

2024年HGT第一次模拟测试

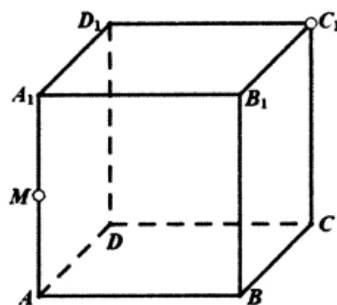
数 学

本试卷共4页, 22小题, 满分150分. 考试时间120分钟.

一、单项选择题: 共8小题, 每题5分, 共40分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的.

- 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 4 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}_+ \mid x < 10\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{1\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{1, 2, 3\}$ D. $\{1, 2, 3, 4\}$
- 已知复数 z 满足 $z - 2i = zi + 4$, 则 $|z| =$
A. 3 B. $\sqrt{10}$ C. 4 D. 10
- 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_6 = \frac{2}{3}$, 则 $S_{17} =$
A. 51 B. 34 C. 17 D. 1
- 已知 $p: \ln(a-1) > 0$, $q: \exists x > 0, \frac{x^2+1}{x} \leq a$, 则 p 是 q 的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 已知抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的焦点为 F , A 是抛物线 C 在第一象限部分上一点, 若 $|AF| = 4$, 则抛物线 C 在点 A 处的切线方程为
A. $\sqrt{3}x - y - 3 = 0$ B. $2x - y - 1 = 0$
C. $x - y - 1 = 0$ D. $\sqrt{2}x - y - 2 = 0$
- 已知 $a = \log_2 5$, $b = \log_5 2$, $c = e^{\frac{1}{2}}$, 则
A. $c < a < b$ B. $a < c < b$ C. $a < b < c$ D. $b < c < a$
- 已知函数 $f(x) = \sin(x - \frac{1}{x})$, $x \in [-2, -1] \cup [1, 2]$, 则下列结论中错误的是
A. $f(x)$ 是奇函数 B. $f(x)_{\max} = 1$
C. $f(x)$ 在 $[-2, -1]$ 上递增 D. $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上递增

8. 木桶效应, 也可称为短板效应, 是说一只水桶能装多少水取决于它最短的那块木板. 如果一只桶的木板中有一块不齐或者某块木板有破洞, 这只桶就无法盛满水, 此时我们可以倾斜木桶, 设法让桶装水更多. 如图, 棱长为2的正方体容器, 在顶点 C_1 和棱 AA_1 的中点 M 处各有一个小洞 (小洞面积忽略不计), 为了保持平衡, 以 BD 为轴转动正方体, 则用此容器装水, 最多能装水的体积 $V =$



- A. 4 B. $\frac{16}{3}$
C. 6 D. $\frac{20}{3}$

二、多项选择题: 共4小题, 每题5分, 共20分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得5分, 部分选对的得2分, 有选错的得0分.

- 已知空间中两条不同的直线 m, n 和两个不同的平面 α, β , 则下列说法正确的是
A. 若 $m \parallel n$, $m \subset \alpha$, 则 $n \parallel \alpha$ B. 若 $\alpha \parallel \beta$, $m \subset \alpha$, 则 $m \parallel \beta$
C. 若 $m \perp \beta$, $n \subset \beta$, 则 $m \perp n$ D. 若 $\alpha \perp \beta$, $n \subset \beta$, 则 $n \perp \alpha$

10. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 与直线 $l: x = my + \sqrt{3}$ 交于 A, B 两点, 设 $\triangle OAB$ 的面积为 $S(m)$, 则下列说法正确的是

- A. $S(m)$ 有最大值 2
B. $S(m)$ 无最小值
C. 若 $m_1 \neq m_2$, 则 $S(m_1) \neq S(m_2)$
D. 若 $S(m_1) \neq S(m_2)$, 则 $m_1 \neq m_2$

11. 某环保局对辖区内甲、乙两个地区的环境治理情况进行检查督导, 若连续 10 天, 每天空气质量指数 (单位: $\mu\text{g}/\text{m}^3$) 不超过 100, 则认为该地区环境治理达标, 否则认为该地区环境治理不达标. 已知甲乙两地区连续 10 天检查所得数据特征是: 甲地区平均数为 80, 方差为 40, 乙地区平均数为 70, 方差为 90. 则下列推断一定正确的是

- A. 甲乙两地区这 10 天检查所得共 20 个数据的平均数是 75
B. 甲乙两地区这 10 天检查所得共 20 个数据的方差是 65
C. 甲地区环境治理达标
D. 乙地区环境治理达标

12. 已知直线 l_1 是曲线 $f(x) = \ln x$ 上任一点 $A(x_1, y_1)$ 处的切线, 直线 l_2 是曲线 $g(x) = e^x$ 上点 $B(y_1, x_1)$ 处的切线, 则下列结论中正确的是

- A. 当 $x_1 + y_1 = 1$ 时, $l_1 \parallel l_2$
B. 存在 x_1 , 使得 $l_1 \perp l_2$
C. 若 l_1 与 l_2 交于点 C 时, 且三角形 ABC 为等边三角形, 则 $x_1 = 2 + \sqrt{3}$
D. 若 l_1 与曲线 $g(x)$ 相切, 切点为 $C(x_2, y_2)$, 则 $x_1 y_2 = 1$

三、填空题: 共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 2$, $\vec{b} = (1, 2\sqrt{2})$, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$, 则向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 夹角的余弦值为

14. $(x-2y)^6(1-x)$ 的展开式中 $x^4 y^3$ 的系数是

15. “南昌之星”摩天轮半径为 80 米, 建成时为世界第一高摩天轮, 成为南昌地标建筑之一. 已知摩天轮转一圈的时间为 30 分钟, 甲乙两人相差 10 分钟坐上摩天轮, 那么在摩天轮上, 他们离地面高度差的绝对值的取值范围是

16. 用平面截圆锥面, 可以截出椭圆、双曲线、抛物线, 那它们是不是符合圆锥曲线的定义呢? 比利时数学家丹德林用一个双球模型给出了证明. 如图 1, 在一个圆锥中放入两个球, 使得它们都与圆锥面相切, 一个平面过圆锥母线上的点 P 且与两个球都相切, 切点分别记为 F_1, F_2 . 这个平面截圆锥面得到交线 C , M 是 C 上任意一点, 过点 M 的母线与两个球分别相切于点 G, H , 因此有 $MF_1 + MF_2 = MG + MH = GH$, 而 GH 是图中两个圆锥母线长的差, 是一个定值, 因此曲线 C 是一个椭圆. 如图 2, 两个对顶圆锥中, 各有一个球, 这两个球的半径相等且与圆锥面相切, 已知这两个圆锥的母线与轴夹角的正切值为 $\frac{4}{3}$, 球的半径为

4, 平面 α 与圆锥的轴平行, 且与这两个球相切于 A, B 两点, 记平面 α 与圆锥侧面相交所得曲线为 C , 则曲线 C 的离心率为

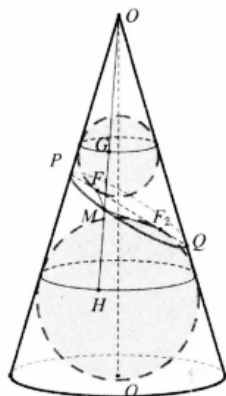


图 1

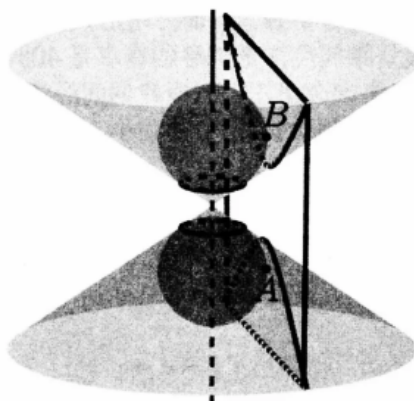


图 2

四、解答题：共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题 10 分) 已知函数 $f(x) = (2 + \ln 2)x - x \ln x$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递减区间;

(2) 求 $f(x)$ 的最大值.

18. (本小题 12 分) 对于各项均不为零的数列 $\{c_n\}$, 我们定义: 数列 $\{\frac{c_{n+k}}{c_n}\}$ 为数列 $\{c_n\}$ 的“ k -比分数列”. 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $a_1 = b_1 = 1$, 且 $\{a_n\}$ 的“1-比分数列”与 $\{b_n\}$ 的“2-比分数列”是同一个数列.

(1) 若 $\{b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ;

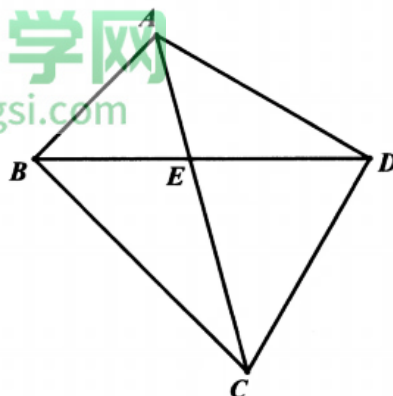
(2) 若 $\{b_n\}$ 是公差为 2 的等差数列, 求 a_n .

19. (本小题 12 分) 如图, 两块直角三角形模具, 斜边靠在一起, 其中公共斜边 $AC = 10$,

$\angle BAC = \frac{\pi}{3}$, $\angle DAC = \frac{\pi}{4}$, BD 交 AC 于点 E .

(1) 求 BD^2 ;

(2) 求 AE .



20. (本小题 12 分) 甲公司现有资金 200 万元, 考虑一项投资计划, 假定影响投资收益的唯一因素是投资期间的经济形势, 若投资期间经济形势好, 投资有 25% 的收益率, 若投资期间经济形势不好, 投资有 10% 的损益率; 如果不执行该投资计划, 损失为 1 万元. 现有两个方案, 方案一: 执行投资计划; 方案二: 聘请投资咨询公司乙分析投资期间的经济形势, 聘请费用为 5000 元, 若投资咨询公司乙预测投资期间经济形势好, 则执行投资计划; 若投资咨询公司乙预测投资期间经济形势不好, 则不执行该计划. 根据以往的资料表明, 投资咨询公司乙预测不一定正确, 投资期间经济形势好, 咨询公司乙预测经济形势好的概率是 0.8; 投资期间经济形势不好, 咨询公司乙预测经济形势不好的概率是 0.7. 假设根据权威资料可以确定, 投资期间经济形势好的概率是 40%, 经济形势不好的概率是 60%.

(1) 求投资咨询公司乙预测投资期间经济形势好的概率;

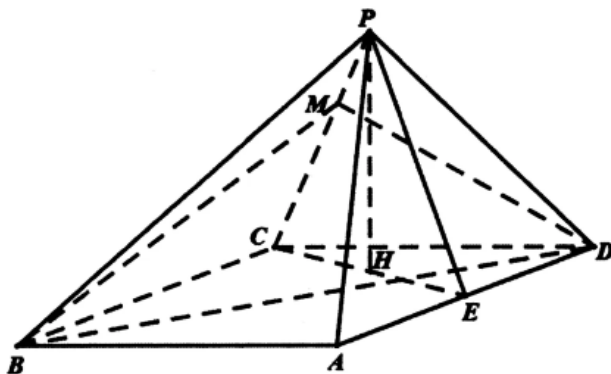
(2) 根据获得利润的期望值的大小, 甲公司应该执行哪个方案? 说明理由.

21. (本小题 12 分) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$,

已知 E 为棱 AD 的中点, P 在底面的投影 H 为线段 EC 的中点, M 是棱 PC 上一点.

(1) 若 $CM = 2MP$, 求证: $PE \parallel$ 平面 MBD ;

(2) 若 $PB \perp EM$, $PC = EC$, 确定点 M 的位置, 并求二面角 $B-EM-C$ 的余弦值.



22. (本小题 12 分) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 左右两顶点分别为 A_1, A_2 , 过点 $C(1, 0)$ 作斜率为 $k_1 (k_1 \neq 0)$ 的动直线与椭圆 E 相交于 M, N 两点. 当 $k_1 = 1$ 时, 点 A_1 到直线 MN 的距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求椭圆 E 的标准方程;

(2) 设点 M 关于原点的对称点为 P , 设直线 A_1P 与直线 A_2N 相交于点 Q , 设直线 OQ 的斜率为 k_2 , 试探究 $\frac{k_2}{k_1}$ 是否为定值, 若为定值, 求出定值并说明理由.

