

眉山市 2025 年初中学业水平暨高中阶段学校招生考试

数 学 试 卷

注意事项:

1. 本试卷满分 150 分, 考试时间 120 分钟.
2. 在答题前, 考生务必将自己的姓名、座位号、准考证号准
3. 答选择题时, 必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的正
用橡皮擦擦干净后, 再选涂其他选项; 答非选择题时, 必须使用 0.5
答案书写在答题卡规定的位置上; 所有题目必须在答题卡上作答
4. 不允许使用计算器进行运算, 凡无精确度要求的题目
5. 凡作图题或辅助线均用签字笔画图.

第 I 卷 (选择题 共 48 分)

一、选择题: 本大题共 12 个小题, 每小题 4 分, 共 48 分. 在每个小题给出的四个选项中只有一项是正确的, 请把答题卡上相应题目的正确选项涂黑.

1. 2025 的相反数是

A. 2025

B. -2025

C. $\frac{1}{2025}$

D. $-\frac{1}{2025}$

2. 剪纸是我国传统的民间艺术. 下列剪纸作品中属于轴对称图形的是



3. 在《哪吒之魔童闹海》等影片的带动下, 今年的中国电影市场火热开局, 一季度的电影票房达到 244 亿元. 244 亿用科学记数法表示为

A. 0.244×10^{10}

B. 2.44×10^9

C. 2.44×10^{10}

D. 244×10^8

4. 下列计算正确的是

A. $a^2 + a^3 = a^5$

B. $a^2 \cdot a^3 = a^6$

C. $(-a^2)^3 = a^6$

D. $a^{12} \div a^3 = a^9$

5. 在平面直角坐标系中, 将点 $A(-1, 3)$ 向右平移 2 个单位到点 B , 则点 B 的坐标为

A. $(-3, 3)$

B. $(-1, 1)$

C. $(1, 3)$

D. $(-1, 5)$

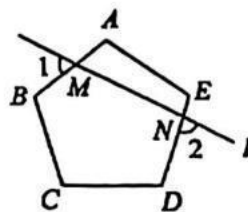
6. 如图, 直线 l 与正五边形 $ABCDE$ 的边 AB 、 DE 分别交于点 M 、 N , 则 $\angle 1 + \angle 2$ 的度数为

A. 216°

B. 180°

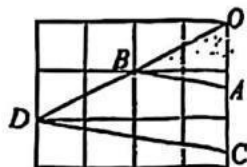
C. 144°

D. 120°



第 6 题图

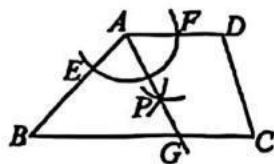
7. 如图, 在 4×3 的方形网格中, 每个小正方形的边长均为 1, 将 $\triangle OAB$ 以点 O 为位似中心放大后得到 $\triangle OCD$, 则 $\triangle OAB$ 与 $\triangle OCD$ 的周长之比是



第 7 题图

- A. 2 : 1
B. 1 : 2
C. 4 : 1
D. 1 : 4

8. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB=6$, $BC=10$. 按下列步骤作图: ①以点 A 为圆心, 适当长度为半径画弧, 分别交 AB 、 AD 于 E 、 F 两点; ②分别以点 E 、 F 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}EF$ 的长为半径画弧, 两弧相交于点 P ; ③作射线 AP 交 BC 于点 G , 则 CG 的长为



第 8 题图

- A. 4
B. 5
C. 6
D. 8

9. 我国古代算书《四元玉鉴》里有这样一道题: “九百九十九文钱, 甜果苦果买一千, 甜果九个十一文, 苦果七个四文钱, 试问甜苦果几个?” 其大意是: 用九百九十九文钱共买了一千个甜果和苦果, 其中十一文钱可以买甜果九个, 四文钱可以买苦果七个, 问甜果苦果各买几个? 若设买甜果 x 个, 苦果 y 个, 根据题意可列方程组为

- A. $\begin{cases} x+y=1000, \\ 9x+7y=999 \end{cases}$
B. $\begin{cases} x+y=999, \\ 11x+4y=1000 \end{cases}$
C. $\begin{cases} x+y=1000, \\ \frac{11}{9}x+\frac{4}{7}y=999 \end{cases}$
D. $\begin{cases} x+y=1000, \\ \frac{9}{11}x+\frac{7}{4}y=999 \end{cases}$

10. 在平面直角坐标系中, 点 P 的坐标为 (m, n) , 则向量 $\overrightarrow{OP} = (m, n)$, 已知 $\overrightarrow{OA_1} = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{OA_2} = (x_2, y_2)$, 若 $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$, 则 $\overrightarrow{OA_1}$ 与 $\overrightarrow{OA_2}$ 互相垂直. 下列选项中两向量互相垂直的是

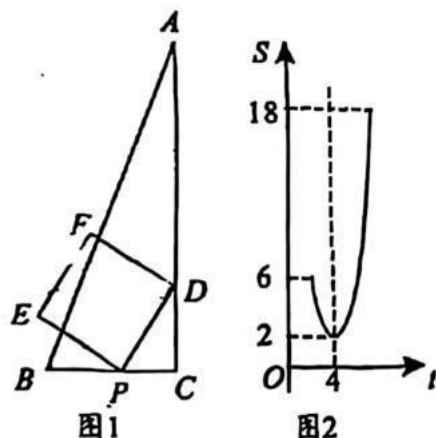
- A. $\overrightarrow{OB_1} = (2, 3)$, $\overrightarrow{OB_2} = (\sin 30^\circ, \pi^0)$
B. $\overrightarrow{OC_1} = (3, -9)$, $\overrightarrow{OC_2} = (1, -\frac{1}{3})$
C. $\overrightarrow{OD_1} = (\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{5})$, $\overrightarrow{OD_2} = (2, \frac{1}{2})$
D. $\overrightarrow{OE_1} = (2, 1)$, $\overrightarrow{OE_2} = (2^{-1}, -1)$

11. 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} \frac{3x-1}{2} \leq x+2, \\ x+1 \geq -x+a \end{cases}$ 至少有两个正整数解, 且关于 x 的分式方程

$\frac{a-1}{x-1} = 2 - \frac{3}{1-x}$ 的解为正整数, 则所有满足条件的整数 a 的值之和为

- A. 8
B. 14
C. 18
D. 38

12. 如图1, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, 点 D 在 AC 上, $CD=\sqrt{2}$, 动点 P 在 $Rt\triangle ABC$ 的边上沿 $C \rightarrow B \rightarrow A$ 方向以每秒1个单位长度的速度匀速运动, 到达点 A 时停止, 以 DP 为边作正方形 $DPEF$. 设点 P 的运动时间为 t 秒, 正方形 $DPEF$ 的面积为 S . 当点 P 由点 B 运动到点 A 时, 如图2, S 是关于 t 的二次函数. 在3个时刻 t_1, t_2, t_3 ($t_1 < t_2 < t_3$) 对应的正方形 $DPEF$ 的面积均相等. 下列4个结论: ①当 $t=1$ 时, $S=3$; ②点 P 在线段 BA 上时 $S=2t^2-16t+34$; ③ $AD=4\sqrt{2}$; ④ $t_1+t_2=4$. 其中正确结论的个数为



第12题图

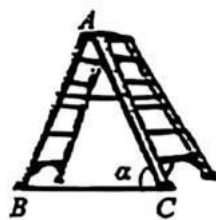
- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

第II卷(非选择题 共102分)

二、填空题: 本大题共6个小题, 每小题4分, 共24分. 请将正确答案直接填写在答题卡相应的位置上.

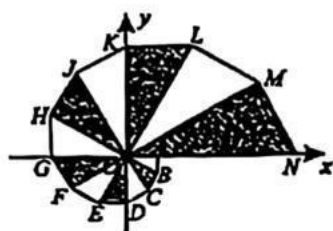
13. -27 的立方根是_____.
14. 某校以“阳光运动, 健康成长”为主题开展体育训练. 已知某次训练中7名男生引体向上的成绩为: 7, 8, 5, 8, 9, 10, 6. 这组数据的中位数是_____.
15. 已知方程 $x^2-2x-5=0$ 的两根分别为 x_1, x_2 , 则 $(x_1+1)(x_2+1)$ 的值为_____.

16. 人字梯为现代家庭常用的工具. 如图, 若 AB, AC 的长都为2m, 当 $\alpha=65^\circ$ 时, 人字梯顶端离地面的高度是_____m. (结果精确到0.1m, 参考依据: $\sin 65^\circ \approx 0.91$, $\cos 65^\circ \approx 0.42$, $\tan 65^\circ \approx 2.14$)



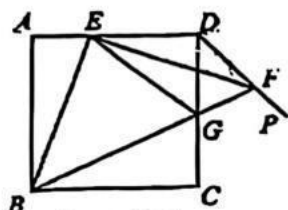
第16题图

17. 如图, 在平面直角坐标系中, 用12个以点 O 为公共顶点的相似三角形组成形如海螺的图案, 若 $OA=1$, $\angle OAB=90^\circ$, 则点 G 的坐标为_____.



第17题图

18. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为4, 点 E 在边 AD 上运动 (不与点 A, D 重合), $\angle CDP=45^\circ$, 点 F 在射线 DP 上, 且 $AE:DF=1:\sqrt{2}$, 连接 BF , 交 CD 于点 G , 连接 EB, EF, EG . 下列结论:



第18题图

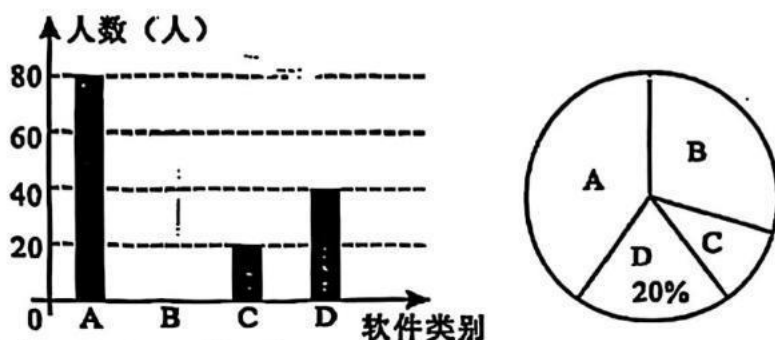
- ① $\sin \angle BFE = \frac{\sqrt{2}}{2}$; ② $AE^2 + CG^2 = EG^2$; ③ $\triangle DEF$ 的面积最大值是2; ④若 $AE = \frac{1}{3}AD$, 则点 G 是线段 CD 的中点. 其中正确结论的序号是_____.

三、解答题：本大题共 8 个小题，共 78 分。请把解答过程写在答题卡相应的位置上。

19. (1) (4 分) 计算： $\sqrt{4} - |-3|$ ； (2) (4 分) 解方程： $2(x-1) = 2+x$ 。

20. (8 分) 先化简，再求值： $\left(\frac{y}{x^2-y^2} + \frac{1}{x+y}\right) \div \frac{x}{x-y}$ ，其中 x, y 满足 $(x+2)^2 + |y-1| = 0$ 。

21. (10 分) 在科技的浪潮中，人工智能正以不可阻挡之势，深刻改变着我们的世界。某校社团开展以“智能之光，照见未来”为主题的探究活动，推荐了当前热门的 4 类人工智能软件 A、B、C、D，每个学生可选择其中 1 类学习使用。为了解学生对软件的使用情况，随机抽取部分学生进行调查统计，并根据统计结果绘制成如图所示的两幅不完整统计图：

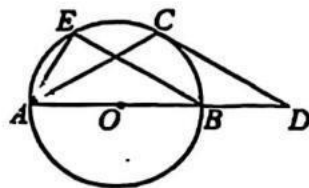


请根据图中信息，完成下列问题：

- (1) 这次抽取的学生总人数为____人；扇形统计图中 A 类软件所占圆心角为____度；
- (2) 补全条形统计图；
- (3) 社团活动中表现最突出的有 4 人，其中有 3 人使用 A 类软件，有 1 人使用 B 类软件，现准备从这 4 名学生中随机选择 2 人进行学习成果展示，请用画树状图或列表法求出恰好抽到使用 A、B 两类软件各 1 人的概率。

22. (10 分) 如图，AB 为 $\odot O$ 的直径，点 C 为圆上一点，过点 C 作 $\odot O$ 的切线，交 AB 延长线于点 D，过点 B 作 $BE \parallel DC$ ，交 $\odot O$ 于点 E，连接 AE、AC。

- (1) 求证： $\widehat{CE} = \widehat{CB}$ ；
- (2) 若 $\angle BAE = 60^\circ$ ， $\odot O$ 的半径为 2，求 AC 的长。



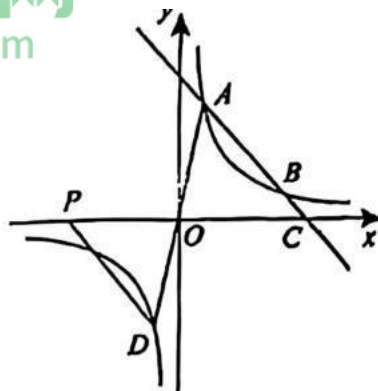
第 22 题图

23. (10分) 如图, 一次函数 $y = ax + b$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象

相交于 $A(1, 4)$ 、 $B(4, m)$ 两点, 与 x 轴交于点 C , 点 D 与点 A 关于点 O 对称, 连接 AD .

(1) 求一次函数和反比例函数的解析式;

(2) 点 P 在 x 轴的负半轴上, 且 $\triangle AOC$ 与 $\triangle POD$ 相似, 求点 P 的坐标.



第 23 题图

24. (10分) 国家卫健委在全民健康调查中发现, 近年来的肥胖人群快速增长, 为加强对健康饮食的重视, 特发布各地区四季健康饮食食谱. 现有 A、B 两种食品, 每份食品的质量为 50g, 其核心营养素如下:

食品类别	能量 (单位: Kcal)	蛋白质 (单位: g)	脂肪 (单位: g)	碳水化合物 (单位: g)
A	240	12	7.5	29.8
B	280	13	9	27.6

(1) 若要从这两种食品中摄入 1280Kcal 能量和 62g 蛋白质, 应运用 A、B 两种食品各多少份?

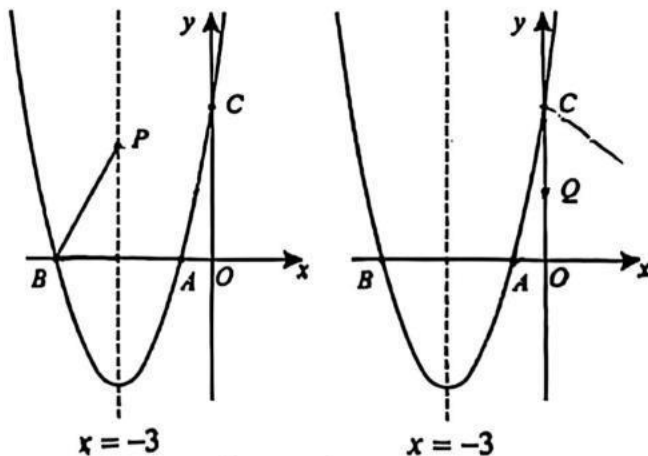
(2) 若每份午餐选用这两种食品共 300g, 从 A、B 两种食品中摄入的蛋白质总量不低于 76g, 且能量最低, 应选用 A、B 两种食品各多少份?

25. (10分) 如图, 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 关于直线 $x = -3$ 对称, 与 x 轴交于 $A(-1, 0)$ 、 B 两点, 与 y 轴交于点 C .

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 点 P 为抛物线对称轴上一点, 连接 BP , 将线段 BP 绕点 P 逆时针旋转 90° , 使点 B 的对应点 D 恰好落在抛物线上, 求此时点 P 的坐标;

(3) 在线段 OC 上是否存在点 Q , 使 $2AQ + \sqrt{2}CQ$ 存在最小值? 若存在, 请直接写出点 Q 的坐标及最小值; 若不存在, 请说明理由.



第 25 题图

26. (12分) 综合与实践

【问题情境】下面是某校数学社团在一次折纸活动中的探究过程.

【操作实践】如图1, 将矩形纸片 $ABCD$ 沿过点 C 的直线折叠, 使点 B 落在 AD 边上的点 B' 处, 折痕交 AB 于点 E , 再沿着过点 B' 的直线折叠, 使点 D 落在 $B'C$ 边上的点 D' 处, 折痕交 CD 于点 F . 将纸片展平, 画出对应点 B' 、 D' 及折痕 CE 、 $B'F$, 连接 $B'E$ 、 $B'C$ 、 $D'F$.

【初步猜想】(1) 确定 CE 和 $B'F$ 的位置关系及线段 BE 和 CF 的数量关系.

创新小组经过探究, 发现 $CE \parallel B'F$, 证明过程如下:

由折叠可知 $\angle DB'F = \angle CB'F = \frac{1}{2} \angle DB'C$, $\angle ECB' = \angle ECB = \frac{1}{2} \angle BCB'$. 由矩形的性质, 可知 $AD \parallel BC$, $\therefore \angle DB'C = \angle BCB'$. $\therefore$ ① $\angle DB'F = \angle ECB'$. $\therefore CE \parallel B'F$.

智慧小组先测量 BE 和 CF 的长度, 猜想其关系为② $BE = CF$.

经过探究, 发现验证 BE 和 CF 数量关系的方法不唯一:

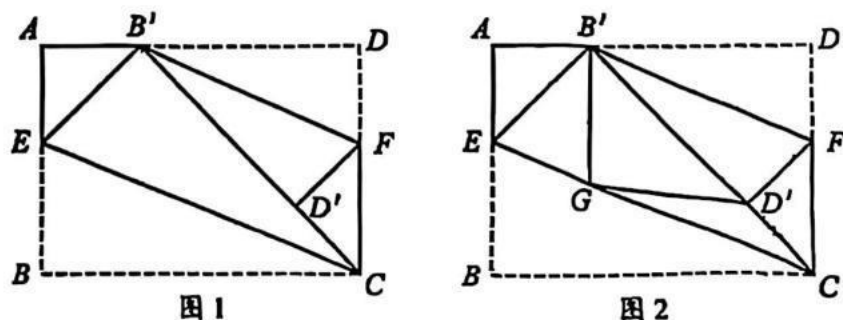
方法一: 证明 $\triangle AB'E \cong \triangle D'CF$, 得到 $B'E = CF$, 再由 $B'E = BE$ 可得结论.

方法二: 过点 B' 作 AB 的平行线交 CE 于点 G , 构造平行四边形 $CFB'G$, 然后证 $B'G = B'E$ 可得结论.

请补充上述过程中横线上的内容.

【推理证明】(2) 请你结合智慧小组的探究思路, 选择一种方法验证 BE 和 CF 的数量关系, 写出证明过程.

【尝试运用】(3) 如图2, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=6$, 按上述操作折叠并展开后, 过点 B' 作 $B'G \parallel AB$ 交 CE 于点 G , 连接 $D'G$. 当 $\triangle B'D'G$ 为直角三角形时, 求出 BE 的长.



第26题图

数学试卷参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 4 分，共 48 分.

1. B 2. A 3. C 4. D 5. C
6. C 7. B 8. A 9. C 10. D
11. B 12. B

二、填空题：本大题共 6 个小题，每小题 4 分，共 24 分.

13. -3 14. 8 15. -2
16. 1.8 17. $\left(-\frac{64}{27}, 0\right)$ 18. ①③④

三、解答题：本大题共 8 个小题，共 78 分.

19. (1) $\sqrt{4}-|-3|$

解：原式 $= 2-3$ 2 分
 $= -1$ 4 分

(2) $2(x-1)=2+x$

解： $2x-2=2+x$ 2 分
 $2x-x=2+2$ 3 分
 $x=4$ 4 分

20. (本小题满分 8 分)

解：原式 $= \left[\frac{y}{(x+y)(x-y)} + \frac{x-y}{(x+y)(x-y)} \right] \cdot \frac{x-y}{x}$ 2 分
 $= \frac{x}{(x+y)(x-y)} \cdot \frac{x-y}{x}$ 3 分
 $= \frac{1}{x+y}$ 4 分

$$\because (x+2)^2 + |y-1| = 0$$

$$\therefore x+2=0, y-1=0$$

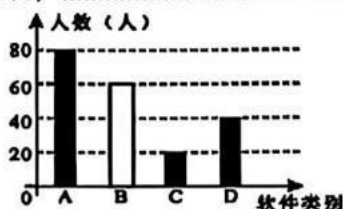
$$\therefore x=-2, y=1$$
6 分

$$\therefore \text{原式} = \frac{1}{-2+1} = -1$$
8 分

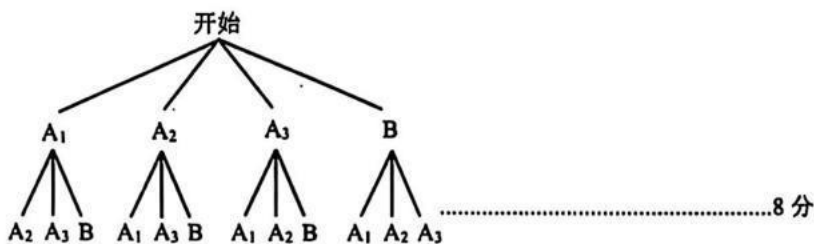
21. (本小题满分 10 分)

(1) 200; 144;4 分

(2) 如图:6 分



(3)



由图可知，机会均等的结果共 12 种，其中符合条件的有 6 种，

$$\therefore P(\text{使用 A、B 两类软件各一人}) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

22. (本小题满分 10 分)

(1) 证明：连接 OC .

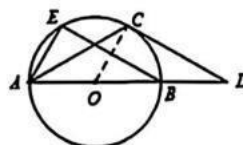
$\because CD$ 为 $\odot O$ 的切线，

$\therefore OC \perp CD$.

$\because BE \parallel DC$,

$\therefore OC \perp BE$,

$\therefore \widehat{CE} = \widehat{CB}$.



第 22 题图

(2) 由 (1)，得 $\widehat{CE} = \widehat{CB}$,

$\therefore \angle EAC = \angle CAB$. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$\because \angle BAE = 60^\circ$,

$\therefore \angle CAB = \frac{1}{2} \angle BAE = 30^\circ$. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

连接 BC .

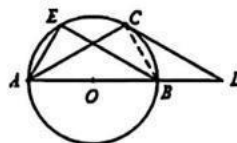
$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\cos 30^\circ = \frac{AC}{AB}$,

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AC}{2 \times 2},$$

$\therefore AC = 2\sqrt{3}$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$



其它解答方法酌情给分.

23. (本小题满分 10 分)

解：(1) $\because$ 一次函数 $y = ax + b$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 图象交于 $A(1, 4)$ 、 $B(4, m)$ 两点，

$$\therefore k = 4 \times 1 = 4,$$

$\therefore$ 反比例函数的解析式为 $y = \frac{4}{x}$, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$\therefore B(4, 1)$, $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

将 $A(1, 4)$ 、 $B(4, 1)$ 代入一次函数解析式 $y = ax + b$,

$$\therefore \begin{cases} a+b=4, \\ 4a+b=1, \end{cases} \text{解得: } \begin{cases} a=-1, \\ b=5. \end{cases}$$

$\therefore$ 一次函数的解析式为 $y = -x + 5$5 分

(2) $\because$ 一次函数的解析式为 $y = -x + 5$,

$$\therefore C(5, 0),$$

$$\therefore OC=5.$$

$\because$ 点 D 与点 A 关于点 O 对称,

$$\therefore OD=OA=\sqrt{(1-0)^2+(4-0)^2}=\sqrt{17}.$$

$$\because \angle AOC = \angle POD$$

$\therefore \triangle AOC$ 与 $\triangle POD$ 相似可分为 $\triangle AOC \sim \triangle DOP$ 和 $\triangle AOC \sim \triangle POD$ 两种情况讨论:

① 当 $\triangle AOC \sim \triangle DOP$ 时, $\frac{OP}{OC} = \frac{OD}{OA} = 1,$

$$\therefore OP=OC=5,$$

$\because$ 点 P 在 x 轴的负半轴,

$$\therefore P(-5, 0); \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

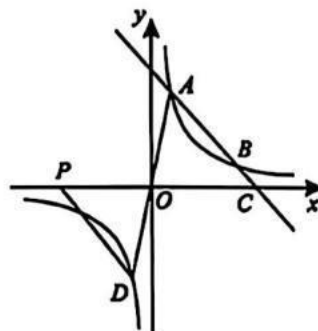
② 当 $\triangle AOC \sim \triangle POD$ 时, $\frac{OP}{OA} = \frac{OD}{OC},$

$$\text{即 } \frac{OP}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{5},$$

$$\therefore OP = \frac{17}{5},$$

$\because$ 点 P 在 x 轴的负半轴,

$$\therefore P\left(-\frac{17}{5}, 0\right).$$



第 23 题图

综上所述, 点 P 的坐标为 $(-5, 0)$ 或 $(-\frac{17}{5}, 0)$10 分

24. (本小题满分 10 分)

解: (1) 方法一: 设: 应选用 A 种食品 x 份, B 种食品 y 份, 根据题意可得:

$$\begin{cases} 240x+280y=1280, \\ 12x+13y=62. \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x=3, \\ y=2. \end{cases}$$

答: 应选用 A 种食品 3 份, B 种食品 2 份.5 分

方法二: 设: 应选用 A 种食品 x 份, B 种食品 y 份, 根据题意可得:

$$12x+13y=62,$$

$\because x, y$ 均为正整数,

$$\therefore \begin{cases} x=3, \\ y=2. \end{cases}$$

答：应选用 A 种食品 3 份，B 种食品 2 份。

(2) $\because$ 午餐选用这两种食品共 300g,

$$\therefore 300 \div 5 = 6 \text{ (份)} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

设：选用 A 种食品 a 份，则选用 B 种食品 $(6-a)$ 份，根据题意可得：

$$12a + 13(6-a) \geq 76, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } a \leq 2, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{能量 } Q = 240a + 280(6-a)$$

$$= -40a + 1680, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\because -40 < 0,$$

$\therefore$ 能量 Q 随 a 的增大而减小，

$\therefore$ 当 $a=2$ 时， Q 的值最小，

$\therefore$ 应选用 A 种食品 2 份，B 种食品 4 份。 $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

其它解答方法酌情给分。

25. (本小题满分 10 分)

解： $\because$ 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 关于直线将直线 $x = -3$ 对称与 x 轴交于 $A(-1, 0)$

$$\therefore \begin{cases} -\frac{b}{2} = -3, \\ 1 - b + c = 0. \end{cases} \text{ 解得：} \begin{cases} b = 6, \\ c = 5. \end{cases}$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = x^2 + 6x + 5. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

(2) $\because$ 抛物线的解析式为 $y = x^2 + 6x + 5$.

$$\therefore B(-5, 0)$$

$$\text{设 } P(-3, t)$$

①如图，当点 P 在 x 轴下方时 ($t < 0$)

设抛物线对称轴与 x 轴交于点 M ，过点 D 作 $DN \perp MP$ 于点 N ，

由旋转可知， $BP = DP, \angle BPD = 90^\circ$

易知： $\angle BPM = \angle PDN$

$$\text{又 } \because \angle BMP = \angle DNP = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle BMP \cong \triangle PND(AAS)$$

$$\therefore PN = BM = 2, MP = DN = -t$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的坐标为 } (-3+t, t-2)$$

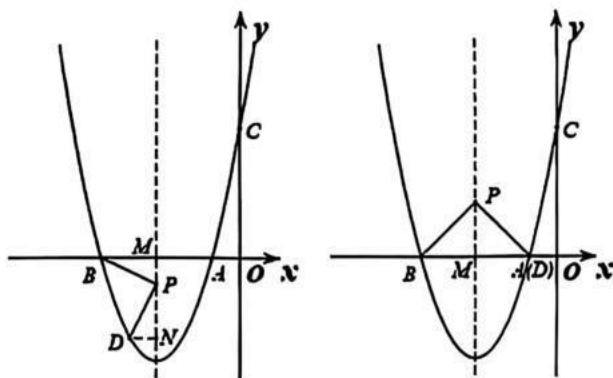
$\because$ 点 D 在抛物线上

$$\therefore (-3+t)^2 + 6(-3+t) + 5 = t-2$$

$$\text{解得：} t = 2(\text{舍去}) \text{ 或 } t = -1$$

$$\therefore \text{此时点 } P \text{ 坐标为 } (-3, -1).$$

②如图，当点 P 在 x 轴上方时 ($t > 0$)



点 A 、 B 关于直线 $x = -3$ 对称

$\therefore$ 点 A 与点 D 重合, $\triangle ABP$ 为等腰直角三角形,

$\therefore BM = AM = PM$

$\therefore$ 此时点 P 坐标为 $(-3, 2)$.

综上所述点 P 坐标为 $(-3, -1)$ 或 $(-3, 2)$7 分

(3) 解: 存在最小值, 点 Q 坐标为 $(0, 1)$, $2AQ + \sqrt{2}CQ$ 最小值为 $6\sqrt{2}$10 分

解析: 如图所示, 将直线 CQ 绕着 Q 点顺时针旋转 45° , 并过点 C 作其垂线, 垂足为 E , 连接 AQ , 则 $\angle CQE = 45^\circ$, $\angle CEQ = 90^\circ$,

$\therefore$ 在 $Rt\triangle CEQ$ 中, $\cos \angle CQE = \cos 45^\circ = \frac{EQ}{CQ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore$ 随着 Q 点的运动, 总有 $EQ = \frac{\sqrt{2}}{2} CQ$,

$\therefore 2AQ + \sqrt{2}CQ = 2(AQ + \frac{\sqrt{2}}{2} CQ) = 2(AQ + EQ)$,

要使得 $2AQ + \sqrt{2}CQ$ 取得最小值, 即要使得 $AQ + EQ$ 取得最小值,

当 A 、 Q 、 E 三点共线时, 满足 $AQ + EQ$ 取得最小值,

此时, $\angle CEQ = \angle AOQ = 90^\circ$, $\angle CQE = \angle AQO = 45^\circ$,

$\therefore OA = 1$,

$\therefore AQ = \sqrt{2}$, $OQ = 1$,

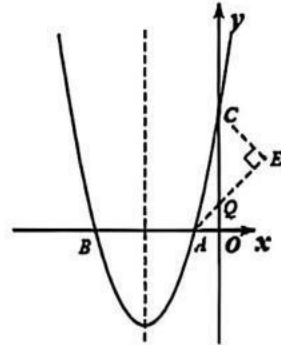
$\therefore CQ = OC - OQ = 5 - 1 = 4$,

$\therefore EQ = CQ \cdot \cos 45^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$,

$\therefore AQ + EQ = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$,

$\therefore 2AQ + \sqrt{2}CQ = 2(AQ + EQ) = 6\sqrt{2}$

$\therefore$ 当点 Q 坐标为 $(0, 1)$, $2AQ + \sqrt{2}CQ$ 存在最小值, 最小值为 $6\sqrt{2}$.



26. (本小题满分 12 分)

(1) ① $\angle CB'F = \angle ECB'$ 2 分

② $BE = CF$ 4 分

(2) 证明:

方法一: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,

$\therefore AD \parallel BC$, $AD = BC$,

$\therefore \angle DB'C = \angle BCB'$, $\angle D = \angle A = 90^\circ$.

由折叠可知 $BC = B'C'$, $B'D = B'D'$,

$\therefore CD' = B'C - B'D$, $AB' = AD - B'D$,

$\therefore CD' = AB'$5 分

$\therefore \angle AB'E = 90^\circ - \angle DB'C$,

$$\angle D'CF = 90^\circ - \angle BCB',$$

$$\therefore \angle AB'E = \angle D'CF. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\because \angle A = \angle FD'C = \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AB'E \cong \triangle D'CF \text{ (AAS)}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore B'E = CF.$$

$$\because B'E = BE,$$

$$\therefore BE = CF. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

方法二：过点 B' 作 $B'G \parallel AB$ 交 CE 于点 G .

由 (1) 可知, $\angle DB'C = \angle BCB'$,

$$\text{由折叠可知, } \angle D'B'F = \frac{1}{2} \angle DB'C,$$

$$\angle B'CG = \frac{1}{2} \angle BCB',$$

$$\therefore \angle D'B'F = \angle B'CG,$$

$$\therefore B'F \parallel CG,$$

$$\therefore \text{四边形 } B'GCF \text{ 是平行四边形}, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\therefore B'G = CF. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\because AB \parallel B'G \parallel CD,$$

$$\therefore \angle BEG = \angle EGB'.$$

$$\because \angle BEG = \angle B'EG,$$

$$\therefore \angle B'EG = \angle EGB', \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore B'E = B'G.$$

$$\because B'E = BE,$$

$$\therefore BE = CF. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$(3) \because B'G \parallel CF,$$

$$\therefore \angle D'B'G = \angle FCD',$$

$\therefore \angle D'B'G$ 和 $\angle FCD'$ 不可能为直角.

则可分 $\angle B'GD' = 90^\circ$ 和 $\angle B'D'G = 90^\circ$ 两种情况讨论:

① 当 $\angle B'D'G = 90^\circ$ 时,

$$\because \angle B'D'F = \angle D = 90^\circ,$$

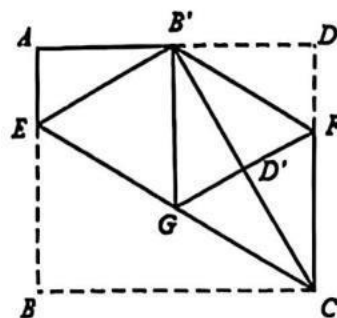
$$\therefore \angle B'D'G = \angle B'D'F = 90^\circ,$$

$\therefore$ 点 F 、 D' 、 G 三点共线, 即 $B'C \perp GF$.

由 (2) 可知, 四边形 $B'GCF$ 是平行四边形,

$\therefore$ 此时四边形 $B'GCF$ 是菱形,

$$\therefore \angle GCD' = \angle FCD'.$$



又 $\because \angle BCE = \angle GCD'$,

$\therefore \angle GCD' = \angle FCD' = \angle BCE = 30^\circ$.

$$\because \sin \angle FCD' = \frac{D'F}{FC}$$

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{6-FC}{FC},$$

解得 $FC=4$.

$\therefore BE=FC=4$10 分

②当 $\angle B'GD'=90^\circ$ 时, $D'G \parallel BC$,

$\therefore \angle D'GC = \angle BCG$,

$\therefore \angle D'CG = \angle D'GC$,

$\therefore D'C = D'G$,

$\therefore \angle D'B'G = \angle D'CF$,

$$\therefore \tan \angle D'B'G = \tan \angle D'CF = \frac{D'G}{BG'} = \frac{D'F}{D'C}.$$

设 FC 为 x , 则 $B'G=FC=x$, $D'F=DF=6-x$,

$$\text{即 } \frac{D'G}{x} = \frac{6-x}{D'C},$$

$$\therefore D'C^2 = x(6-x).$$

在 $\text{Rt}\triangle D'CF$ 中, $D'C^2 + D'F^2 = CF^2$,

$$x(6-x) + (6-x)^2 = x^2,$$

解得 $x_1 = 3\sqrt{5} - 3$, $x_2 = -3\sqrt{5} - 3$ (舍),

$$\therefore CF=BE=3\sqrt{5}-3.$$

综上所述, BE 的长为 4 或 $3\sqrt{5}-3$12 分

