 Y 万元，有以下情况，

投资期间经济形势好，咨询公司乙预测经济形势为好，$Y=49.5$，

其发生的概率为：$P(B_1A)=0.4\times0.8=0.32$，

投资期间经济形势好，咨询公司乙预测经济形势为不好，$Y=-1.5$，

其发生的概率为：$P(B_1\overline{A})=0.4\times0.2=0.08$，

投资期间经济形势不好，咨询公司乙预测经济形势为好，$Y=-20.5$，

其发生的概率为：$P(B_2A)=0.6\times0.3=0.18$，

投资期间经济形势不好，咨询公司乙预测经济形势为不好，$Y=-1.5$，

其发生的概率为：$P(B_2\overline{A})=0.6\times0.7=0.42$， ………………… 9 分

因此，随机变量 Y 的分布列为：

Y	-20.5	-1.5	49.5
P	0.18	0.5	0.32

因此，$EY=-20.5\times0.18-1.5\times0.5+49.5\times0.32=-3.69-0.75+15.84=11.4$ 万元，

因为 $EX<EY$，所以甲公司应该选择方案二. ………………… 12 分

21. 【解析】（1）设 $BD\cap CE=N$，则 $\dfrac{CN}{NE}=\dfrac{CM}{MP}=2$， ………………… 2 分

$\therefore MN\parallel PE$，且 $MN\subset$ 平面 MBD，$\therefore PE\parallel$ 平面 MBD. ………………… 5 分

（2）$\because PH\perp$ 平面 $ABCD$，且 $BC\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore PH\perp BC$，又 $\because BC\perp CE$，

$\therefore BC\perp$ 平面 PEC，且 $EM\subset$ 平面 PEC，

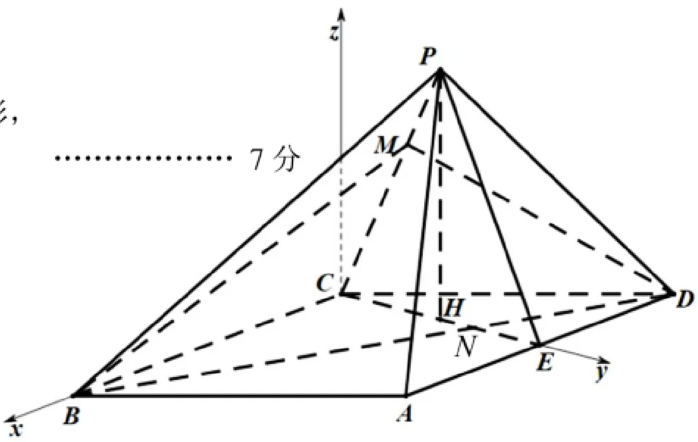
$\therefore BC\perp EM$，又 $\because PB\perp EM$，

$\therefore EM\perp$ 平面 PBC，且 $PC\subset$ 平面 PBC，

$\therefore EM\perp PC$. 由已知，ΔPEC 为等边三角形，

故 M 为 PC 中点， ………………… 7 分

M 在底面 $ABCD$ 上的投影为 CH 的中点.



$\because CE\perp AD, PH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}CE=\dfrac{3}{2}$，

以 C 为原点，分别以 CB,CE 为 x,y 轴，

以过 C 点且与平面 $ABCD$ 垂直的直线为 z 轴建立空间直角坐标系，

所以 $C(0,0,0),B(2,0,0),E(0,\sqrt{3},0),M(0,\dfrac{\sqrt{3}}{4},\dfrac{3}{4})$，

$\therefore \overrightarrow{EB}=(2,-\sqrt{3},0),\overrightarrow{ME}=(0,\dfrac{3\sqrt{3}}{4},-\dfrac{3}{4})$，

设$\vec{n}=(x,y,z)$是平面EBM的一个法向量，则

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EB}=0\Rightarrow 2x-\sqrt{3}y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{ME}=0\Rightarrow \dfrac{3\sqrt{3}}{4}y-\dfrac{3}{4}z=0\end{cases},$$

令$y=2$，则$x=\sqrt{3}$，$z=2\sqrt{3}$，即$\vec{n}=(\sqrt{3},2,2\sqrt{3})$，　　………………　9 分

$\because BC\perp$平面PEC，

$\therefore \overrightarrow{CB}=(2,0,0)$是平面$PEC$的一个法向量，　　………………　10 分

$\therefore \cos<\vec{n},\overrightarrow{CB}>=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{CB}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\times\sqrt{19}}=\dfrac{\sqrt{57}}{19}$，

因为二面角$B-EM-C$是一个锐角，

所以二面角$B-EM-C$的余弦值为$\dfrac{\sqrt{57}}{19}$.　　………………　12 分

22. 【解析】（1）依题意可知$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，　　………………　1 分

由于$k_1=1$，则直线MN的方程为$x-y-1=0$，因为点A_1到直线MN的距离为$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

所以$\dfrac{|a+1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，解得$a=2$，　　………………　3 分

所以$c=\sqrt{3}$，则$b=\sqrt{a^2-c^2}=1$，

所以椭圆E的标准方程$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.　　………………　4 分

（2）设$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2),P(-x_1,-y_1)$，直线$AB$的方程为$x=my+1$.此时$k_1=\dfrac{1}{m}$.

联立直线与椭圆方程$\begin{cases}x=my+1\\ x^2+4y^2=4\end{cases}$消去$x$得$(m^2+4)y^2+2my-3=0$，

则有$y_1+y_2=\dfrac{-2m}{m^2+4},y_1y_2=\dfrac{-3}{m^2+4}$　　………………　6 分

不妨设$Q(x_0,y_0)$，因为A_2,N,Q三点共线，则$k_{A_2N}=k_{A_2Q}$，所以则有$\dfrac{y_0}{x_0-2}=\dfrac{y_2}{x_2-2}$，

因为A_1,P,Q三点共线，则$k_{A_1P}=k_{A_1Q}$则有$\dfrac{y_0}{x_0+2}=\dfrac{y_1}{x_1-2}$，　　………………　8 分

所以 $\dfrac{x_0-2}{y_0}=\dfrac{x_2-2}{y_2}=\dfrac{my_2-1}{y_2}=m-\dfrac{1}{y_2}$，$\dfrac{x_0+2}{y_0}=\dfrac{x_1-2}{y_1}=\dfrac{my_1-1}{y_1}=m-\dfrac{1}{y_1}$

$\dfrac{2x_0}{y_0}=2m-(\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2})=2m-\dfrac{\dfrac{-2m}{m^2+4}}{\dfrac{-3}{m^2+4}}=\dfrac{4m}{3}$， ………………… 10 分

所以 $\dfrac{y_0}{x_0}=\dfrac{3}{2m}$，所以 $k_2=\dfrac{3}{2m}$， ………………… 11 分

所以 $k_2=\dfrac{3}{2}k_1$，所以 $\dfrac{k_2}{k_1}=\dfrac{3}{2}$. ………………… 12 分