明思e学网
www.jxmingsi.com

湖南省长沙市长郡中学2024届高三下学期模拟（三）数学试卷

注意事项：

1．本试卷满分150分，考试时间120分钟。

2．答题前，考生务必将姓名、考生号等个人信息填写在答题卡指定位置。

3．考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答。超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\left\{x\in\mathbf{N}\middle|2x^2-x-15\le 0\right\}$， $B=\left\{y\middle|y=\cos x\right\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$\left\{x\middle|-1\le x\le 1\right\}$　B．$\{0,1\}$　C．$\{-1,0,1\}$　D．$\{1\}$

2．在□ABC 中，角 A,B,C 的对边分别是 a，b，c，则“$\sin^2A+\sin^2B+\cos^2C>1$”是“□$ABC$ 是锐角三角形”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

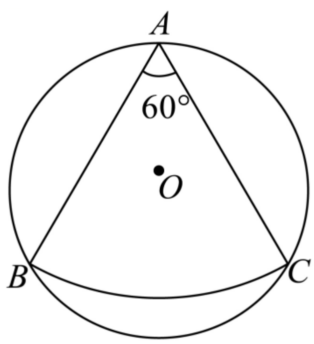
3．若实数 a，b，c 满足 $a=2\sin\frac{\pi}{12}$，$b^3=7$，$3^c=10$，则（　）

A．$a<b<c$　B．$b<c<a$　C．$a<c<b$　D．$b<a<c$

4．已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 在 $[0,2\pi]$ 上有且仅有4个零点，直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 为函数 $y=f(x)$ 图象的一条对称轴，则 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=$（　）

A．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　B．$-\frac{1}{2}$　C．$\frac{1}{2}$　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

5．如图，圆 O 内接一个圆心角为60°的扇形 ABC，在圆 O 内任取一点，该点落在扇形 ABC 内的概率为（　）



明思e学网
www.jxmingsi.com

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{4}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

6．已知三棱锥$V-ABC$的外接球的体积为$\frac{40\sqrt{30}}{27}\pi$，$VA\perp$平面$ABC$，$|AB|=2|AC|=2$，$\angle BAC=\frac{2}{3}\pi$，则三棱锥$V-ABC$的体积为（　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{21}}{6}$　　D．$\frac{\sqrt{30}}{6}$

7. 过双曲线$C:\frac{x^2}{4}-y^2=1$的左焦点F_1作倾斜角为θ的直线l交C于M,N两点. 若$\overrightarrow{MF_1}=3\overrightarrow{F_1N}$，则$|\cos\theta|=$（　）

A．$\frac{\sqrt{10}}{10}$　　B．$\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　C．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{5}$

8．数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n,a_{n+1}=\frac{S_n}{a_n}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，则$\sum\limits_{i=1}^{5}a_{2i}-\sum\limits_{i=1}^{6}a_{2i-1}$可以是（　）

A．18　　B．12　　C．9　　D．6

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9．若正实数a,b满足$12a+b=ab$，则（　）

A．$b>12$

B．有序数对$(a,b)\left(a,b\in\mathbf{N}^*\right)$有 6 个

C．$a+b$的最小值是$12+4\sqrt{3}$

D．$a^2+b^2-2a-24b+121>0$

10．“体育强则中国强，国运兴则体育兴”.为备战 2024 年巴黎奥运会，运动员们都在积极参加集训，已知某跳水运动员在一次集训中 7 位裁判给出的分数分别为：9.1，9.3，9.4，9.6，9.8，10，10，则这组数据的（　）

A．平均数为 9.6　　B．众数为 10

C．第 80 百分位数为 9.8　　D．方差为$\frac{37}{350}$

11．已知平面α//平面β，且均与球O相交，得截面圆O_1与截面圆O_2，O为线段O_1O_2的中点，且$O_1O_2=2\sqrt{3}$，线段AB与CD分别为圆O_1与圆O_2的直径，则（　）

A．若$\triangle ABC$为等边三角形，则球的体积为18π

B．若P为圆O_1上$\overset{\frown}{AB}$的中点，$AB\perp AC$，且$AB=AC$，则OP与AC所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$

C．若$AB\perp CD$，且$AB=2\sqrt{6}$，则$AC\perp BD$

D．若$AB\perp CD$，且AC与BD所成的角为60°，则球O的表面积为20π或84π

明思e学网
www.jxmingsi.com

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12．在□ABC 中，$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$，$P$ 是 MC 的中点，延长 AP 交 BC 于点 D．设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，则 $\overrightarrow{AP}$ 可用 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示为________，若 $AD=\sqrt{6}$，$\cos\angle BAC=\dfrac{3}{5}$,则□$ABC$ 面积的最大值为_____.

13．已知 F_1,F_2 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$ 的左、右焦点，P 是 C 上一点．过点 F_1 作直线 PF_1 的垂线 l_1，过点 F_2 作直线 PF_2 的垂线 l_2．若 l_1,l_2 的交点 Q 在 C 上（P,Q 均在 x 轴上方），且 $|PQ|=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$，则 C 的离心率为________.

14．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$，$f(1)=1$，则 $f(2024)=$_____.

四、解答题：本题共 5 小题，第 15 小题 13 分，第 16、17 小题 15 分，第 18、19 小题 17 分，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

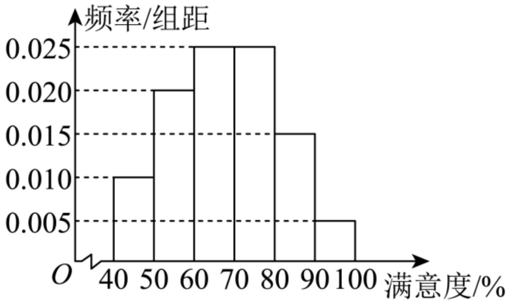
15．在□ABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $b(\cos C+1)=c(2-\cos B)$.

(1)证明：$a+b=2c$.

(2)若 $a=6$，$\cos C=\dfrac{9}{16}$，求□ABC 的面积.

明思e学网
www.jxmingsi.com

16．刷脸时代来了，人们为“刷脸支付”给生活带来的便捷感到高兴，但“刷脸支付”的安全性也引起了人们的担忧.某调查机构为了解人们对“刷脸支付”的接受程度，通过安全感问卷进行调查（问卷得分在40～100分之间），并从参与者中随机抽取200人.根据调查结果绘制出如图所示的频率分布直方图.



(1)据此估计这200人满意度的平均数（同一组中的数据用该组区间的中点值作代表）；

(2)某大型超市引入“刷脸支付”后，在推广“刷脸支付”期间，推出两种付款方案：方案一：不采用“刷脸支付”，无任何优惠，但可参加超市的抽奖返现金活动.活动方案为：从装有8个形状、大小完全相同的小球（其中红球3个，黑球5个）的抽奖盒中，一次性摸出3个球，若摸到3个红球，返消费金额的20%；若摸到2个红球，返消费金额的10%，除此之外不返现金.

方案二：采用“刷脸支付”，此时对购物的顾客随机优惠，但不参加超市的抽奖返现金活动，根据统计结果得知，使用“刷脸支付”时有$\frac{1}{6}$的概率享受8折优惠，有$\frac{1}{3}$的概率享受9折优惠，有$\frac{1}{2}$的概率享受95折优惠.现小张在该超市购买了总价为1000元的商品.

①求小张选择方案一付款时实际付款额X的分布列与数学期望；

②试从期望角度，比较小张选择方案一与方案二付款，哪个方案更划算？（注：结果精确到0.1）

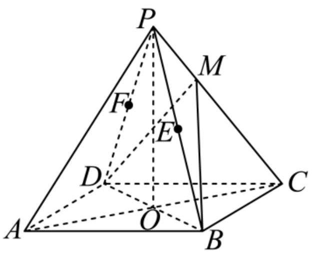
明思e学网
www.jxmingsi.com

17．已知数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，且$S_n=\frac{1}{2}n\left(n+1\right)$.

(1)求$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

(2)若数列$\left\{b_n\right\}$满足$b_n=\begin{cases}\frac{1}{a_na_{n+2}},n为奇数\\2^{a_n},n为偶数\end{cases}$，求$\left\{b_n\right\}$的前$2n$项和$T_{2n}$.

18．如图，已知四棱锥$P-ABCD$的底面是菱形，对角线AC,BD交于点O，$OA=4$，$OB=3$，$OP=4,OP\perp$底面$ABCD$，E,F分别为侧棱PB,PD的中点，点M在CP上且$\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{MP}$.



(1)求证：A,E,M,F四点共面；

(2)求直线PA与平面BDM所成角的正弦值.

明思e学网
www.jxmingsi.com

19．已知抛物线 $x^2=2py\left(p>0\right)$ 上的动点到其焦点的距离的最小值为 $\frac{1}{4}$.

(1)求抛物线的方程；

(2)过抛物线上一点 $A\left(1,y_0\right)\left(y_0>0\right)$ 作抛物线的切线，分别交 x 轴于点 D，交 y 轴于点 B . 点 C 在抛物线上，点 E 在线段 AC 上，满足能 $\frac{|AE|}{|EC|}=\lambda_1$；点 G 在线段 BC 上，满足 $\frac{|BG|}{|GC|}=\lambda_2$，且 $\lambda_1+\lambda_2=1$，线段 CD 与 EG 交于点 P，当点 C 在抛物线上移动时，求点 P 的轨迹方程 Γ .

(3)将 Γ 向左平移 $\frac{1}{3}$ 个单位，得到 Γ'，已知 $R\left(0,m\right)$，$Q\left(0,-m\right)\left(m>0\right)$，过点 R 作直线 l 交 Γ' 于 M,N . 设 $\overrightarrow{MR}=\lambda\overrightarrow{RN}$，求 $\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{QM}-\lambda\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{QN}$ 的值

明思e学网
www.jxmingsi.com

参考答案：

1．B

【分析】根据题意，将集合 A,B 化简，然后结合交集的运算即可得到结果.

【详解】$A=\left\{x\in\mathbf{N}\middle|2x^2-x-15\le 0\right\}=\left\{x\in\mathbf{N}\middle|-\frac{5}{2}\le x\le 3\right\}=\{0,1,2,3\}$，

而 $B=\left\{y\middle|-1\le y\le 1\right\}$，故 $A\cap B=\{0,1\}$，

故选：B.

2．B

【分析】利用正弦定理和余弦定理可得 $\cos C>0$，但 A,B 不一定为锐角；若△ABC 是锐角三角形可知满足 $\sin^2A+\sin^2B+\cos^2C>1$，即可得出结论.

【详解】由△ABC 是锐角三角形，得 $0<C<\frac{\pi}{2}$，从而 $\cos C>0$，

故 $a^2+b^2-c^2>0$，即 $\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C>0$，即 $\sin^2A+\sin^2B-\left(1-\cos^2C\right)>0$，

可得 $\sin^2A+\sin^2B+\cos^2C>1$，即必要性成立；

反之，若"$\sin^2A+\sin^2B+\cos^2C>1$"可得 $\sin^2A+\sin^2B-\cos^2C-1>0$，即 $\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C>0$，

可得 $a^2+b^2-c^2>0$，可知 $\cos C>0$，但角 A,B 可能为钝角，所以充分性不成立；

故选：B

3．A

【分析】首先判断 $a<1$，$1<b<2$，且 $c=\log_3 10$，根据对数函数的性质可得 $c>2$，即可判断.

【详解】因为 $a=2\sin\frac{\pi}{12}<2\sin\frac{\pi}{6}=1$，

又 $b^3=7$，则 $b=\sqrt[3]{7}$，且 $1<\sqrt[3]{7}<\sqrt[3]{8}=2$，即 $1<b<2$，

因为 $3^c=10$，所以 $c=\log_3 10>\log_3 9=2$，

所以 $c>b>a$.

故选：A

4．C

【分析】以 $\omega x+\frac{\pi}{6}$ 为整体，根据题意结合零点可得 $\frac{23}{12}\le\omega<\frac{29}{12}$，结合对称性可得 $\omega=2$，进而可求 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

【详解】因为 $\omega>0$，且 $x\in[0,2\pi]$，则 $\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},2\pi\omega+\frac{\pi}{6}\right]$，

明思e学网 www.jxmingsi.com

由题意可得：$4\pi \le 2\pi\omega + \frac{\pi}{6} < 5\pi$，解得 $\frac{23}{12} \le \omega < \frac{29}{12}$，

又因为直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 为函数 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴，

则 $\frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$，解得 $\omega = 6k + 2, k \in \mathbf{Z}$，

可知 $k = 0, \omega = 2$，即 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$，

所以 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

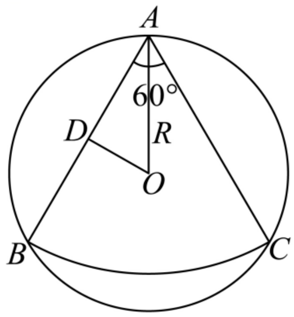
故选：C.

【点睛】关键点点睛：以 $\omega x + \frac{\pi}{6}$ 为整体，可得 $\omega x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, 2\pi\omega + \frac{\pi}{6}\right]$，结合正弦函数零点分析可知右端点 $2\pi\omega + \frac{\pi}{6}$ 的取值范围，进而可得 ω 的取值范围.

5．C

【分析】根据圆的半径与扇形半径的关系及扇形的面积公式，由几何概型求解即可.

【详解】设圆的半径为 R，过 O 作 $OD \perp AB$ 于 D 点，如图，



则扇形的半径 $r = 2R\cos 30° = \sqrt{3}R$，

所以扇形的面积 $S' = \frac{1}{2}r^2\alpha = \frac{3}{2} \times \frac{\pi}{3}R^2 = \frac{\pi R^2}{2}$，

圆的面积 $S = \pi R^2$，

由几何概型可得：$P = \frac{S'}{S} = \frac{\frac{\pi R^2}{2}}{\pi R^2} = \frac{1}{2}$.

故选：C

6．A

【分析】由题意设三棱锥 $V - ABC$ 外接球的半径为 R，由 $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{40\sqrt{30}}{27}\pi$ 解出 R，再由余弦定理解出 $|BC|$，设 $\triangle ABC$ 外接圆半径 r，解出并求出 $|VA|$，进而解出三棱锥体积即可.

明思e学网
www.jxmingsi.com

【详解】设三棱锥$V-ABC$外接球的半径为R，则$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{40\sqrt{30}}{27}\pi$，解得$R=\frac{\sqrt{30}}{3}$；

因为$|AB|=2|AC|=2$，$\angle BAC=\frac{2}{3}\pi$，

所以$BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\angle BAC}=\sqrt{7}$，

设□ABC外接圆的半径为r，则$2r=\frac{\sqrt{7}}{\sin\frac{2}{3}\pi}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$，所以$r=\frac{\sqrt{21}}{3}$，

故$\frac{|VA|}{2}=\sqrt{R^2-r^2}=1$，所以$|VA|=2$，

所以三棱锥$V-ABC$的体积为$\frac{1}{3}VA\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}\times 2\times\frac{1}{2}\times 2\times 1\times\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选：A.

7．D

【分析】根据双曲线的定义，结合焦点三角形以及余弦定理即可求解.

【详解】设双曲线的右焦点为F，连接MF,NF，

由题意可得$a=2,b=1,c=\sqrt{5}$，

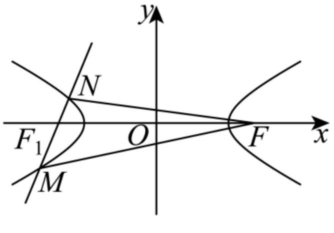
设$\left|\overrightarrow{MF_1}\right|=3\left|\overrightarrow{F_1N}\right|=3x,\left|\overrightarrow{MF}\right|=2a+3x=4+3x,\left|\overrightarrow{FN}\right|=2a+x=4+x,$

由余弦定理可得$\cos\angle NF_1F+\cos\angle MF_1F=\frac{|F_1N|^2+|F_1F|^2-|NF|^2}{2|F_1N|\cdot|F_1F|}+\frac{|F_1M|^2+|F_1F|^2-|MF|^2}{2|F_1M|\cdot|F_1F|}=0$，

即$\frac{x^2+4c^2-(4+x)^2}{2\cdot x\cdot 2c}+\frac{9x^2+4c^2-(4+3x)^2}{2\cdot 3x\cdot 2c}=0$，解得$x=\frac{1}{3}$，

所以$\cos\angle MF_1F=\frac{1^2+4\left(\sqrt{5}\right)^2-(4+1)^2}{2\times 1\times 2\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，故$|\cos\theta|=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

故选：D



8．C

【分析】易通过$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$，可得$a_{n+2}-a_n=1$，也可求得$a_2=1$，但此数列存在不确定的首项，所以在求和后发现结果为$-6a_1$，与选项中的四个数进行对比分析，发现a_1一定不能为负整数，所以只能选 C.

明思e学网 www.jxmingsi.com

【详解】由 $a_{n+1}=\frac{S_n}{a_n}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$ 可得：$S_n=a_{n+1}\cdot a_n$ 且 $a_n\neq 0$，

由上式又有：$a_2=\frac{S_1}{a_1}=1$，

还有 $S_{n+1}=a_{n+2}\cdot a_{n+1}$，两式相减得：$a_{n+1}=a_{n+2}\cdot a_{n+1}-a_{n+1}\cdot a_n$，

两边同时除以 $a_{n+1}(a_{n+1}\neq 0)$ 得：$a_{n+2}-a_n=1$，

由上式可知数列 $\{a_n\}$ 的奇数项和偶数项分别成等差数列，公差为 1，

所以 $\sum_{i=1}^{5}a_{2i}-\sum_{i=1}^{6}a_{2i-1}=\left(a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}\right)-\left(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}\right)$

$=\left(1+2+3+4+5\right)-\left(a_1+a_1+1+a_1+2+a_1+3+a_1+4+a_1+5\right)=-6a_1$，

由此数列的奇数项公式为 $a_{2n-1}=a_1+(n-1)$，又由 $a_n\neq 0$，

所以可以判断 a_1 一定不能为负整数，即只能有 $-6a_1=9$，

故选：C.

9．AB

【分析】对于 A，使用条件即可证明 $b>12$；对于 B，设 $a-1=n\in\mathbf{N}^*$ 并证明 n 整除 12，再验证 12 的全部因子即可；对于 C，直接证明 $a+b>12+4\sqrt{3}$ 即可否定；对于 D，给出 $a=1+2\sqrt{3}$，$b=12+2\sqrt{3}$ 作为反例即可否定.

【详解】对于 A，由已知正实数 a,b 满足 $12a+b=ab$，有 $a=\frac{ab}{b}=\frac{12a+b}{b}>\frac{b}{b}=1$，

$b=\frac{ab}{a}=\frac{12a+b}{a}>\frac{12a}{a}=12$，故 A 正确；

对于 B，由于 $a\in\mathbf{N}^*$，$a>1$，故 $a-1$ 是正整数，设 $a-1=n\in\mathbf{N}^*$，则

$12=ab-\left(12a+b\right)+12=\left(a-1\right)\left(b-12\right)=n\left(b-12\right)$，所以 $b=12+\frac{12}{n}$.

而 $b\in\mathbf{N}^*$，故 n 整除 12，得 $n\in\{1,2,3,4,6,12\}$.

验证知 $n\in\{1,2,3,4,6,12\}$ 时，$(a,b)=\left(1+n,12+\frac{12}{n}\right)$ 都满足条件，

所以符合条件的有序数对 $(a,b)\left(a,b\in\mathbf{N}^*\right)$ 有 6 个，故 B 正确；

对于 C，由于 $12=ab-\left(12a+b\right)+12=\left(a-1\right)\left(b-12\right)$，且 $a>1$，$b>12$，

从而 $a+b=13+\left(a-1\right)+\left(b-12\right)\geq 13+2\sqrt{\left(a-1\right)\left(b-12\right)}=13+2\sqrt{12}=13+4\sqrt{3}>12+4\sqrt{3}$，

明思e学网 www.jxmingsi.com

当 $a=1+2\sqrt{3}$，$b=12+2\sqrt{3}$ 时，等号成立，故 C 错误；

对于 D，当 $a=1+2\sqrt{3}$，$b=12+2\sqrt{3}$ 时，有 $(a-1)(b-12)=2\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}=12$，

故 $ab-(12a+b)=(a-1)(b-12)-12=0$，从而 $12a+b=ab$.

但此时 $a^2+b^2-2a-24b+121=(a-1)^2+(b-12)^2-24=12+12-24=0$，故 D 错误.

故选：AB.

【点睛】关键点点睛：本题的关键点是 C 选项中对基本不等式的适当运用.

10．ABD

【分析】根据平均数、众数、百分位数和方差的定义求解.

【详解】对于 A，平均数 $=\frac{1}{7}(9.1+9.3+9.4+9.6+9.8+10+10)=9.6$，故 A 正确；

对于 B，出现次数最多的数为 10，故 B 正确；

对于 C，7×0.8=5.6，第 80 百分位数为第 6 位，即 10，故 C 错误；

对于 D，方差为 $\frac{1}{7}\left[(9.1-9.6)^2+(9.3-9.6)^2+(9.4-9.6)^2+(9.6-9.6)^2+(9.8-9.6)^2+2(10-9.6)^2\right]=\frac{37}{350}$，故 D 正确.

故选：ABD.

11．BCD

【分析】由$\triangle ABC$ 为等边三角形求出外接圆半径，再得到球的半径即可求出体积判断 A，利用中位线可得出 OP 与 AC 所成角为 $\angle O_1OP$，解直角三角形即可判断 B，建立空间直角坐标系利用向量法证明垂直即可判断 C，利用向量法由异面直线所成角求出圆半径 r，再得出球半径即可判断 D.

【详解】由球心 O 为线段 O_1O_2 的中点，可知圆 O_1、圆 O_2 的半径相同．设球 O 的半径为 R，圆 O_1 与圆 O_2 的半径为 r.

对于 A，由题意，$R^2=r^2+3, AC^2=AO_1^2+CO_1^2=AO_1^2+O_4O_2^2+CO_2^2=2r^2+12, AB^2=4r^2$.因为 $AB=AC$，所以 $2r^2+12=4r^2$，解得 $r=\sqrt{6}$（负值已舍去）.

所以 $R^2=r^2+3=9$，解得 $R=3$（负值已舍去），所以 $V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3=36\pi$，故 A 错误.

对于 B，因为 $AB\cap AC=A$，所以 A,B,C 三点在同一平面内.

因为点 O_1,O 分别为线段 AB,BC 的中点，所以 OO_1 为$\triangle ABC$ 的中位线，所以 $AC\parallel OO_1$，

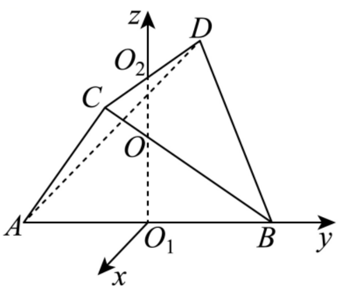
明思e学网
www.jxmingsi.com

所以$\angle O_1OP$为OP与AC所成的角.因为$AB=AC$，所以$OO_1=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}AB=PO_1$.

又$PO_1\perp OO_1$，所以$\angle O_1OP=45°$，所以$\cos\angle O_1OP=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故B正确.

对于C，因为$AB\perp CD$，所以以O_1为原点，分别以AB，O_1O_2所在直线为y轴、z轴，

以圆O_1中垂直于AB的直径所在的直线为x轴，建立空间直角坐标系，如图，



则$A\left(0,-\sqrt{6},0\right),B\left(0,\sqrt{6},0\right),C\left(\sqrt{6},0,2\sqrt{3}\right),D\left(-\sqrt{6},0,2\sqrt{3}\right)$，

所以$\overrightarrow{AC}=\left(\sqrt{6},\sqrt{6},2\sqrt{3}\right),\overrightarrow{BD}=\left(-\sqrt{6},-\sqrt{6},2\sqrt{3}\right)$，

所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\sqrt{6}\times\left(-\sqrt{6}\right)+\sqrt{6}\times\left(-\sqrt{6}\right)+2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=0$，所以$AC\perp BD$，故C正确.

对于D，以O_1为原点，以AB，O_1O_2所在直线分别为y轴、z轴，

以圆O_1中垂直于AB的直径所在的直线为x轴，建立空间直角坐标系，如上图，

则$A\left(0,-r,0\right),B\left(0,r,0\right),C\left(r,0,2\sqrt{3}\right),D\left(-r,0,2\sqrt{3}\right)$，

所以$\overrightarrow{AC}=\left(r,r,2\sqrt{3}\right),\overrightarrow{BD}=\left(-r,-r,2\sqrt{3}\right)$，

所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=-r^2-r^2+12=-2r^2+12,\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{2r^2+12}$，

所以$\left|\cos\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|}=\frac{\left|-2r^2+12\right|}{\sqrt{2r^2+12}\cdot\sqrt{2r^2+12}}=\frac{1}{2}$，

解得$r=\sqrt{2}$（负值已舍去）或$r=3\sqrt{2}$（负值已舍去）.

当$r=\sqrt{2}$时，球O的半径为$R=\sqrt{r^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{5}$，所以球$O$的表面积$S=4\pi R^2=20\pi$；

当$r=3\sqrt{2}$时，球O的半径为$R=\sqrt{r^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{21}$，所以球$O$的表面积$S=4\pi R^2=84\pi$，故D正确.

故选：BCD.

【点睛】关键点点睛：由于球的半径未知，直径AB与CD间的位置关系未知，本题解题关键在于借助空间向量可以化繁为简，充分体现了空间向量的工具作用.

明思e学网
www.jxmingsi.com

12. $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$， $\frac{25}{8}$

【分析】根据几何关系，表示向量$\overrightarrow{AP}$；设$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AD}$，再利用平面向量基本定理表示$\overrightarrow{BP}$，即可求解$\lambda$，再根据$AD=6$，以及基本不等式，三角形面积公式，即可求解.

【详解】由点P是MC的中点，

则$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$；

设$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BD}=\mu\overrightarrow{BC}$，

则$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BM}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}$，

$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\lambda\left(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}\right)-\overrightarrow{AB}$，

$=\lambda\left(\mu\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\right)-\overrightarrow{AB}=\lambda\left(\mu\overrightarrow{AC}-\mu\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\right)-\overrightarrow{AB}$，

$=\lambda\mu\overrightarrow{AC}+\left(\lambda-1-\lambda\mu\right)\overrightarrow{AB}=\lambda\mu\vec{b}+\left(\lambda-1-\lambda\mu\right)\vec{a}$，

所以$\begin{cases}\lambda\mu=\frac{1}{2}\\ \lambda-1-\lambda\mu=-\frac{2}{3}\end{cases}$，得$\lambda=\frac{5}{6},\mu=\frac{3}{5}$，

所以$\overrightarrow{AP}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AD}$，即$\overrightarrow{AD}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$，

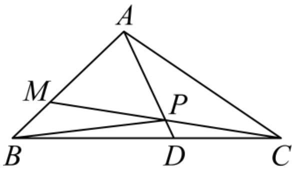
因为$AD=\sqrt{6}$，

所以$\left(\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}\right)^2=\frac{4}{25}\vec{a}^2+\frac{9}{25}\vec{b}^2+\frac{12}{25}\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{4}{25}\vec{a}^2+\frac{9}{25}\vec{b}^2+\frac{36}{125}|\vec{a}||\vec{b}|$，

$\geq 2\times\frac{6}{25}\times|\vec{a}||\vec{b}|+\frac{36}{125}\times|\vec{a}||\vec{b}|=\frac{96}{125}|\vec{a}||\vec{b}|$，

即$\frac{96}{125}|\vec{a}||\vec{b}|\leq 6$，即$|\vec{a}||\vec{b}|\leq\frac{125}{16}$，当$\frac{2}{5}|\vec{a}|=\frac{3}{5}|\vec{b}|$时，即$|\vec{a}|=\frac{3}{2}|\vec{b}|=\frac{5\sqrt{30}}{8}$时等号成立，

所以□ABC面积的最大值为$\frac{1}{2}\times\frac{125}{16}\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\times\frac{125}{16}\times\frac{4}{5}=\frac{25}{8}$.



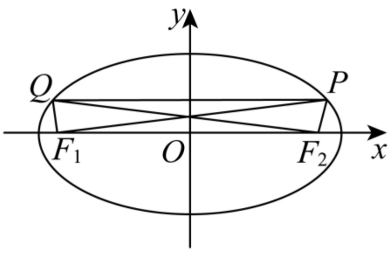
故答案为：$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$；$\frac{25}{8}$.

13. $\frac{\sqrt{3}}{2}$/$\frac{1}{2}\sqrt{3}$

明思e学网 www.jxmingsi.com

【分析】设$P\left(m,n\right)$，可得l_1,l_2的方程，联立方程求得$Q\left(-m,\dfrac{m^2-c^2}{n}\right)$，结合对称性可知$m^2=\dfrac{16}{5}$，进而列式求$a^2,c^2$，即可得离心率.

【详解】设$P\left(m,n\right)$，$F_1\left(-c,0\right),F_2\left(c,0\right)$，由题意可知：$m\neq\pm c,n>0$，



则直线PF_1的斜率$k_{PF_1}=\dfrac{n}{m+c}$，可知l_1的方程为$y=-\dfrac{m+c}{n}\left(x+c\right)$，

同理可得：l_2的方程为$y=-\dfrac{m-c}{n}\left(x-c\right)$，

联立方程$\begin{cases}y=-\dfrac{m+c}{n}\left(x+c\right)\\ y=-\dfrac{m-c}{n}\left(x-c\right)\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=-m\\ y=\dfrac{m^2-c^2}{n}\end{cases}$，即$Q\left(-m,\dfrac{m^2-c^2}{n}\right)$，

因为Q在C上，可知P,Q关于x轴对称，

且$\left|PQ\right|=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$，则$2\left|m\right|=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$，可得$m^2=\dfrac{16}{5}$，

又因为$\dfrac{m^2-c^2}{n}=n$，即$\dfrac{16}{5}-c^2=n^2$，

由题意可得：$\begin{cases}\dfrac{16}{5}-c^2=n^2\\ \dfrac{\frac{16}{5}}{a^2}+n^2=1\\ c^2=a^2-1\end{cases}$，整理得$5a^4-16a^2-16=0$，

解得$a^2=4$或$a^2=-\dfrac{4}{5}$（舍去），则$c^2=a^2-1=3$，

所以C的离心率为$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

【点睛】方法点睛：求椭圆的离心率或离心率的范围，关键是根据已知条件确定a，b，c的等量关系或不等

明思e学网 www.jxmingsi.com

关系，然后把 b 用 a，c 代换，求 e 的值.

14．-1

【分析】令 $x=1, y=0$ 求 $f(0)$，令 $x=y=1$ 求 $f(2)$，令 $y=1$ 得 $f(x-1)=f(x)-f(x+1)$，通过迭代求周期，然后可解.

【详解】令 $x=1, y=0$，则 $f(1)+f(1)=2f(1)=f(1)f(0)$，

因为 $f(1)=1$，所以 $f(0)=2$，

令 $x=y=1$，则 $f(2)+f(0)=f(1)f(1)$，得 $f(2)=-1$，

令 $y=1$，则 $f(x+1)+f(x-1)=f(x)f(1)=f(x)$，即 $f(x-1)=f(x)-f(x+1)$，

所以 $f(x)=f(x+1)-f(x+2)$，

所以 $f(x-1)=f(x+1)-f(x+2)-f(x+1)=-f(x+2)$

所以 $f(x+2)=-f(x+5)$，所以 $f(x-1)=f(x+5)$，即 $f(x)=f(x+6)$，

$f(x)$ 是以 6 为周期的周期函数，

所以 $f(2024)=f(337\times 6+2)=f(2)=-1$，

故答案为：-1.

15．(1)证明见解析

(2) $\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$ 或 $\dfrac{135\sqrt{7}}{16}$

【分析】（1）利用正弦定理及正弦的和角公式计算即可；

（2）利用余弦定理及（1）的结论，三角形面积公式计算即可.

【详解】（1）根据正弦定理知 $b(\cos C+1)=c(2-\cos B)\Rightarrow \sin B\cos C+\sin B=2\sin C-\sin C\cos B$，

整理得 $\sin B\cos C+\sin C\cos B+\sin B=2\sin C\Rightarrow \sin(B+C)+\sin B=2\sin C$，

因为 $A+B+C=\pi$，

所以 $\sin A=\sin(B+C)\Rightarrow \sin A+\sin B=2\sin C$，

由正弦定理可得 $a+b=2c$；

明思e学网 www.jxmingsi.com

（2）因为$\cos C=\frac{9}{16}$，所以$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{5\sqrt{7}}{16}$，

由余弦定理可得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，即$c^2=36+b^2-\frac{27}{4}b$，

则$4c^2=144+4b^2-27b$，

因为$a=6$，所以$6+b=2c$，所以$36+12b+b^2=4c^2$，

则$144+4b^2-27b=36+12b+b^2$，即$b^2-13b+36=0$，

解得$b=4$或$b=9$，

当$b=4$时，$a=6$，此时$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times4\times6\times\frac{5\sqrt{7}}{16}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$，

当$b=9$时，$a=6$，此时$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times6\times9\times\frac{5\sqrt{7}}{16}=\frac{135\sqrt{7}}{16}$.

所以$\triangle ABC$的面积为$\frac{15\sqrt{7}}{4}$或$\frac{135\sqrt{7}}{16}$.

16．(1)68

(2)①分布列见详解，$E(X)\approx969.6$；②选择方案二更划算.

【分析】（1）根据直方图估算平均数的方法直接计算即可；

（2）①先确定X的取值，然后根据超几何分布概率公式求概率，即可的分布列，再由期望公式求出期望；②确定实际付款金额Y的值，然后根据所给概率写出分布列，即可计算出期望，通过比较期望大小即可作出判断.

【详解】（1）由直方图可知，满意度的平均数为：

$(0.01\times45+0.02\times55+0.025\times65+0.025\times75+0.015\times85+0.005\times95)\times10=68$.

（2）①摸到3个红球，返消费金额的20%，实际付款为$1000(1-20\%)=800$；

摸到2个红球，返消费金额的10%，实际付款为$1000(1-10\%)=900$，

所以X的可能取值为$800,900,1000$，

因为$P(X=800)=\frac{C_3^3C_5^0}{C_8^3}=\frac{1}{56},P(X=900)=\frac{C_3^2C_5^1}{C_8^3}=\frac{15}{56}$，

所以$P(X=1000)=1-\frac{1}{56}-\frac{15}{56}=\frac{5}{7}$，

X的分布列为：

X	800	900	1000

明思e学网
www.jxmingsi.com

P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{5}{7}$

所以$E\left(X\right)=800\times\frac{1}{56}+900\times\frac{15}{56}+1000\times\frac{5}{7}\approx969.6$（元）.

②若选择方案二，记实际付款金额为 Y，依题意，Y 的可能取值为$800,900,950$，

因为$P\left(Y=800\right)=\frac{1}{6},P\left(Y=900\right)=\frac{1}{3},P\left(Y=950\right)=\frac{1}{2}$，

所以，Y 的分布列为：

Y	800	900	950
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

所以，$E\left(Y\right)=800\times\frac{1}{6}+900\times\frac{1}{3}+950\times\frac{1}{2}\approx908.3$（元）

因为$E\left(X\right)>E\left(Y\right)$，所以选择方案二付款更划算.

17．(1)$a_n=n$；

(2)$T_{2n}=\frac{n}{2n+1}+\frac{4^{n+1}-4}{3}$.

【分析】（1）根据a_n,S_n的关系由：$a_n=S_n-S_{n-1}$求解即可；

（2）根据b_n通项分奇偶分别计算求和，结合裂项相消和等比数列求和公式即可.

【详解】（1）当$n=1$时，$a_1=S_1=1$.

当$n\ge2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{2}n\left(n+1\right)-\frac{1}{2}n\left(n-1\right)=n$，

当$n=1$时，也符合$a_n=n$.

综上，$a_n=n$.

（2）由$b_n=\begin{cases}\frac{1}{a_na_{n+2}},n\text{为奇数}\\2^n,n\text{为偶数}\end{cases}\Rightarrow b_n=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right),n\text{为奇数}\\2^n,n\text{为偶数}\end{cases}$

则$T_{2n}=\left(b_1+b_3+\cdots+b_{2n-1}\right)+\left(b_2+b_4+\cdots+b_{2n}\right)$

$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]+2^2+2^4+\cdots+2^{2n}$

明思e学网
www.jxmingsi.com

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)+\frac{4\left(1-4^{n}\right)}{1-4}$

$=\frac{n}{2n+1}+\frac{4^{n+1}-4}{3}$，

故$\{b_n\}$的前$2n$项和$T_{2n}=\frac{n}{2n+1}+\frac{4^{n+1}-4}{3}$.

18．(1)证明见解析

(2)$\frac{\sqrt{10}}{10}$

【分析】(1）易知$AC\perp BD$，由线面垂直的性质可得$OP\perp AC,OP\perp BD$，建立如图空间直角坐标系$O-xyz$，利用空间向量法证明$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$，即可证明；

（2）由（1）求出$\overrightarrow{BM}$的坐标，利用空间向量法求解线面角即可.

【详解】(1）因为平面$ABCD$是菱形，所以$AC\perp BD$，

由$OP\perp$平面$ABCD$，$AC,BD\subset$平面$ABCD$，得$OP\perp AC,OP\perp BD$，

所以OP,OA,OB两两垂直，建立如图空间直角坐标系$O-xyz$，

$A(4,0,0),B(0,3,0),C(-4,0,0),D(0,-3,0),P(0,0,4)$，则$E(0,\frac{3}{2},2),F(0,-\frac{3}{2},2)$，

由$\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{MP}$，得$M(-\frac{4}{3},0,\frac{8}{3})$，

所以$\overrightarrow{AF}=(-4,-\frac{3}{2},2),\overrightarrow{AE}=(-4,\frac{3}{2},2),\overrightarrow{AM}=(-\frac{16}{3},0,\frac{8}{3})$，

则$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$，所以$\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}$共面，

又直线AM,AE,AF的公共点为A，所以A,E,M,F四点共面；

（2）由（1）知，$\overrightarrow{PA}=(4,0,-4),\overrightarrow{DB}=(0,6,0),\overrightarrow{BM}=(-\frac{4}{3},-3,\frac{8}{3})$，

设平面BDM的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

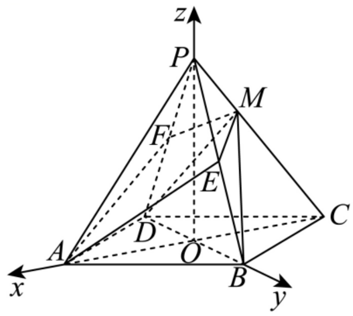
则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DB}=6y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BM}=-\frac{4}{3}x-3y+\frac{8}{3}z=0\end{cases}$，令$z=1$，得$x=2,y=0$，

所以$\vec{n}=(2,0,1)$，

得$\left|\cos\overrightarrow{PA},\vec{n}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\vec{n}\right|}=\frac{4}{4\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

明思e学网
www.jxmingsi.com

即直线 PA 与平面 BDM 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$.



19．(1) $x^2 = y$

(2) $y=\frac{1}{3}(3x-1)^2\left(x\neq\frac{2}{3}\right)$

(3)0

【分析】（1）根据抛物线的几何意义求出 p，即可求解；

（2）利用导数的几何意义求出切线方程，则 D 为 AB 的中点，利用平面向量的基本定理可证得 P 是 $\triangle ABC$ 的重心，建立方程组，即可求解；

（3）易知直线 l 的斜率存在，设直线 $l, M\left(x_1,y_1\right), N\left(x_2,y_2\right)$，联立抛物线方程，利用韦达定理，由 $\overrightarrow{MR}=\lambda\overrightarrow{RN}$ 可得 $x_1=-\lambda x_2$，结合平面向量的坐标表示求解 $\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{QM}-\lambda\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{QN}$ 即可.

【详解】（1）因为抛物线 $x^2=2py\left(p>0\right)$ 上的动点到其焦点的距离的最小值为 $\frac{1}{4}$，

所以 $\frac{p}{2}=\frac{1}{4}$，解得 $p=\frac{1}{2}$，

故抛物线方程为 $x^2=y$；

（2）由（1）知，$y=x^2$，则 $A(1,1)$，$y'=2x$，

所以在点 A 的切线方程为 $y-1=2(x-1)$，即 $y=2x-1$，得 $D(\frac{1}{2},0), B(0,-1)$，

所以 D 为 AB 的中点，得 $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1+\lambda_1}{2}\overrightarrow{CE}+\frac{1+\lambda_2}{2}\overrightarrow{CG}$，

设 $\overrightarrow{CP}=\mu\overrightarrow{CE}+\left(1-\mu\right)\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{CP}$，则 $\overrightarrow{CD}=k\mu\overrightarrow{CE}+k\left(1-\mu\right)\overrightarrow{CG}$，

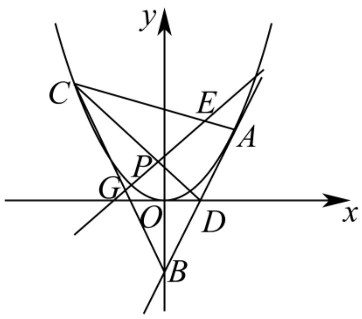
所以 $\begin{cases} k\mu=\frac{1+\lambda_1}{2} \\ k(1-\mu)=\frac{1+\lambda_2}{2} \end{cases}$，两式相加得 $k=\frac{3}{2}$，即 P 是 $\triangle ABC$ 的重心，

明思e学网 www.jxmingsi.com

设 $P(x,y),C(x_0,x_0^2)(x_0\neq 1)$，则 $\begin{cases} x=\dfrac{0+1+x_0}{3}=\dfrac{1+x_0}{3}(x\neq\dfrac{2}{3}) \\ y=\dfrac{-1+1+x_0^2}{3}=\dfrac{x_0^2}{3} \end{cases}$，

消去 x_0，得 $y=\frac{1}{3}(3x-1)^2$，

故点 P 的轨迹方程 Γ 为 $y=\frac{1}{3}(3x-1)^2(x\neq\frac{2}{3})$；



（3）由（2）知，$\Gamma':y=\frac{1}{3}[3(x+\frac{1}{3})-1]^2=3x^2$，

易知直线 l 的斜率存在，设 $l:y=kx+m$，$M\left(x_1,y_1\right),N\left(x_2,y_2\right)$，

$\begin{cases} y=kx+m \\ y=3x^2 \end{cases}$，消去 y，得 $3x^2-kx-m=0$，

所以 $x_1x_2=-\frac{m}{3}$，又 $\overline{MR}=\lambda\overline{RN}$，则 $x_1=-\lambda x_2$，

解得 $\begin{cases} x_1=-\sqrt{\dfrac{m\lambda}{3}} \\ x_2=\sqrt{\dfrac{m}{3\lambda}} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_1=\sqrt{\dfrac{m\lambda}{3}} \\ x_2=-\sqrt{\dfrac{m}{3\lambda}} \end{cases}$，

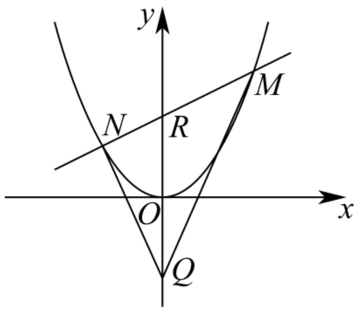
所以 $\overline{QR}\cdot\overline{QM}-\lambda\overline{QR}\cdot\overline{QN}=(0,2m)\cdot(x_1,y_1+m)-\lambda(0,2m)\cdot(x_2,y_2+m)=2m^2-2\lambda m^2+2my_1-2\lambda my_2$，

又 $y_1=3x_1^2=3(\frac{m\lambda}{3})=m\lambda$，$y_2=3x_2^2=3(\frac{m}{3\lambda})=\frac{m}{\lambda}$，

所以 $\overline{QR}\cdot\overline{QM}-\lambda\overline{QR}\cdot\overline{QN}=2m^2-2\lambda m^2+2my_1-2\lambda my_2=2m^2-2\lambda m^2+2m\cdot m\lambda-2\lambda m\cdot\frac{m}{\lambda}=0$，

即 $\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{QM}-\lambda\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{QN}$ 的值为 0.

明思e学网
www.jxmingsi.com



【点睛】方法点睛：直线与圆锥曲线的位置关系中的定点、定值、最值问题，一般可通过联立方程组并消元得到关于x或y的一元二次方程，再把要求解的目标代数式化为关于两个的交点横坐标或纵坐标的关系式，该关系中含有x_1x_2, x_1+x_2或y_1y_2, y_1+y_2，最后利用韦达定理把关系式转化为若干变量的方程（或函数），从而可求定点、定值、最值问题.