

数学模拟卷(三)

说明:1. 全卷满分 120 分,考试时间 120 分钟.

2. 请将答案写在答题卷上,否则不给分.

一、选择题(本大题共 6 小题,每小题 3 分,共 18 分. 每小题只有一个正确选项)

1. 下列各数中,最小的数是()

A. $\frac{1}{2\,021}$

B. $-2\,021$

C. $-\sqrt{2\,021}$

D. $\sqrt[3]{2\,021}$

2. 下列计算中正确的是()

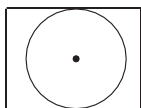
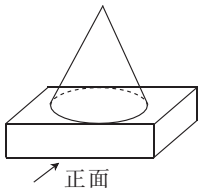
A. $a^2 + a^2 = a^4$

B. $(a^2)^3 = a^5$

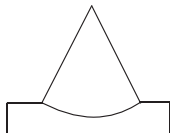
C. $(-a^2b)^3 = a^6b^3$

D. $(b+2a)(2a-b) = 4a^2 - b^2$

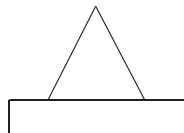
3. 下左图是由一个长方体和一个圆锥组成的几何体,它的俯视图是()



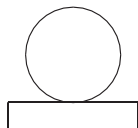
A



B



C



D

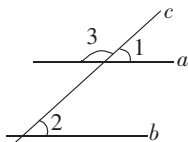
4. 如图,直线 a, b 被直线 c 所截, $a \parallel b$. 若 $\angle 3 = 3\angle 2$, 则 $\angle 1$ 的度数为()

A. 30°

B. 45°

C. 50°

D. 60°



5. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2(m+1)x + m^2 = 0$ 有两个实数根, 则 m 的最小整数值是()

A. -2

B. -1

C. 0

D. 1

6. 老师给出了二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的部分对应值(如下表), 同学们讨论后得出了下列结论, 其中不正确的是()

x	$\dots$	-3	-2	0	1	3	5	$\dots$
y	$\dots$	7	0	-8	-9	-5	7	$\dots$

A. 该抛物线的对称轴为直线 $x = 1$

B. $x = 3$ 是方程 $ax^2 + bx + c + 5 = 0$ 的一个根

C. 当 $-2 < x < 4$ 时, $y < 0$

D. 若 $A(x_1, 5), B(x_2, 6)$ 是该抛物线上的两点, 则 $x_1 < x_2$

二、填空题(本大题共 6 小题,每小题 3 分,共 18 分)

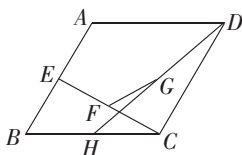
7. 计算 $\sqrt{12} - \sqrt{27}$ 的结果为_____.

8. 清代袁牧的诗《苔》中写道:“白日不到处,青春恰自来. 苔花如米小,也学牡丹开.”已知苔花的花粉直径约为 $0.000\ 008\ 4\ \text{m}$, $0.000\ 008\ 4$ 可用科学记数法表示为_____.

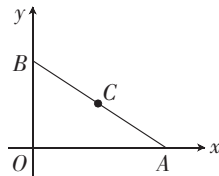
9. 已知两组数据 $3, a, b, 5$ 与 $a, 4, 2b$ 的平均数都是 3. 若将这两组数据合并为一组, 则合并后的这组数据的众数为_____.

10. 中国古代数学专著《九章算术》“方程”一章记载的用算筹(方阵)表示二元一次方程组的方法, 发展到现代就是用矩阵式 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ 来表示二元一次方程组 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$ 而该方程组的解就是对应两直线(不平行) $a_1x + b_1y = c_1$ 与 $a_2x + b_2y = c_2$ 的交点坐标 $P(x, y)$. 据此, 可知矩阵式 $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ 所对应两直线的交点坐标是_____.

11. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle B = 60^\circ$, 点 E, H 分别为 AB, BC 的中点, 点 G, F 分别为 HD, CE 的中点. 若线段 FG 的长为 $2\sqrt{3}$, 则 AB 的长为_____.



(第 11 题)



(第 12 题)

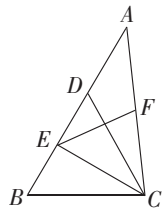
12. 如图, 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(4, 0), B(0, 3)$, 点 C 是 AB 的中点, 点 M 在折线 $AO-OB$ 上. 若直线 CM 截得的三角形与 $\triangle ABO$ 相似, 则点 M 的坐标是_____.

三、(本大题共 5 小题, 每小题 6 分, 共 30 分)

13. (本题共 2 小题, 每小题 3 分)

(1) 计算: $(\sqrt{3} - 1)^0 + 4 \times (-1)^{2021} + (\cos 60^\circ)^{-2}$.

(2) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在 AB 边上, 且 $CD = CB$, 点 E 为 BD 的中点, 点 F 为 AC 的中点, 连接 EF . 求证: $\angle A = \angle AEF$.



14. 解不等式组 $\begin{cases} 5x < 1 + 4x, \\ \frac{1-x}{2} \leq \frac{x+4}{3}, \end{cases}$ 并将解集在数轴上表示出来.

15. 某校为了弘扬中华优秀传统文化,举办了“国学经典诵读大赛”. 诵读的篇目分成四种类型: A——蒙学吟诵;B——爱国传承;C——励志劝勉;D——秀山丽水. 每种类型的篇目数相同,每位参赛者需从这四种类型中随机抽取一种.

(1) 小颖参加了这次大赛,她从中随机抽取一种类型,恰好抽中“B——爱国传承”的概率是_____;

(2) 小红和小明也参加了这次大赛,请用列表或画树状图的方法求他们抽中同一种类型篇目的概率.

16. 请仅用无刻度直尺按要求找出图中线段 AD 的中点 H (保留画图痕迹).

(1) 如图 1,点 E 在线段 BC 上,分别以 BE,CE 为斜边在 BC 的同侧作等腰直角 $\triangle ABE$ 和等腰直角 $\triangle DCE$,连接 AD ;

(2) 如图 2,点 E,F 均在线段 BC 上,分别以 BE,CF 为斜边在 BC 的同侧作等腰直角 $\triangle ABE$ 和等腰直角 $\triangle DCF$,连接 AD .

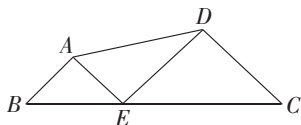


图 1

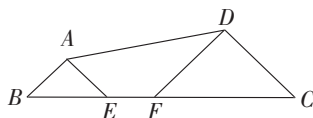
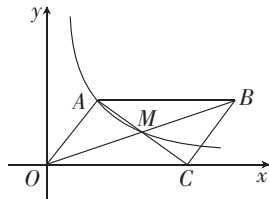


图 2

17. 如图,在平面直角坐标系 xOy 中, $\square OABC$ 的边 OC 在 x 轴上,对角线 AC,OB 相交于点 M ,反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象经过点 $A(3,5)$ 和点 M .

(1) 求 k 的值和点 M 的坐标;

(2) 若坐标轴上有一点 P ,满足 $\triangle OCP$ 的面积是 $\square OABC$ 面积的 4 倍,求点 P 的坐标.



四、(本大题共 3 小题,每小题 8 分,共 24 分)

18.《生物多样性公约》第十五次缔约方大会(COP15)再次延期至 2021 年 10 月 11 日至 24 日在云南省昆明市举办.为广泛宣传云南生物多样性,某校组织七、八年级各 200 名学生对《云南的生物多样性》白皮书相关知识进行学习并测试.现分别在七、八两个年级中随机抽取了 10 名学生,统计这部分学生的测试成绩,相关数据统计、整理如下:

【收集数据】

七年级 10 名学生的测试成绩(分):72,84,72,91,79,69,78,85,75,95.

八年级 10 名学生的测试成绩(分):85,72,92,84,80,74,75,80,76,82.

【整理数据】两组数据各分数段的学生人数情况如下表所示:

成绩	$60\leq x < 70$	$70\leq x < 80$	$80\leq x < 90$	$90\leq x < 100$
七年级	1	5	2	a
八年级	0	4	5	1

【分析数据】两组数据的平均数、中位数、众数、方差如下表:

统计量 年级	平均数	中位数	众数	方差
七年级	80	b	72	
八年级	80	80	c	33

【问题解决】根据以上信息,解答下列问题.

- (1) 填空: $a =$ _____, $b =$ _____, $c =$ _____.
- (2) 请你估计哪个年级的测试成绩更整齐.
- (3) 按照比赛规定 90 分及以上算优秀,请估计这两个年级测试成绩达到优秀的学生人数.

19. 2020 年 5 月,全国两会召开以后,应势复苏的“地摊经济”给市场带来了新活力. 雅苑社区拟建 A,B 两类摊位以激活“地摊经济”,每个 A 类摊位的占地面积比每个 B 类摊位的占地面积多 2 m^2 ,建 A 类摊位每平方米的费用为 50 元,建 B 类摊位每平方米的费用为 40 元,用 120 m^2 建 A 类摊位的个数恰好是用同样面积建 B 类摊位个数的 $\frac{2}{3}$.

(1) 求每个 A,B 类摊位的占地面积各为多少平方米.

(2) 该社区拟建 A,B 两类摊位共 100 个,且 B 类摊位的数量不多于 A 类摊位数量的 4 倍,求建造这 100 个摊位所需的最低费用.

20. 图 1 是由七根连杆链接而成的机械装置,图 2 是其示意图. 已知 O, P 两点固定,连杆 $PA = PC = 140 \text{ cm}$, $AB = BC = CQ = QA = 60 \text{ cm}$, $OQ = 50 \text{ cm}$, O, P 两点间的距离与 OQ 的长度相等. 当 OQ 绕点 O 转动时,点 A, B, C 的位置随之改变,点 B 恰好在线段 MN 上来回运动. 当点 B 运动至点 M 或 N 时,点 A, C 重合,点 P, Q, A, B 在同一条直线上(如图 3).

(1) 求点 P 到 MN 的距离;

(2) 当点 P, O, A 在同一直线上时,点 Q 到 MN 的距离为多少?

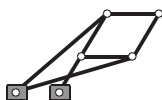


图 1

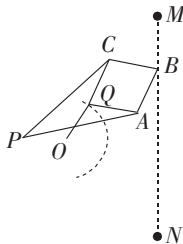


图 2

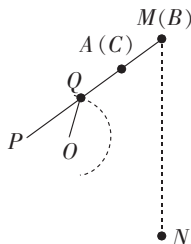


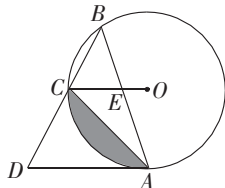
图 3

五、(本大题共 2 小题,每小题 9 分,共 18 分)

21. 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, $\angle ABC = 45^\circ$, $OC \parallel AD$, AD 交 BC 的延长线于点 D , AB 交 OC 于点 E .

(1) 求证: AD 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $AE = 5$, $BE = 3$, 求图中阴影部分的面积.



22. 【问题情境】

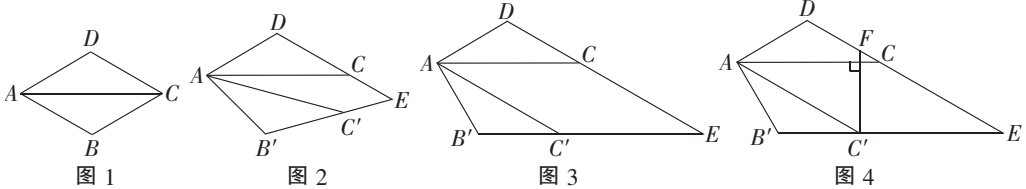
在综合实践课上,陈老师让同学们以“菱形纸片的剪拼”为主题开展数学活动.如图1,将一张菱形纸片 $ABCD$ ($\angle BAD = 60^\circ$) 沿对角线 AC 剪开,得到 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$.

【操作发现】

- (1) 将图1中的 $\triangle ABC$ 以点 A 为旋转中心,顺时针旋转角 α ($0^\circ < \alpha < 60^\circ$) 得到如图2所示的 $\triangle AB'C'$,分别延长 $B'C'$ 和 DC ,相交于点 E ,发现 $CE = C'E$. 请你证明这个结论.
- (2) 在(1)的基础上,当旋转角 α 等于多少度时,四边形 $AC'EC$ 是菱形? 请你利用图3说明理由.

【拓展探究】

- (3) 在满足(2)的基础上,过点 C' 作 $C'F \perp AC$,交 DC 于点 F . 试写出 AD, DF 与 AC 的数量关系,并说明理由.



六、(本大题共 12 分)

23. 若一次函数 $y = kx + m$ 的图象经过二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图象的顶点,则称这两个函数为“和谐函数组”.

- (1) 请判断一次函数 $y = -3x + 5$ 和二次函数 $y = x^2 - 4x + 5$ 是否为“和谐函数组”,并说明理由.
- (2) 若一次函数 $y = x + 2$ 和二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 为“和谐函数组”,已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图象的顶点在二次函数 $y = 2x^2 - 3x - 4$ 的图象上,且二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 经过一次函数 $y = x + 2$ 与 y 轴的交点,求二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的表达式.
- (3) 当 $-3 \leq x \leq -1$ 时,二次函数 $y = x^2 - 2x - 4$ 的最小值为 a . 若“和谐函数组”中的一次函数 $y = 2x + 3$ 的图象和二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (b, c 为参数) 的图象相交于 P, Q 两点, PQ 的长度为定值吗? 若是,请求出该定值;若不是,请说明理由.