参考答案及解析

专项一　选　择　题

体验 1　C

体验 2　C

体验 3　D

体验 4　$\frac{7\sqrt{3}}{2}$

体验 5　D

体验 6　B

体验 7　B

体验 8　A

体验 9　B

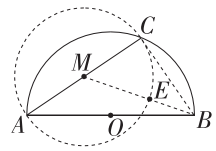
集训一

1. C　2. C　3. C　4. A　5. D　6. C

集训二

1. A　2. D　3. B　4. B　5. B

6. A　【解析】如图，点 E 的轨迹是以 AC 为直径的圆弧，当 B,E,M 三点共线时，BE 取到最小值. 连接 BC，根据勾股定理求出 BM，再减去 EM 即可得.



集训三

1. A　2. C　3. B　4. C　5. B　6. D

集训四

1. D　2. A　3. B　4. C　5. C　6. A

专项二　填　空　题

体验 1　$a \leqslant -1$

体验 2　4

体验 3　96

体验 4　32

体验 5　16

体验 6　$\frac{\sqrt{2}}{2}$

体验 7　$4-\pi$

体验 8　21

体验 9　-11

【解析】把 $t^2+97t+17=0$ 变形为 $17\cdot(\frac{1}{t})^2+97\cdot\frac{1}{t}+1=0$，

实数 s 和 $\frac{1}{t}$ 可看作方程 $17x^2+97x+1=0$ 的两根，

$\therefore s+\frac{1}{t}=-\frac{97}{17}, s\cdot\frac{1}{t}=\frac{1}{17}$.

$\therefore \frac{2st+7s+2}{t}=2s+7\cdot\frac{s}{t}+\frac{2}{t}=2(s+\frac{1}{t})+7\cdot\frac{s}{t}$

$=2\times(-\frac{97}{17})+7\times\frac{1}{17}=-11$.

体验 10　$(4,2),(3,-2)$ 或 $(-4,-6)$

【解析】直线 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 分别与 x 轴、y 轴交于点 A,B，

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(4,0)$，点 B 的坐标为 $(0,2)$.

分三种情况：

①点 M 在原点，易知点 N 的坐标为 $(4,2)$.

②如图 1，点 M 在 x 轴上，

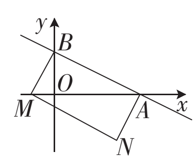


图 1

在矩形 $BMNA$ 中，$OB\perp MA$，$\therefore \triangle BOM\backsim\triangle AOB$.

$\therefore \frac{BO}{AO}=\frac{MO}{BO}$. $\therefore MO=\frac{BO^2}{AO}=1$.

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(-1,0)$.

将点 M 向右平移 4 个单位，向下平移 2 个单位得到点 N，$\therefore$ 点 N 的坐标为 $(3,-2)$.

③如图 2，点 M 在 y 轴上.

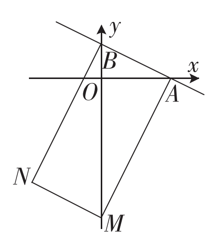


图 2

在矩形 $BNMA$ 中，$OA\perp MB$，$\therefore \triangle MOA\backsim\triangle AOB$.

$\therefore \frac{BO}{AO}=\frac{AO}{MO}$. $\therefore MO=\frac{AO^2}{BO}=8$.

$\therefore$ 点 M 的坐标为$(0,-8)$. 将点 M 向左平移 4 个单位，向上平移 2 个单位得到点 N，

$\therefore$ 点 N 的坐标为$(-4,-6)$.

综上，点 N 的坐标为$(4,2)$，$(3,-2)$或$(-4,-6)$.

体验 11 (1)40°，100°或 140°

(2)$\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$24-12\sqrt{3}$或$\frac{12\sqrt{3}}{5}$

【解析】$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，$AD\perp BC$，

$\therefore \angle DAC=30°$，$\angle C=60°$，$CD=BD=\frac{1}{2}BC=2$.

$\therefore AD=2\sqrt{3}$.

由$\triangle ADE$ 是等腰三角形，可分三种情况进行讨论：

①当 $AE=DE$ 时，如图 1，

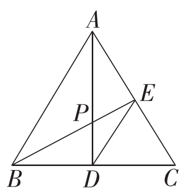


图 1

则$\angle EAD=\angle EDA=30°$. $\therefore \angle EDC=60°$.

$\therefore \triangle EDC$ 为等边三角形. $\therefore CE=CD=2$. $\therefore E$ 为 AC 的中点. $\therefore BE\perp AC$.

$\because \angle DAC=30°$，$\therefore AP=\frac{AE}{\cos 30°}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

②当 $AD=AE=2\sqrt{3}$时，如图 2，

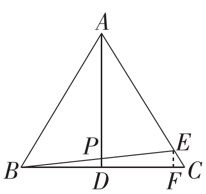


图 2

则 $EC=AC-AE=4-2\sqrt{3}$.

过点 E 作 $EF\perp BC$ 于点 F.

$\because \angle C=60°$，$\therefore CF=\frac{1}{2}EC=2-\sqrt{3}$，$EF=\frac{\sqrt{3}}{2}EC=2\sqrt{3}-3$. $\therefore BF=BC-CF=2+\sqrt{3}$.

$\because \tan\angle EBF=\frac{EF}{BF}=\frac{PD}{BD}$，$\therefore \frac{2\sqrt{3}-3}{2+\sqrt{3}}=\frac{PD}{2}$.

$\therefore PD=14\sqrt{3}-24$.

$\therefore AP=AD-PD=2\sqrt{3}-(14\sqrt{3}-24)=24-12\sqrt{3}$.

③当 $AD=DE=2\sqrt{3}$时，如图 3，

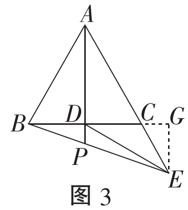


图 3

则$\angle DAE=\angle DEA=30°$，$\therefore \angle ADE=120°$. $\therefore \angle CDE=\angle ADE-\angle ADC=30°$.

过点 E 作 $EG\perp BC$，交 BC 的延长线于点 G，

则 $EG=\frac{1}{2}DE=\sqrt{3}$，$DG=\frac{\sqrt{3}}{2}ED=3$，

$\therefore BG=BD+DG=5$.

$\because \tan\angle EBG=\frac{EG}{BG}=\frac{PD}{BD}$，$\therefore \frac{\sqrt{3}}{5}=\frac{PD}{2}$. $\therefore PD=\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

$\therefore AP=AD+PD=2\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{5}=\frac{12\sqrt{3}}{5}$.

综上，当$\triangle ADE$ 是等腰三角形时，AP 的长为$\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$24-12\sqrt{3}$或$\frac{12\sqrt{3}}{5}$.

体验 12 (1)$2\sqrt{5}$，$2\sqrt{2}$或 2

【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AB=CD=2$，$AD=BC=4$，$\angle A=\angle ABC=\angle BCD=\angle D=90°$. 分情况讨论：

①当$\angle PBC=90°$时，点 P 与点 A 重合，

由勾股定理得 $CP=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$.

②当$\angle BPC=90°$时，

由勾股定理得 $BP^2=AB^2+AP^2=2^2+AP^2$，$CP^2=CD^2+DP^2=2^2+(4-AP)^2$，$BC^2=BP^2+CP^2=4^2$，

$\therefore 2^2+AP^2+2^2+(4-AP)^2=16$.

$\therefore AP=2$，$DP=2$.

$\therefore CP=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

③当$\angle BCP=90°$时，点 P 与点 D 重合，$CP=CD=2$.

综上所述，若$\triangle PBC$ 为直角三角形，则 CP 的长为 $2\sqrt{5}$，$2\sqrt{2}$或 2.

(2)6，$3+2\sqrt{2}$或 $3-2\sqrt{2}$

【解析】将矩形 $ABCD$ 沿过点 A 的直线折叠，使点 B 落在点 E 处，

可知点 E 落在以点 A 为圆心，AB 长为半径的圆上，如图 1，延长 BA 交$\odot A$ 的另一侧于点 E，此时$\triangle ADE$

是直角三角形，点 E 到直线 BC 的距离为 BE 的长度，即 $BE=2AB=6$.

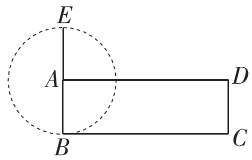


图 1

当过点 D 的直线与圆相切于点 E 时，$\triangle ADE$ 是直角三角形，分两种情况：

①如图 2，过点 E 作 $EH\perp BC$，交 BC 于点 H，交 AD 于点 G.

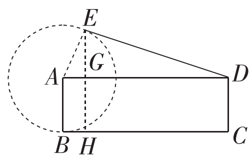


图 2

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore EG\perp AD$.

$\therefore$ 四边形 $ABHG$ 是矩形. $\therefore GH=AB=3$.

$\because AE=AB=3, AE\perp DE, AD=9$，$\therefore$ 由勾股定理可得 $DE=\sqrt{9^2-3^2}=6\sqrt{2}$.

$\because S_{\triangle AED}=\frac{1}{2}AE\cdot DE=\frac{1}{2}AD\cdot EG$，$\therefore EG=2\sqrt{2}$.

$\therefore$ 点 E 到直线 BC 的距离 $EH=EG+GH=3+2\sqrt{2}$.

②如图 3，过点 E 作 $EN\perp BC$，交 BC 于点 N，延长 NE 交 AD 于点 M.

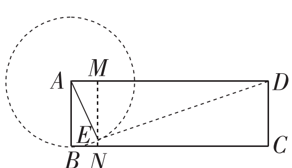


图 3

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore NM\perp AD$. $\therefore$ 四边形 $ABNM$ 是矩形.

$\therefore MN=AB=3$.

$\because AE=AB=3, AE\perp DE, AD=9$，

由勾股定理可得 $DE=\sqrt{9^2-3^2}=6\sqrt{2}$.

$\because S_{\triangle AED}=\frac{1}{2}AE\cdot DE=\frac{1}{2}AD\cdot EM$，$\therefore EM=2\sqrt{2}$.

$\therefore$ 点 E 到直线 BC 的距离 $EN=MN-EM=3-2\sqrt{2}$.

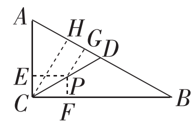
综上所述，点 E 到直线 BC 的距离是 $6, 3+2\sqrt{2}$ 或 $3-2\sqrt{2}$.

集训一

1. $a(a-b)$ 2. 1.47×10^{10} 3. 7 4. 156 5. $108°$

6. $\frac{5}{2}, \frac{10}{3}$ 或 $\frac{35}{12}$

【解析】如图，过点 P 分别作 $\triangle ABC$ 三边的垂线段，垂足分别为 E, F, G.



$\because AC^2+BC^2=6^2+8^2=10^2, AB^2=10^2$，

$\therefore AC^2+BC^2=AB^2$. $\therefore \angle ACB=90°$.

$\because$ 点 D 为 AB 的中点，$AB=10$，

$\therefore CD=AD=BD=\frac{1}{2}AB=5$.

①当 $PE=2$ 时，$\because \angle PEC=\angle BCA=90°, \angle PCE=\angle BAC$，$\therefore \triangle PCE\backsim\triangle BAC$. $\therefore \frac{PE}{BC}=\frac{CP}{AB}$，

即 $\frac{2}{8}=\frac{CP}{10}$. $\therefore CP=\frac{5}{2}$.

②当 $PF=2$ 时，

$\because \angle PFC=\angle ACB=90°, \angle PCF=\angle ABC$，

$\therefore \triangle PCF\backsim\triangle ABC$. $\therefore \frac{PF}{AC}=\frac{CP}{AB}$，

即 $\frac{2}{6}=\frac{CP}{10}$. $\therefore CP=\frac{10}{3}$.

③当 $PG=2$ 时，过点 C 作 $CH\perp AB$ 于点 H，则 $CH=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{24}{5}$.

$\because PG\perp AB, CH\perp AB$，$\therefore \triangle PGD\backsim\triangle CHD$.

$\therefore \frac{PG}{CH}=\frac{PD}{CD}$，

即 $\frac{2}{\frac{24}{5}}=\frac{PD}{5}$. $\therefore PD=\frac{25}{12}$.

$\therefore PC=CD-PD=5-\frac{25}{12}=\frac{35}{12}$.

综上所述，$PC=\frac{5}{2}, \frac{10}{3}$ 或 $\frac{35}{12}$.

集训二

1. $x\geqslant\frac{1}{2}$ 2. -4 3. $x(x-12)=864$ 4. $2\sqrt{17}$

5. 3

6. $(0,2), (0,2+2\sqrt{2})$ 或 $(0,2-2\sqrt{2})$

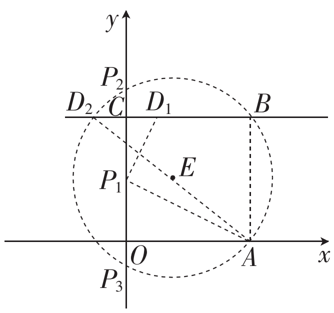
【解析】$\because B, C$ 两点的坐标分别为 $(4,4), (0,4)$，

$\therefore BC /\!/ x$ 轴.

$\because$ 点 D 在直线 BC 上，$CD=1$，

$\therefore D_1(1,4),D_2(-1,4)$.

如图.



①当点 D 在 D_1 处时,要使 $AP\perp DP$,即使 $\triangle AOP_1\backsim\triangle P_1CD_1$,

$\therefore \dfrac{OA}{P_1C}=\dfrac{OP_1}{CD_1}$,

即 $\dfrac{4}{4-OP_1}=\dfrac{OP_1}{1}$,解得 $OP_1=2$.

$\therefore P_1(0,2)$.

②当点 D 在 D_2 处时,

$\because A(4,0),D_2(-1,4)$,

$\therefore AD_2$ 的中点 E 的坐标为 $(\dfrac{3}{2},2)$.

$\because AP\perp DP$,$\therefore$ 点 P 是以点 E 为圆心,ED 长为半径的圆与 y 轴的交点.

设 $P(0,y)$,则 $PE=AE$,

即 $\sqrt{(\dfrac{3}{2}-0)^2+(2-y)^2}=\sqrt{(4-\dfrac{3}{2})^2+2^2}$,

解得 $y=2\pm2\sqrt{2}$.

$\therefore P_2(0,2+2\sqrt{2}),P_3(0,2-2\sqrt{2})$.

综上所述,点 P 的坐标为 $(0,2)$,$(0,2+2\sqrt{2})$ 或 $(0,2-2\sqrt{2})$.

集训三

1. -2　2. 3　3. 2 019　4. $\dfrac{25\pi}{8}$　5. 9 313

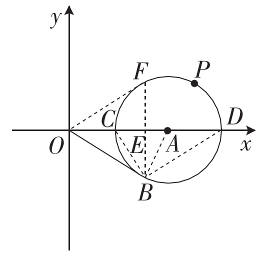
6. $(1,0)$,$(3,0)$ 或 $(\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

【解析】设⊙A 与 x 轴交于点 C,D.

$\because$ 点 $A(2,0)$,⊙A 的半径为 1,

$\therefore OC=1,OD=3,AO=2$.

连接 AB,过点 B 作 $BE\perp x$ 轴于点 E,延长 BE 交⊙A 于点 F,连接 OF,BC,BD,如图.



$\because OB$ 切⊙A 于点 B,

$\therefore AB\perp OB$.

$\because AB=1=\dfrac{1}{2}OA$,$\therefore \angle AOB=30°$.

$\therefore \angle OAB=60°$.

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形.

$\therefore BC=1$. $\therefore CO=CB=1$.

$\therefore$ 当点 P 与点 C 重合时,$\triangle POB$ 是等腰三角形,此时点 $P(1,0)$.

$\because AE\perp BF$,$\therefore BE=EF$.

在等边三角形 ABC 中,

$\because BE\perp AC$,$\therefore CE=AE=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore OE=OC+CE=\dfrac{3}{2}$.

$\therefore BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore F(\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

$\because OA$ 垂直平分 BF,

$\therefore OF=OB$.

$\therefore$ 当点 P 与点 F 重合时,$\triangle POB$ 是等腰三角形,此时点 $P(\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

$\because OE=\dfrac{3}{2},OD=3$,

$\therefore$ 点 E 为 OD 的中点.

$\therefore BE$ 垂直平分 OD.

$\therefore BO=BD$.

$\therefore$ 当点 P 与点 D 重合时,$\triangle POB$ 是等腰三角形,此时点 $P(3,0)$.

综上,点 P 的坐标为 $(1,0)$,$(3,0)$ 或 $(\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

集训四

1. $2xy$　2. 18. 4　3. 78°　4. $\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$　5. 2

6. $\frac{4}{3}$，$\frac{8}{3}$或 2 【解析】①当$\angle ABD=90°$时，如图 1，则$\angle DBC+\angle ABO=90°$.

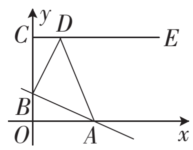


图 1

$\because \angle BAO+\angle ABO=90°$，

$\therefore \angle DBC=\angle BAO$.

由直线$y=-\frac{1}{2}x+b$交线段 OC 于点 B，交 x 轴于点 A，可知 $OB=b$，$OA=2b$.

$\because$ 点 $C(0,4)$，

$\therefore OC=4$.

$\therefore BC=4-b$.

在$\triangle DBC$和$\triangle BAO$中，

$$\begin{cases}\angle DCB=\angle AOB,\\ \angle DBC=\angle BAO,\\ BD=AB,\end{cases}$$

$\therefore \triangle DBC\cong\triangle BAO$(AAS). $\therefore BC=OA$，

即 $4-b=2b$. $\therefore b=\frac{4}{3}$.

②当$\angle ADB=90°$时，如图 2，

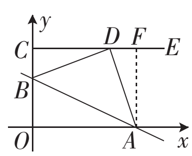


图 2

作 $AF\perp CE$ 于点 F，

同理可证得$\triangle BDC\cong\triangle DAF$，

$\therefore CD=AF=4$，$BC=DF$.

$\because OB=b$，$OA=2b$，

$\therefore BC=DF=2b-4$.

$\because BC=4-b$，

$\therefore 2b-4=4-b$.

$\therefore b=\frac{8}{3}$.

③当$\angle DAB=90°$时，如图 3，

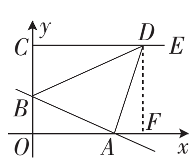


图 3

作 $DF\perp OA$ 于点 F.

同理可证得$\triangle AOB\cong\triangle DFA$，

$\therefore OA=DF$. $\therefore 2b=4$. $\therefore b=2$.

综上，b 的值为$\frac{4}{3}$，$\frac{8}{3}$或 2.

专项三 解 答 题

1 创新画图类

体验 1 解：(1)如图 1，线段 CF 即为所求.

(2)如图 2，EF 即为所求.

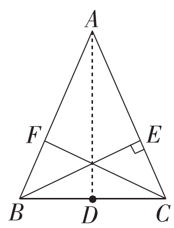


图 1

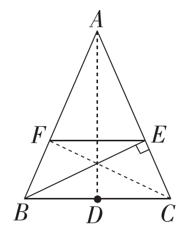


图 2

体验 2 解：(1)如图 1，矩形 $DCMN$ 即为所求.

(2)如图 2，矩形 $BCET$ 或矩形 $ADET$ 即为所求.

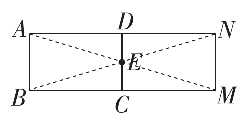


图 1

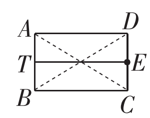


图 2

体验 3 解：(1)如图 1，直线 l 即为所求.

(2)如图 2，直线 AG 即为所求.

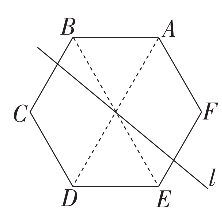


图 1

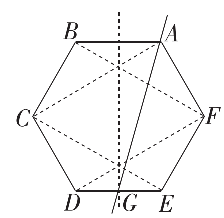


图 2

体验 4 解：(1)如图 1，点 F 即为所求.

(2)如图 2，五边形 $AHCBG$ 即为所求.

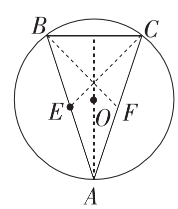


图 1

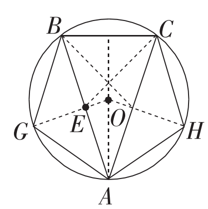


图 2

体验 5 解：(1)如图 1，线段 BD 即为所求.

(2)如图 2，线段 OF 即为所求.

(3)如图 3，直线 AE 即为所求.

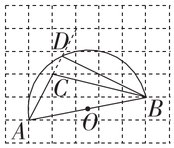


图 1

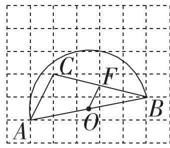


图 2

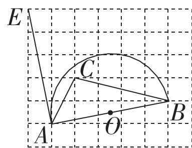


图 3

体验 6　解:(1)如图 1,点 D 即为所求.

(2)如图 2,直线 l 即为所求.

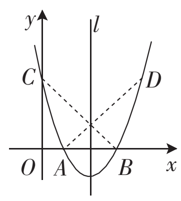


图 1

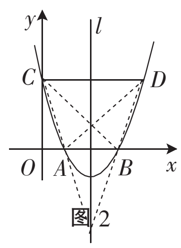


图 2

针对训练

1. 解:(1)如图 1,DM 即为所求.

(2)如图 2,AN 即为所求.

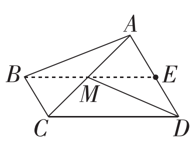


图 1

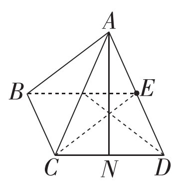


图 2

2. 解:(1)如图 1,点 Q 即为所求.

(2)如图 2,点 Q 即为所求.

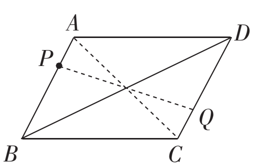


图 1

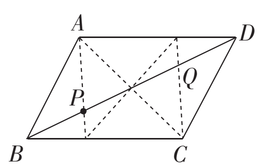


图 2

3. 解:(1)如图 1,PQ 即为所求.

(2)如图 2,BH 即为所求.

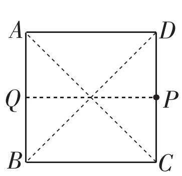


图 1

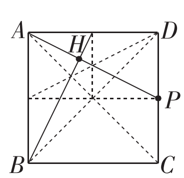


图 2

4. 解:(1)如图 1,AD 即为所求.

(2)如图 2,点 G 即为所求.

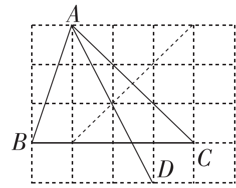


图 1

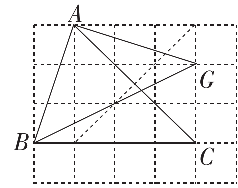


图 2

5. 解:(1)如图 1,直线 EP 即为所求.

(2)如图 2,四边形 $PBQA$ 即为所求.

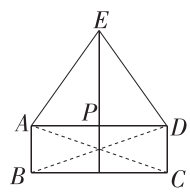


图 1

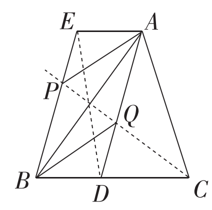


图 2

6. 解:(1)如图 1,$\angle CAD$ 即为所求.

(2)如图 2,$\triangle ACE$ 即为所求.

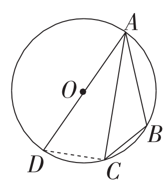


图 1

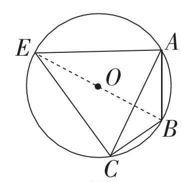


图 2

7. 解:(1)如图 1,$\triangle ABC$ 即为所求.

(2)如图 2,矩形 $ABCD$ 即为所求.

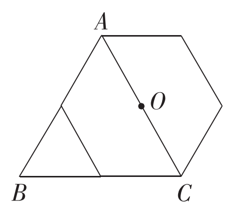


图 1

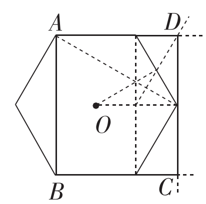


图 2

8. 解:(1)如图 1,平行四边形 $ABCD$ 即为所求.(答案不唯一)

(2)如图 2,平行四边形 $ABCD$ 即为所求.

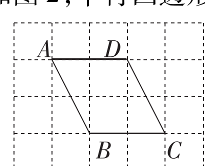


图 1

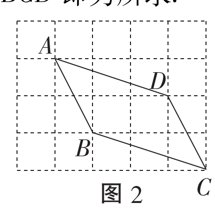


图 2

9. 解:(1)在图 1 中,直线 CD 即为所求.

(2)在图 2 中,线段 BE 即为所求.

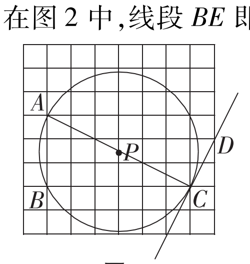


图 1

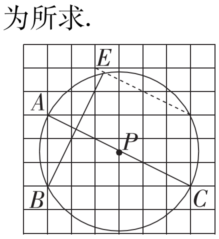


图 2

10. 解:(1)如图 1,$\angle DBC$ 即为所求.

(2)如图 2,$\angle FBE$ 即为所求.

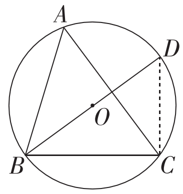


图 1

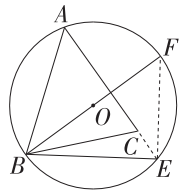


图 2

11. 解:(1)如图 1,AF 即为所求.

(2)如图 2,DH 即为所求.

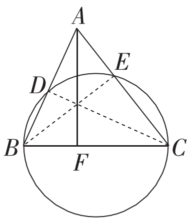


图 1

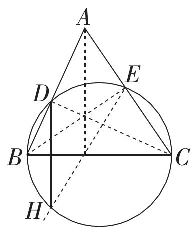


图 2

12. 解:(1)如图 1,直线 m 即为所求.

(2)如图 2,直线 n 即为所求.

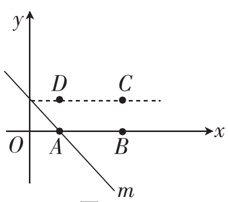


图 1

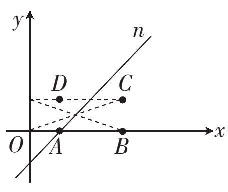


图 2

2　实物情景类

体验 1　解:(1)如图,过点 B 作 $BE\perp OC$ 于点 E.

在 Rt$\triangle ABE$ 中,$\angle BAC=53°$,$AB=3$ m,

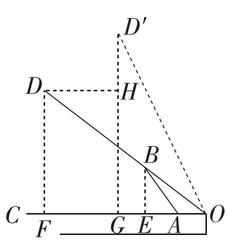
$\therefore BE=AB\cdot\sin\angle BAE=3\times\sin 53°\approx 3\times\frac{4}{5}=\frac{12}{5}$(m).

在 Rt$\triangle BOE$ 中,$\angle BOE=37°$,$BE\approx\frac{12}{5}$,

$\because \sin\angle BOE=\frac{BE}{OB}$,

$\therefore OB=\frac{BE}{\sin\angle BOE}\approx\frac{\frac{12}{5}}{\frac{3}{5}}=4$(m).

因此,OB 的长约为 4 m.



(2)如图,过点 D 作 $DF\perp OC$ 于点 F,旋转后点 D 的对应点为 D',过点 D' 作 $D'G\perp OC$ 于点 G,过点 D 作 $DH\perp D'G$ 于点 H.

在 Rt$\triangle FOD$ 中,$OD=OB+BD\approx 4+6=10$(m),$\angle DOF=37°$,

$\therefore DF=OD\cdot\sin 37°\approx 10\times\frac{3}{5}=6$(m).

$\therefore D'G=D'H+HG\approx 3+6=9$(m).

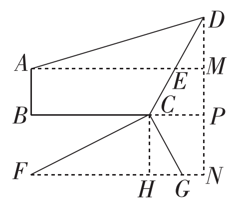
在 Rt$\triangle D'OG$ 中,$OD'\approx 10$ m,$D'G\approx 9$ m,

$\therefore \sin\angle D'OG=\frac{D'G}{D'O}\approx\frac{9}{10}$. $\therefore \angle D'OG\approx 64°$.

$\therefore \angle D'OD\approx 64°-37°=27°$.

因此,云梯 OD 大约旋转了 27°.

体验 2　解:(1)如图,过点 D 作 $DN\perp FG$ 于点 N,交 AE 的延长线于点 M,交 BC 的延长线于点 P,过点 C 作 $CH\perp FG$ 于点 H.



在 Rt$\triangle DCP$ 中,$\because CD=60$ cm,$\angle DCP=60°$,

$\therefore DP=CD\cdot\sin 60°=30\sqrt{3}$(cm).

在 Rt$\triangle CHG$ 中,$\because CG=30$ cm,$\angle CGF=60°$,

$\therefore CH=CG\cdot\sin 60°=15\sqrt{3}$(cm).

$\because AE/\!/BC/\!/FG$,$DN\perp FG$,$CH\perp FG$,$\angle B=90°$,

$\therefore$ 四边形 $CHNP$ 和四边形 $ABPM$ 都是矩形.

$\therefore PN=CH=15\sqrt{3}$ cm.

$\therefore DN=DP+PN=45\sqrt{3}\approx 77.9$(cm).

(2)在 Rt$\triangle ADM$ 中,

$\because AD=80$ cm,$\angle DAM=15°$,

$\therefore AM=AD\cdot\cos 15°\approx 77.6$(cm).

在 Rt$\triangle DCP$ 中,

$\because CD=60$ cm,$\angle DCP=60°$,

$\therefore CP=CD\cdot\cos 60°=30$(cm).

$\therefore BC=BP-CP=AM-CP\approx 77.6-30=47.6$(cm).

故 BC 的长度约为 47.6 cm.

体验 3　解:(1)$\because$ 嘉琪在 A 处测得垂直站立于 B 处的爸爸头顶 C 的仰角为 14°,

$\therefore \angle CAB=14°$,$\angle CBA=90°$.

$\therefore \angle C=180°-\angle CAB-\angle CBA=76°$.

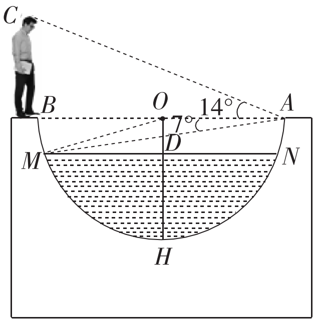
$\because \tan C=\frac{AB}{BC}$,$BC=1.7$ m,

$\therefore \tan 76° = \frac{AB}{1.7}$.

$\therefore AB = 1.7 \times \tan 76° = 6.8$(m).

答:$\angle C$ 为 $76°$,AB 的长约为 6.8 m.

(2)线段 DH 如图所示,连接 OM.



$\because OA = OM$,$\angle BAM = 7°$,

$\therefore \angle OMA = \angle OAM = 7°$.

$\because AB /\!/ MN$,$\therefore \angle AMD = \angle BAM = 7°$.

$\therefore \angle OMD = 14°$. $\therefore \angle MOD = 76°$.

在 Rt$\triangle MOD$ 中,$\tan\angle MOD = \frac{MD}{OD}$,

$\therefore \tan 76° = \frac{MD}{OD}$. $\therefore MD = 4OD$.

设 $OD = x$ m,则 $MD = 4x$ m.

在 Rt$\triangle MOD$ 中,$OM = OA = \frac{1}{2}AB = 3.4$ m,

$\therefore x^2 + (4x)^2 = 3.4^2$.

$\because x > 0$,$\therefore x = \frac{\sqrt{17}}{5} = 0.82$.

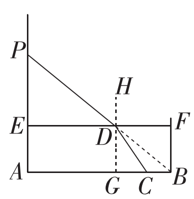
$\therefore OD = 0.82$ m.

$\therefore DH = OH - OD = OA - OD = 3.4 - 0.82 = 2.58 \approx 2.6$(m).

答:最大水深约为 2.6 m.

针对训练

1. 解:(1)如图,过点 D 作 $DG \perp AB$,垂足为 G.



由题意得四边形 $DGBF$ 是矩形,

$\therefore DG = BF = 12$ cm,$BG = DF = 16$ cm.

在 Rt$\triangle DGB$ 中,$\tan\angle BDG = \frac{BG}{DG} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$,

$\therefore \angle BDG \approx 53°$. $\therefore \angle PDH = \angle BDG \approx 53°$.

$\therefore$ 入射角 α 的度数约为 $53°$.

(2)$\because BG = 16$ cm,$BC = 7$ cm,

$\therefore CG = BG - BC = 9$(cm).

在 Rt$\triangle CDG$ 中,$DG = 12$ cm,

$\therefore DC = \sqrt{CG^2 + DG^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$(cm).

$\therefore \sin\beta = \sin\angle GDC = \frac{CG}{CD} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.

由(1)得 $\angle PDH \approx 53°$,$\therefore \sin\angle PDH = \sin\alpha \approx \frac{4}{5}$.

$\therefore$ 折射率 $n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \approx \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$.

$\therefore$ 光线从空气射入水中的折射率 n 约为 $\frac{4}{3}$.

2. 解:(1)四边形 $BEHC$ 是平行四边形.

证明:$\because$ 四边形 $FECG$ 是矩形,

$\therefore \angle F = 90°$,$CG = EF$,$FG /\!/ EC$.

$\therefore \angle CED = \angle EHF$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,$\therefore \angle EDC = 90° = \angle F$.

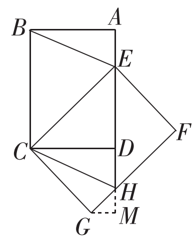
结合旋转易得 $CG = CD = EF$,

$\therefore \triangle EDC \cong \triangle HFE$(AAS). $\therefore EH = EC$.

由旋转得 $EC = BC$,$\therefore EH = BC$.

又$\because EH /\!/ BC$,$\therefore$ 四边形 $BEHC$ 为平行四边形.

(2)如图,延长 AH 交水平地面于点 M,连接 GM.



$\because \angle BCE = 48°$,$BC = CE$,$\therefore \angle EBC = 66°$.

$\therefore \angle ABE = 90° - \angle EBC = 24°$.

$\therefore AE = AB \cdot \tan\angle ABE \approx 3 \times 0.45 = 1.35$.

由(1)易知 $FH = ED$,$EH = BC = 4$. 又 $FG = AD$,

$\therefore GH = AE \approx 1.35$.

由平行线的性质易知 $\angle GHM = \angle CED = \angle BCE = 48°$,

$\therefore HM = GH \cdot \cos\angle GHM \approx 1.35 \times 0.67 \approx 0.90$.

$\therefore AM = AE + EH + HM \approx 1.35 + 4 + 0.90 \approx 6.3$,

即点 A 到水平地面的距离约为 6.3 m.

3. 解:(1)12

(2)如答图 1,过点 Q 作 $QB \perp l$ 于点 B,过点 O 作 $OC \perp QB$ 于点 C.

$\because OA \perp l$,$QB \perp l$,$OC \perp QB$,

$\therefore \angle OAB = \angle ABC = \angle OCB = 90°$.

$\therefore$ 四边形 $OABC$ 为矩形.

$\therefore CB = OA = 160 - \frac{153}{2} = 83.5$(m).

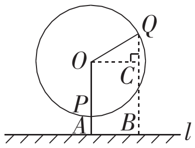
又$\because \angle POQ = 120°, \angle AOC = 90°$,

$\therefore \angle QOC = 30°$.

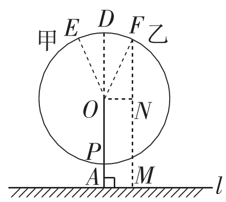
$\therefore QC = \frac{1}{2}OQ = \frac{1}{2} \times \frac{153}{2} = 38.25$(m).

$\therefore QB = QC + CB = 38.25 + 83.5 \approx 121.8$(m).

答:点 Q 距离地面约 121.8 m.



答图 1



答图 2

(3)$\because$ 摩天轮一共有 60 个座舱且旋转一周为 360°,

$\therefore$ 每两个座舱相隔 $360° \div 60 = 6°$.

设甲乘坐的座舱为点 E,乙乘坐的座舱为点 F,

$\therefore$ 由题意得甲、乙两人的座舱形成的夹角 $\angle EOF = 8 \times 6° = 48°$.

$\because$ 甲、乙两人座舱到地面的距离相等,

$\therefore \angle EOP = \angle FOP$.

延长 PO 交$\odot O$ 于点 D,

则$\angle EOD = \angle FOD = \frac{1}{2}\angle EOF = 24°$.

如答图 2,过点 F 作 $FM \perp l$,垂足为 M,过点 O 作 $ON \perp FM$ 于点 N,

易知四边形 $OAMN$ 为矩形.

$\therefore NM = OA = 83.5$(m).

$\because OD /\!/ FM$,$\therefore \angle OFN = \angle FOD = 24°$.

$\therefore FN = OF \cdot \cos 24° \approx \frac{153}{2} \times 0.91 = 69.615$(m).

$\therefore FM = FN + NM \approx 69.615 + 83.5 \approx 153.1$(m).

答:甲、乙乘坐的座舱距离地面的高度约为 153.1 m.

3 概率统计类

体验 1 解:(1)40 99 92

(2)$500 \times \frac{5}{10} + 400 \times 30\% = 370$(人),

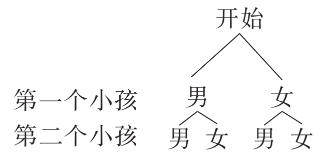
因此,估计两个年级分数低于 90 分的家长总人数为 370.

(3)九年级家长对“青少年身心健康知识”了解得更好. 理由如下:

在平均数和中位数相同的情况下,九年级测试成绩的众数更高,且方差小于八年级的,所以九年级家长了解得更好.

体验 2 解:(1)随机 $\frac{1}{2}$

(2)画树状图如下:



由树状图可知,共有 4 种等可能的结果,其中一男一女的结果有 2 种,

$\therefore P$(两个小孩是“一男一女”)$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

针对训练

1. 解:(1)第二次测试 8 分人数为 $40 \times 35\% = 14$,

故 7 分人数为 $40 - 2 - 8 - 13 - 14 = 3$.

补全统计图略.

由已知得众数 $a = 8$,

平均数 $b = \frac{1}{40} \times (2 \times 6 + 3 \times 7 + 14 \times 8 + 13 \times 9 + 8 \times 10) = 8.55$,

合格率 $c = \frac{40 - 2 - 3}{40} \times 100\% = 87.5\%$.

(2)$1\ 200 \times 87.5\% = 1\ 050$(人).

因此,估计专项安全教育活动后达到合格水平的学生人数大约为 1 050.

(3)专项安全教育活动的效果显著. 理由如下:

专项安全教育活动后,学生测试成绩的平均数、中位数以及合格率均比开展专项安全教育活动前高得多,所以专项安全教育活动的效果显著.

2. 解:(1)③

(2)根据题意,列表如下:

	A	B	C	D
A	(A,A)	(A,B)	(A,C)	(A,D)
B	(B,A)	(B,B)	(B,C)	(B,D)
C	(C,A)	(C,B)	(C,C)	(C,D)
D	(D,A)	(D,B)	(D,C)	(D,D)

由表可知,共有 16 种等可能的情况,其中小明和小涵参观的项目都是瑞昌的非物质文化遗产的有 4 种,

$\therefore P$(小明和小涵参观的项目都是瑞昌的非物质文化遗产)$= \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

3. 解:(1)把 10 片杧果树叶的长宽比从小到大排列,排在中间的两个数分别为 3.7,3.8,

故 $m=\frac{3.7+3.8}{2}=3.75$.

10 片荔枝树叶的长宽比中出现次数最多的是 2.0,故 $n=2.0$.

故答案为:3.75,2.0.

(2)$\because 0.0424<0.0669$,

$\therefore$ 杧果树叶的形状差别小,故 A 同学说法不合理.

$\because$ 荔枝树叶的长宽比的平均数是 1.91,中位数是 1.95,众数是 2.0,

$\therefore$ B 同学说法合理.

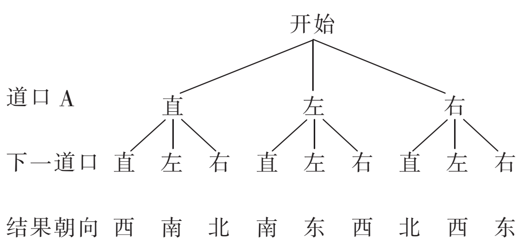
故答案为:②.

(3)$\because$ 一片长 11 cm、宽 5.6 cm 的树叶,长宽比接近 2,

$\therefore$ 这片树叶更可能来自荔枝树.

4. 解:(1)$\frac{1}{3}$.

(2)补全树状图如图.



由树状图可知,共有 9 种等可能的结果,其中嘉淇经过两个十字道口后向西参观的结果有 3 种,向南参观的结果有 2 种,向北参观的结果有 2 种,向东参观的结果有 2 种,

$\therefore P(\text{向西})=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$,$P(\text{向南})=P(\text{向北})=P(\text{向东})=\frac{2}{9}$.

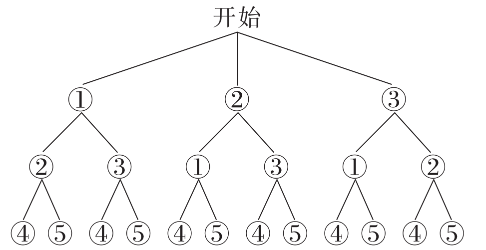
$\therefore$ 向西参观的概率较大.

5. 解:(1)在①$\sqrt{2}$,②$\sqrt{8}$,③1 中,无理数有两个,

$\therefore$ 从盒子 A 中任意抽出 1 支签,抽到无理数的概率是$\frac{2}{3}$.

故答案为$\frac{2}{3}$.

(2)画树状图如下:

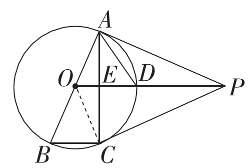


由树状图可知,共有 12 种等可能的结果,其中抽到的 2 个实数进行相应的运算后结果是无理数的有①②⑤,①③④,①③⑤,②①⑤,②③④,②③⑤,③①④,③①⑤,③②④,③②⑤,共 10 种,

$\therefore$ 抽到的 2 个实数进行相应的运算后结果是无理数的概率为$\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$.

4 圆的切线的判定与相关计算

体验 1 (1)证明:如图,连接 OC,



$\therefore OB=OC$.

$\therefore \angle OBC=\angle OCB$.

$\because BC\parallel OP$,

$\therefore \angle OBC=\angle OCB=\angle AOP=\angle COP$.

$\because OA=OC, OP=OP$,

$\therefore \triangle AOP\cong\triangle COP(\text{SAS})$.

$\therefore \angle OCP=\angle OAP=90°$.

$\therefore OC\perp PC$. $\therefore PC$ 是$\odot O$ 的切线.

(2)解:$\because AB$ 是$\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ACB=90°$.

$\because BC\parallel OP$,

$\therefore \angle AEO=\angle ACB=90°$.

$\because \sin\angle BAC=\frac{OE}{OA}=\frac{1}{3}$,

$\therefore$ 设 $OE=x$,则 $AO=3x$,$AE=\sqrt{AO^2-OE^2}=2\sqrt{2}x$.

$\therefore DE=OD-OE=2x$.

在 Rt$\triangle ADE$ 中,由勾股定理得 $AE^2+DE^2=AD^2$,即 $(2\sqrt{2}x)^2+(2x)^2=(2\sqrt{3})^2$,

解得 $x=1$ 或 -1(舍去),$\therefore AE=2\sqrt{2}$.

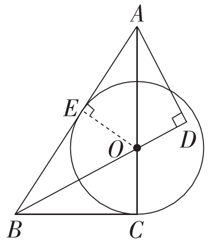
$\because PA$ 是$\odot O$ 的切线,$\therefore \angle OAP=90°$.

$\therefore \angle BAC=90°-\angle AOE=\angle APE$.

$\therefore \sin\angle BAC=\sin\angle APE=\frac{AE}{PA}=\frac{1}{3}$.

$\therefore PA=3AE=6\sqrt{2}$.

体验2 (1)证明:如图,过点 O 作 $OE\perp AB$ 于点 E.



$\because AD\perp BO$ 于点 D,

$\therefore \angle D=90°$.

$\therefore \angle BAD+\angle ABD=90°$, $\angle AOD+\angle OAD=90°$.

$\because \angle AOD=\angle BAD$, $\therefore \angle ABD=\angle OAD$.

又$\because BC$ 为⊙O 的切线,$\therefore AC\perp BC$.

$\therefore \angle BCO=\angle D=90°$.

$\because \angle BOC=\angle AOD$,

$\therefore \angle OBC=\angle OAD=\angle ABD$.

$\therefore OE=OC$,

$\because OE\perp AB$,

$\therefore AB$ 是⊙O 的切线.

(2)解:$\because \angle ABC+\angle BAC=90°$, $\angle EOA+\angle BAC=90°$,

$\therefore \angle EOA=\angle ABC$.

$\because \tan\angle ABC=\dfrac{4}{3}$, $BC=6$,

$\therefore AC=BC\cdot\tan\angle ABC=8$.

$\therefore AB=10$.

由(1)易知 $BE=BC=6$,

$\therefore AE=4$.

$\because \tan\angle EOA=\tan\angle ABC=\dfrac{4}{3}$,

$\therefore \dfrac{AE}{OE}=\dfrac{4}{3}$.

$\therefore OE=OC=3$, $OB=\sqrt{BE^2+OE^2}=3\sqrt{5}$.

$\because \angle ABD=\angle OBC$, $\angle D=\angle ACB=90°$,

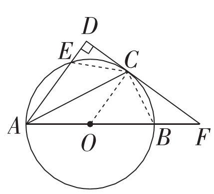
$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle OBC$.

$\therefore \dfrac{OC}{AD}=\dfrac{OB}{AB}$,即$\dfrac{3}{AD}=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.

$\therefore AD=2\sqrt{5}$.

针对训练

1.(1)证明:如图,连接 OC.



$\because$ 点 C 为$\overset{\frown}{EB}$的中点,

$\therefore \angle EAC=\angle BAC$.

$\because OA=OC$,

$\therefore \angle BAC=\angle OCA$.

$\therefore \angle EAC=\angle OCA$. $\therefore AE\parallel OC$.

$\because CD\perp AE$,

$\therefore OC\perp CD$.

$\therefore CD$ 是⊙O 的切线.

(2)解:如图,连接 CE, BC.

在 Rt$\triangle DCE$ 中,由勾股定理得 $CE=\sqrt{CD^2+DE^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

$\because$ 点 C 是$\overset{\frown}{EB}$的中点,

$\therefore BC=EC=\sqrt{5}$.

$\because \angle AEC+\angle ABC=180°$, $\angle AEC+\angle DEC=180°$,

$\therefore \angle ABC=\angle DEC$.

$\because AB$ 为⊙O 的直径,$\therefore \angle ACB=90°$.

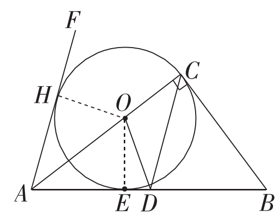
$\therefore \angle ACB=\angle D$.

$\therefore \triangle EDC\backsim\triangle BCA$.

$\therefore \dfrac{CE}{AB}=\dfrac{DE}{BC}$,即$\dfrac{\sqrt{5}}{AB}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. 解得 $AB=5$.

$\therefore$ ⊙O 的半径长是$\dfrac{5}{2}$.

2.(1)证明:如图,作 $OH\perp FA$,垂足为 H,连接 OE.



$\because \angle ACB=90°$,点 D 是 AB 边的中点,

$\therefore CD=AD=\dfrac{1}{2}AB$.

$\therefore \angle CAD=\angle ACD$.

$\because \angle BDC=\angle CAD+\angle ACD=2\angle CAD$,

又$\angle FAC=\dfrac{1}{2}\angle BDC$, $\therefore \angle FAC=\angle CAB$,

即 AC 是$\angle FAB$ 的平分线.

$\because$ 点 O 在 AC 上,⊙O 与 AB 相切于点 E,

$\therefore OE\perp AB$,且 OE 是⊙O 的半径.

$\therefore OH=OE$, OH 是⊙O 的半径.

$\therefore AF$ 是⊙O 的切线.

(2)解:在$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$, $BC=6$, $\sin B=\dfrac{4}{5}$.

设 $AC=4x$, $AB=5x$,

$\therefore (5x)^2-(4x)^2=6^2$.

$\therefore x=2$,即 $AC=8$, $AB=10$.

设⊙O 的半径为 r,则 $OC=OE=r$.

易知 Rt$\triangle AOE\backsim$Rt$\triangle ABC$,

$\therefore \dfrac{OE}{AO}=\dfrac{BC}{AB}$,即$\dfrac{r}{8-r}=\dfrac{6}{10}$.

$\therefore r=3.\therefore AE=4.$

又$\because AD=\frac{1}{2}AB=5,\therefore DE=1.$

在 Rt△ODE 中,由勾股定理得 $OD=\sqrt{10}.$

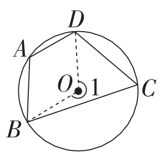
3.(1)90　180

(2)证明:(以图 2 为例证明,图 3 证明过程略)

如答图 1,连接 $OB,OD.\therefore\angle BOD=2\angle C,\angle 1=2\angle A.$

$\because\angle BOD+\angle 1=360°,\therefore 2\angle C+2\angle A=360°.$

$\therefore\angle A+\angle C=180°$,即圆内接四边形的对角互补.



答图 1

(3)证明:如答图 2,连接 $OD,DE.$

$\because OB=OD,\therefore\angle B=\angle ODB.$

$\because AB=AC,\therefore\angle B=\angle C.\therefore\angle ODB=\angle C.$

$\therefore OD/\!/AC.$

$\because$ 四边形 $ABDE$ 是圆内接四边形,

$\therefore\angle B+\angle AED=180°.$

$\because\angle DEC+\angle AED=180°,\therefore\angle B=\angle DEC.$

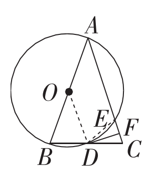
$\therefore\angle C=\angle DEC.\therefore DC=DE.$

$\because F$ 是线段 CE 的中点,

$\therefore DF\perp AC.\therefore DF\perp OD.$

$\because OD$ 是⊙O 的半径,

$\therefore DF$ 是⊙O 的切线.



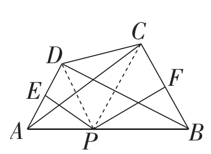
答图 2

5　几何探究题

体验 1　解:(1)直角梯形或矩形或正方形(答案不唯一)

(2)$AC=BD$. 理由如下:

连接 PD,PC,如答图 1 所示.



答图 1

$\because PE$ 是 AD 的垂直平分线,PF 是 BC 的垂直平分线,$\therefore PA=PD,PC=PB.$

$\therefore\angle PAD=\angle PDA,\angle PBC=\angle PCB.$

$\therefore\angle DPB=2\angle PAD,\angle APC=2\angle PBC.$

$\because\angle PAD=\angle PBC,$

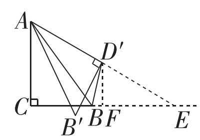
$\therefore\angle APC=\angle DPB.$

$\therefore\triangle APC\cong\triangle DPB$(SAS).

$\therefore AC=BD.$

(3)分两种情况考虑:

①当$\angle AD'B=\angle D'BC$ 时,延长 AD',CB 交于点 E,如答图 2 所示.



答图 2

$\therefore\angle ED'B=\angle EBD'.\therefore EB=ED'.$

由已知易得 $AC=AD'=\sqrt{AB^2-BC^2}=4.$

设 $EB=ED'=x,$

由勾股定理得 $4^2+(3+x)^2=(4+x)^2$,解得 $x=4.5.$

过点 D' 作 $D'F\perp CE$ 于点 $F,\therefore D'F/\!/AC.$

$\therefore\triangle ED'F\backsim\triangle EAC.$

$\therefore\frac{D'F}{AC}=\frac{ED'}{AE}$,即$\frac{D'F}{4}=\frac{4.5}{4+4.5}$,解得 $D'F=\frac{36}{17}.$

$\therefore S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}AC\cdot EC=\frac{1}{2}\times4\times(3+4.5)=15,$

$S_{\triangle BED'}=\frac{1}{2}BE\cdot D'F=\frac{1}{2}\times4.5\times\frac{36}{17}=\frac{81}{17}.$

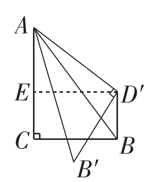
$\therefore S_{四边形ACBD'}=S_{\triangle ACE}-S_{\triangle BED'}=15-\frac{81}{17}=\frac{174}{17}.$

②当$\angle D'BC=\angle ACB=90°$时,过点 D' 作$D'E\perp AC$ 于点 E,如答图 3 所示.

$\therefore$ 四边形 $ECBD'$是矩形.

$\therefore ED'=BC=3.$

在 Rt△AED'中,根据勾股定理得 $AE=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7},$



答图 3

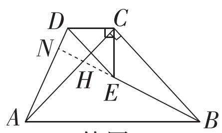
$\therefore S_{\triangle AED'}=\frac{1}{2}AE\cdot ED'=\frac{1}{2}\times\sqrt{7}\times3=\frac{3\sqrt{7}}{2},S_{矩形ECBD'}=CE\cdot CB=(4-\sqrt{7})\times3=12-3\sqrt{7}.$

$\therefore S_{四边形ACBD'}=S_{\triangle AED'}+S_{矩形ECBD'}=\frac{3\sqrt{7}}{2}+12-3\sqrt{7}=$

$12-\frac{3\sqrt{7}}{2}$.

综上所述，四边形 $AD'BC$ 的面积为 $\frac{174}{17}$ 或 $(12-\frac{3\sqrt{7}}{2})$.

体验 2 解：(1)如答图 1，延长 BE 交 AC 于点 H，交 AD 于点 N.



答图 1

当 $m=1$ 时，$DC=CE$，$CB=CA$.

$\because \angle ACB=\angle DCE=90°$，

$\therefore \angle ACD=\angle BCE$.

$\therefore \triangle ACD\cong\triangle BCE$(SAS).

$\therefore \angle DAC=\angle CBE$.

$\because \angle CAB+\angle ABE+\angle CBE=90°$，

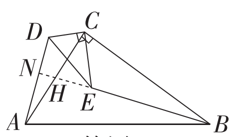
$\therefore \angle CAB+\angle ABE+\angle DAC=90°$.

$\therefore \angle ANB=90°$. $\therefore AD\perp BE$.

故答案为：$AD\perp BE$.

(2)(1)中的结论仍成立. 证明如下：

如答图 2，延长 BE 交 AC 于点 H，交 AD 于点 N.



答图 2

$\because \angle ACB=\angle DCE=90°$，

$\therefore \angle ACD=\angle BCE$.

又 $\because \frac{DC}{CE}=\frac{AC}{BC}=\frac{1}{m}$，

$\therefore \triangle DCA\backsim\triangle ECB$.

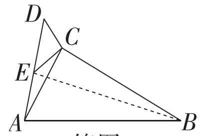
$\therefore \angle DAC=\angle CBE$.

$\because \angle CAB+\angle ABE+\angle CBE=90°$，

$\therefore \angle CAB+\angle ABE+\angle DAC=90°$.

$\therefore \angle ANB=90°$. $\therefore AD\perp BE$.

(3)如答图 3，当点 E 在线段 AD 上时，连接 BE.



答图 3

$\because \triangle DCA\backsim\triangle ECB$，

$\therefore \frac{BE}{AD}=\frac{BC}{AC}=m=\sqrt{3}$.

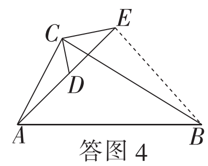
$\therefore BE=\sqrt{3}AD=\sqrt{3}(4+AE)$.

$\because AD\perp BE$，$\therefore AB^2=AE^2+BE^2$.

$\therefore 112=AE^2+3(4+AE)^2$.

$\therefore AE=2$ 或 $AE=-8$(舍去). $\therefore BE=6\sqrt{3}$.

如答图 4，当点 D 在线段 AE 上时，连接 BE.



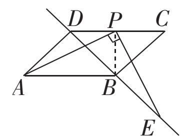
答图 4

同理可得 $BE=4\sqrt{3}$.

综上所述，BE 的长为 $6\sqrt{3}$ 或 $4\sqrt{3}$.

体验 3 (1)解：$PA=PE$.

证明如下：如图，连接 BP.



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AD=CB$，$AD\parallel CB$.

$\because AD=BD$，$\therefore BD=BC$.

$\therefore \angle BDC=\angle C=45°$.

$\therefore \angle DBC=\angle ADB=90°$.

$\therefore \triangle BDC$ 是等腰直角三角形，$\angle ADP=135°$.

$\because$ 点 P 为 CD 的中点，

$\therefore DP=BP$，$\angle CPB=90°$. $\therefore \angle PBD=45°$.

$\therefore \angle ADP=\angle PBE=135°$.

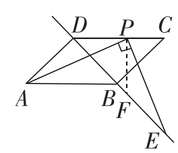
$\because PA\perp PE$，$\therefore \angle APE=\angle DPB=90°$.

$\therefore \angle APD=\angle BPE$.

$\therefore \triangle ADP\cong\triangle EBP$(ASA).

$\therefore PA=PE$.

(2)证明：如图，过点 P 作 $PF\perp CD$ 交 DE 于点 F.



$\because PF\perp CD$，$EP\perp AP$，

$\therefore \angle DPF=\angle APE=90°$.

$\therefore \angle DPA=\angle FPE$.

由(1)知，$\angle ADB=90°$，$\angle BDC=45°$，

$\therefore \angle PFD=45°$.

$\therefore \angle PFD=\angle PDF$.

$\therefore PD=PF$.

$\therefore \angle PDA=\angle PFE=135°$.

$\therefore \triangle ADP\cong\triangle EFP$(ASA).

$\therefore AD=EF$.

在Rt$\triangle FDP$中，$\angle PDF=45°$，

$\therefore DF=\sqrt{2}DP$.

$\because DE=DF+EF$，

$\therefore DA+\sqrt{2}DP=DE$.

(3)解：BE的长为$\sqrt{2}$或$7\sqrt{2}$.

体验4 (1)①解：$\because S_1=9,S_2=16$，

$\therefore b=3,a=4$.

$\because \angle ACB=90°$，

$\therefore S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times3\times4=6$.

②证明：由题意得$\angle FAN=\angle DBN=90°$，

$\therefore \angle FAH+\angle NAB=90°$，四边形$ANBC$是矩形.

$\therefore \angle ANB=90°,AN=a,NB=b$.

$\because FH\perp AB$，$\therefore \angle FAH+\angle AFN=90°$.

$\therefore \angle AFN=\angle NAB$. $\therefore \triangle AFN\backsim\triangle NAB$.

$\therefore \frac{AF}{AN}=\frac{AN}{NB}$，即$\frac{b+a}{a}=\frac{a}{b}$. $\therefore ab+b^2=a^2$.

$\therefore 2S+S_1=S_2$. $\therefore S_2-S_1=2S$.

(2)解：$S_2-S_1=\frac{1}{4}S$.

理由：$\because \triangle ABF$和$\triangle CBE$都是等边三角形，

$\therefore AB=FB,CB=EB,\angle ABF=\angle CBE=60°$.

$\therefore \angle ABF-\angle CBF=\angle CBE-\angle CBF$.

$\therefore \angle ABC=\angle FBE$.

在$\triangle ABC$和$\triangle FBE$中，

$$\begin{cases}AB=FB,\\ \angle ABC=\angle FBE,\\ CB=EB,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle FBE$(SAS).

$\therefore AC=FE=b,\angle FEB=\angle ACB=90°$.

$\therefore \angle FEC=90°-60°=30°$.

$\because EF\perp CF,CE=BC=a$，

$\therefore \cos\angle FEC=\frac{EF}{CE}$，即$\cos 30°=\frac{b}{a}$.

$\therefore b=a\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. $\therefore S=\frac{1}{2}ab=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

$\because \triangle ACD$和$\triangle CBE$都是等边三角形，

$\therefore S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}b^2,S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

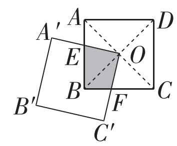
$\therefore S_2-S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}b^2=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2=\frac{\sqrt{3}}{16}a^2$

$=\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

$\therefore S_2-S_1=\frac{1}{4}S$.

体验5 解：(1)重叠部分的面积不变，总是等于正方形$ABCD$面积的$\frac{1}{4}$.

证明：如答图1，连接AC,BD.



答图1

$\because$四边形$ABCD$和四边形$OA'B'C'$都是正方形，

$\therefore OB=OC,\angle OBA=\angle OCB=45°,\angle BOC=\angle A'OC'=90°$. $\therefore \angle A'OB=\angle COC'$.

在$\triangle OBE$与$\triangle OCF$中，$\begin{cases}\angle OBE=\angle OCF,\\ OB=OC,\\ \angle BOE=\angle COF,\end{cases}$

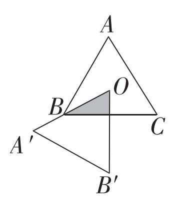
$\therefore \triangle OBE\cong\triangle OCF$(ASA).

$\therefore$四边形$OEBF$的面积等于三角形BOC的面积，

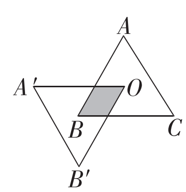
即重叠部分的面积不变，总是等于正方形$ABCD$面积的$\frac{1}{4}$.

(2)发生变化.

如答图2，当$\alpha=0°$时，重叠部分的形状为直角三角形，$S_{重叠部分}=\frac{1}{6}S_{\triangle ABC}$；



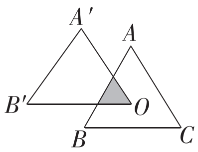
答图2



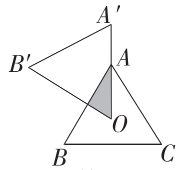
答图3

如答图3，当$\alpha=30°$时，重叠部分的形状为菱形，$S_{重叠部分}=\frac{2}{9}S_{\triangle ABC}$；

如答图4，当$\alpha=90°$时，重叠部分的形状为等边三角形，$S_{重叠部分}=\frac{1}{9}S_{\triangle ABC}$；



答图 4



答图 5

如答图 5，当 $\alpha=120°$时，重叠部分的形状为直角三角形，$S_{重叠部分}=\frac{1}{6}S_{\triangle ABC}$.

综上所述，运动过程中两个三角形重叠部分的面积发生变化. 当 α 增大时，重叠部分的面积先增大再减小，后又增大. 面积最大为正三角形 ABC 面积的 $\frac{2}{9}$，最小为正三角形 ABC 面积的 $\frac{1}{9}$.

针对训练

1. (1) 证明：$\because AD/\!/BC$，$\angle A=90°$，

$\therefore \angle ABC=180°-\angle A=90°$，$\angle ADB=\angle CBD$.

$\because$ 对角线 DB 平分 $\angle ADC$，

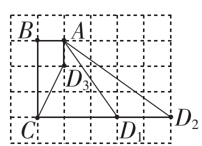
$\therefore \angle ADB=\angle CDB$.

$\therefore \angle CBD=\angle CDB$.

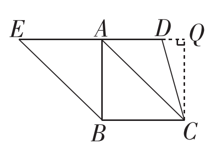
$\therefore CD=CB$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为邻等四边形.

(2) 解：如图，D_1，D_2，D_3 即为所求.



(3) 解：如图，过点 C 作 $CQ\perp AD$，交 AD 的延长线于点 Q.



$\because \angle DAB=\angle ABC=90°$，

$\therefore$ 四边形 $ABCQ$ 是矩形.

$\therefore AQ=BC$，$AB=CQ$，$AD/\!/BC$.

$\because BE/\!/AC$，

$\therefore$ 四边形 $ACBE$ 为平行四边形.

$\therefore BE=AC=8$，$AE=BC$.

设 $BC=AE=x$，而 $DE=10$，

$\therefore AD=10-x$，$DQ=x-(10-x)=2x-10$.

由题意可得 $CD=CB=x$，

由勾股定理可得 $x^2-(2x-10)^2=8^2-x^2$，

整理得 $x^2-20x+82=0$.

解得 $x_1=10-3\sqrt{2}$，$x_2=10+3\sqrt{2}>8$（不符合题意，舍去）.

$\therefore CB=CD=10-3\sqrt{2}$.

$\therefore$ 四边形 $EBCD$ 的周长为 $10+8+2(10-3\sqrt{2})=38-6\sqrt{2}$.

2. 解：(1) $\because \angle EAC+\angle CAD=\angle EAD=90°$，$\angle BAD+\angle DAC=90°$，$\therefore \angle BAD=\angle CAE$.

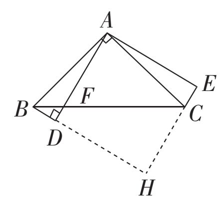
$\because AB=AC$，$AD=AE$，$\therefore \triangle BAD\cong\triangle CAE$(SAS).

$\therefore \angle ACE=\angle ABD=45°$，$BD=CE$.

$\therefore \angle BCE=\angle ACB+\angle ACE=45°+45°=90°$.

$\therefore BD=CE$ 且 $BD\perp CE$.

(2) 如图，延长 BD 和 EC，相交于点 H.



易知 $\triangle ABD\cong\triangle ACE$，且四边形 $ADHE$ 为正方形.

在 Rt$\triangle ACE$ 中，

$AE=\sqrt{AC^2-CE^2}=\sqrt{AB^2-CE^2}$

$=\sqrt{(2\sqrt{10})^2-2^2}=6=DH=EH=AD$.

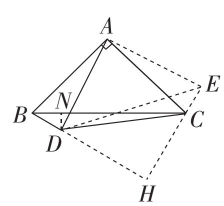
则 $BH=BD+DH=2+6=8$，$CH=HE-CE=6-2=4$.

在 Rt$\triangle BCH$ 中，$\tan\angle CBH=\frac{CH}{BH}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$，

在 Rt$\triangle BDF$ 中，$DF=BD\tan\angle CBH=2\times\frac{1}{2}=1$.

故 $AF=AD-DF=6-1=5$.

(3) 如图，作 $\angle DAE=90°$，使 $AE=AD$，连接 CE，延长 EC 和 BD，相交于点 H，连接 DE.



易知 $BD=CE$ 且 $BD\perp CE$，即 $\angle H=90°$，由作图知，$\triangle ADE$ 为等腰直角三角形.

设 $CE=BD=x$，在 Rt$\triangle BHC$ 中，$\angle HBC=30°$，$BC=\sqrt{2}AB=\sqrt{2}\times\sqrt{6}=2\sqrt{3}$.

$\therefore CH=\frac{1}{2}BC=\sqrt{3}$，$BH=BC\cos 30°=3$.

$\therefore DH = BH - x = 3 - x, EH = CH + CE = x + \sqrt{3}.$

$\therefore DE^2 = 2AD^2 = DH^2 + EH^2,$

即$(3-x)^2 + (\sqrt{3}+x)^2 = 2\times(4+\sqrt{3})$,

解得 $x = 2-\sqrt{3}$(舍去)或 1,即 $BD = 1$.

过点 D 作 $DN \perp BC$ 于点 N.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BND$ 中,$\angle CBD = 30°$,$BD = 1$,

则 $ND = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}$,$BN = BD\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore CN = CB - BN = 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$

$\therefore CD = \sqrt{CN^2 + DN^2} = \sqrt{7}.$

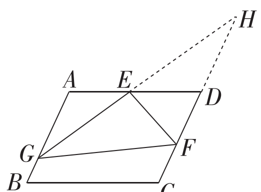
$\therefore \sin\angle BCD = \frac{ND}{CD} = \frac{\sqrt{7}}{14}.$

3. 解:(1)平行四边形

(2)①$GF = AG + DF$

②①中的结论仍然成立. 理由如下:

如答图 1,延长 GE,FD 交于点 H.



答图 1

$\because E$ 为 AD 的中点,$\therefore EA = ED$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB /\!/ CD$. $\therefore \angle A = \angle EDH$.

在$\triangle AEG$ 和$\triangle DEH$ 中,$\begin{cases}\angle A = \angle EDH,\\ EA = ED,\\ \angle AEG = \angle DEH,\end{cases}$

$\therefore \triangle AEG \cong \triangle DEH$(ASA).

$\therefore AG = HD$,$EG = EH$.

$\because \angle GEF = 90°$,$\therefore EF$ 垂直平分 GH.

$\therefore GF = HF = DH + DF$,即 $GF = AG + DF$.

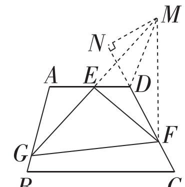
(3)如答图 2,延长 GE 至点 M,使得 $EM = EG$,连接 MD,MF,过点 M 作 $MN \perp CD$,交 CD 的延长线于点 N. $\because E$ 为 AD 的中点,$\therefore EA = ED$.

在$\triangle AEG$ 和$\triangle DEM$ 中,$\begin{cases}AE = DE,\\ \angle AEG = \angle DEM,\\ EG = EM,\end{cases}$

$\therefore \triangle AEG \cong \triangle DEM$(SAS).

$\therefore \angle EDM = \angle EAG = 105°$,$MD = AG = 2\sqrt{2}$.

$\because \angle EDF = 120°$,$\therefore \angle MDF = 135°$.



答图 2

$\therefore \angle MDN = 45°$. $\therefore \triangle MDN$ 为等腰直角三角形.

$\therefore MN = DN = \frac{\sqrt{2}}{2}DM = 2.$

$\therefore NF = ND + FD = 2 + 2 = 4.$

$\therefore MF = \sqrt{NF^2 + MN^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}.$

$\because GE = EM$,$\angle GEF = 90°$,$\therefore EF$ 垂直平分 GM.

$\therefore MF = GF$. $\therefore GF = 2\sqrt{5}$.

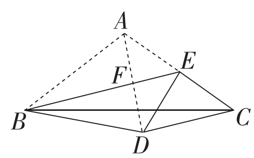
4. 问题 1:(1)证明:$\because AB = AC$,$\therefore \angle ABC = \angle ACB$.

$\because \triangle BDE$ 由$\triangle BAE$ 翻折得到,

$\therefore \angle A = \angle BDE = 180° - 2\angle ACB$.

$\because \angle EDC + \angle BDE = 180°$,$\therefore \angle EDC = 2\angle ACB$.

(2)解:如答图 1,连接 AD,交 BE 于点 F.



答图 1

$\because \triangle BDE$ 由$\triangle BAE$ 翻折得到,$\therefore AE = DE$,$AF = DF$,$\angle AFE = \angle AFB = 90°$.

又$\because$ 点 E 是 AC 的中点,

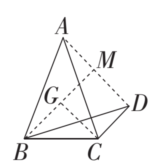
$\therefore CD = 2EF = 3$,$AE = EC = \frac{1}{2}AC = 2$.

$\therefore EF = \frac{3}{2}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AEF$ 中,$AF = \sqrt{AE^2 - EF^2} = \sqrt{4 - \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 中,$BF = \sqrt{AB^2 - AF^2} = \sqrt{16 - \frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{57}}{2}$,$\therefore BE = BF + EF = \frac{3+\sqrt{57}}{2}$.

问题 2:解:如答图 2,连接 AD,过点 B 作 $BM \perp AD$ 于点 M,过点 C 作 $CG \perp BM$ 于点 G.



答图 2

$\because AB = BD$,$BM \perp AD$,

$\therefore AM = DM$,$\angle ABM = \angle DBM = \frac{1}{2}\angle ABD$.

$\because 2\angle BDC = \angle ABD$,$\therefore \angle BDC = \angle DBM$.

$\therefore BM /\!/ CD$. $\therefore CD \perp AD$.

又$\because CG \perp BM$,$\therefore$ 四边形 $CGMD$ 是矩形. $\therefore CD = GM$.

在 Rt△ACD 中，$CD=1$，$AC=4$，

$\therefore AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$.

$\therefore AM=MD=\frac{\sqrt{15}}{2}$，$CG=MD=\frac{\sqrt{15}}{2}$.

在 Rt△BDM 中，$BM=\sqrt{BD^2-DM^2}=\sqrt{16-\frac{15}{4}}$

$=\frac{7}{2}$，

$\therefore BG=BM-GM=BM-CD=\frac{7}{2}-1=\frac{5}{2}$.

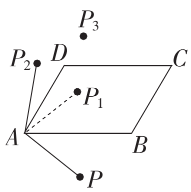
在 Rt△BCG 中，$BC=\sqrt{BG^2+CG^2}=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{15}{4}}$

$=\sqrt{10}$.

5. 解：(1)180°　8

(2)①$\beta=2\alpha$. 理由如下：

如答图 1，连接 AP_1.



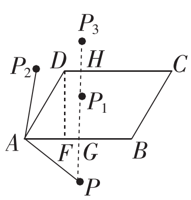
答图 1

由轴对称的性质可得：$\angle PAB=\angle BAP_1$，$\angle P_1AD=\angle DAP_2$，

$\therefore \angle PAB+\angle DAP_2=\angle BAP_1+\angle DAP_1=\angle BAD=\alpha$.

$\therefore \beta=2\alpha$.

②如答图 2，连接 PP_3，分别交 AB，CD 于点 G，H，过点 D 作 $DF\perp AB$ 于点 F.



答图 2

易证 P，P_1，P_3 在同一直线上，四边形 $DFGH$ 为矩形.

$\therefore GH=DF=AD\cdot\sin\angle BAD=m\cdot\sin\alpha$.

由对称的性质得 $HP_3=HP_1$，$PG=P_1G$.

$\therefore HP_3+PG=HP_1+GP_1=GH=m\cdot\sin\alpha$.

$\therefore PP_3=2GH=2m\cdot\sin\alpha$.

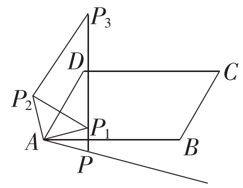
(3)$3\sqrt{2}-\sqrt{6}$或$2\sqrt{6}$　**【解析】**分两种情况讨论：

①当 $P_2P_3/\!/AD$ 时，如答图 3.

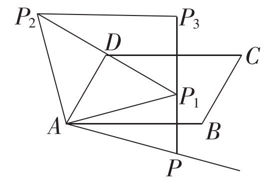
设 $AP=x$，根据 $PP_1+P_1P_3=PP_3$，$P_1P_3=2P_1P_2$，

可列方程 $2x\sin 15°+2\sqrt{2}x=2AD\sin 60°=6$.

求得 $x=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$.



答图 3



答图 4

②当 $P_2P_3/\!/AB$ 时，如答图 4.

设 $AP=x$，根据 $PP_1+P_1P_3=PP_3$，$P_1P_3=\frac{1}{2}P_1P_2$，

可列方程 $2x\sin 15°+\frac{\sqrt{2}}{2}x=6$.

求得 $x=2\sqrt{6}$.

6　二次函数的综合探究

体验 1　解：(1)将(2，1)代入 $y=x^2-2tx+3$ 中，

得 $1=4-4t+3$，

解得 $t=\frac{3}{2}$.

(2)抛物线的对称轴为直线 $x=t$.

若 $0<t\leqslant 3$，当 $x=t$ 时，函数取最小值，

$\therefore t^2-2t^2+3=-2$，

解得 $t=\pm\sqrt{5}$.

$\because t>0$，

$\therefore t=\sqrt{5}$.

若 $t>3$，当 $x=3$ 时，函数取最小值，

$\therefore -2=9-6t+3$，

解得 $t=\frac{7}{3}$(不合题意，舍去).

综上所述，$t=\sqrt{5}$.

(3)$\because$ 点 $A(m-2,a)$，$C(m,a)$关于对称轴对称，

$\therefore \frac{m-2+m}{2}=t$.

$\therefore m-1=t$，且点 A 在对称轴左侧，点 C 在对称轴右侧.

$\because$ 抛物线与 y 轴的交点为(0，3)，抛物线的对称轴为直线 $x=t$，

$\therefore$ 此交点关于对称轴的对称点为$(2m-2,3)$.

$\because a<3$，$b<3$ 且 $t>0$，

$\therefore 4<2m-2$，解得 $m>3$.

当点 A，B 都在对称轴左边时，

$\because a<b$，

$\therefore 4<m-2$，解得 $m>6$.

$\therefore m>6$.

当点 A,B 分别在对称轴两侧时，

$\because a<b$，$\therefore$ 点 B 到对称轴的距离大于点 A 到对称轴的距离.

$\therefore 4-(m-1)>m-1-(m-2)$，

解得 $m<4$.

$\therefore 3<m<4$.

综上所述，m 的取值范围为 $3<m<4$ 或 $m>6$.

体验 2 解：(1)当 $m=0$ 时，抛物线为 $y=x^2-x+3$，

将 $x=2$ 代入得 $y=4-2+3=5$，

$\therefore$ 点 $(2,4)$ 不在该抛物线上.

(2)抛物线 $y=x^2-(m+1)x+2m+3$ 的顶点为 $(\frac{m+1}{2},\frac{4(2m+3)-[-(m+1)]^2}{4})$，

化简得 $(\frac{m+1}{2},\frac{-m^2+6m+11}{4})$.

顶点移动到最高处时，即顶点的纵坐标最大，

而 $\frac{-m^2+6m+11}{4}=-\frac{1}{4}(m-3)^2+5$，

$\therefore$ 当 $m=3$ 时，纵坐标最大，即顶点移动到了最高处，此时顶点坐标为 $(2,5)$.

(3)设直线 EF 的解析式为 $y=kx+b$，

将 $(-1,-1)$，$(3,7)$ 代入，得

$\begin{cases}-1=-k+b,\\7=3k+b.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=2,\\b=1.\end{cases}$

$\therefore$ 直线 EF 的解析式为 $y=2x+1$.

联立 $\begin{cases}y=2x+1,\\y=x^2-(m+1)x+2m+3,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_1=2,\\y_1=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_2=m+1,\\y_2=2m+3.\end{cases}$

$\therefore$ 直线 $y=2x+1$ 与抛物线 $y=x^2-(m+1)x+2m+3$ 的交点为 $(2,5)$ 和 $(m+1,2m+3)$.

而 $(2,5)$ 在线段 EF 上，

$\therefore$ 若该抛物线与线段 EF 只有一个交点，则 $(m+1,2m+3)$ 不在线段 EF 上，或 $(2,5)$ 与 $(m+1,2m+3)$ 重合.

$\therefore m+1<-1$ 或 $m+1>3$ 或 $m+1=2$（此时 $2m+3=5$）.

$\therefore$ 抛物线顶点的横坐标的取值范围为 $x_{顶点}=\frac{m+1}{2}<-\frac{1}{2}$ 或 $x_{顶点}=\frac{m+1}{2}>\frac{3}{2}$ 或 $x_{顶点}=\frac{m+1}{2}=1$.

体验 3 解：(1)设抛物线的函数表达式为 $y=ax(x-10)(a\neq0)$.

$\because$ 当 $t=2$ 时，$BC=4$，

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(2,-4)$.

将点 C 的坐标代入表达式，得 $2a(2-10)=-4$，

解得 $a=\frac{1}{4}$.

$\therefore$ 抛物线的函数表达式为 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{2}x$.

(2)由抛物线的对称性得 $AE=OB=t$，

$\therefore AB=10-2t$.

当 $x=t$ 时，$BC=-\frac{1}{4}t^2+\frac{5}{2}t$.

$\therefore$ 矩形 $ABCD$ 的周长为

$2(AB+BC)=2[(10-2t)+(-\frac{1}{4}t^2+\frac{5}{2}t)]$

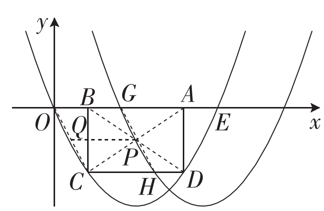
$=-\frac{1}{2}t^2+t+20$

$=-\frac{1}{2}(t-1)^2+\frac{41}{2}$.

$\because -\frac{1}{2}<0$，

$\therefore$ 当 $t=1$ 时，矩形 $ABCD$ 的周长有最大值，最大值为 $\frac{41}{2}$.

(3)如图，连接 AC,BD 相交于点 P，连接 OC，取 OC 的中点 Q，连接 PQ.



$\because$ 直线 GH 平分矩形 $ABCD$ 的面积，

$\therefore$ 直线 GH 过点 P.

由平移的性质可知，四边形 $OCHG$ 是平行四边形，

$\therefore PQ=CH$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore P$ 是 AC 的中点.

$\therefore PQ=\frac{1}{2}OA$.

当 $t=2$ 时，点 A 的坐标为 $(8,0)$，

$\therefore CH=PQ=\frac{1}{2}OA=4$.

$\therefore$ 抛物线平移的距离是 4.

体验 4 解：(1)$\because A_1$ 在直线 $y=-x-1$ 上，

$\therefore A_1(0,-1)$. $\therefore A_1B_1=OA_1=1$.

$\therefore B_1(1,-1)$.
$\therefore$ 点 A_2 的横坐标为1,且在直线 $y=-x-1$ 上.
$\therefore A_2(1,-2)$. $\therefore A_2B_2=A_2C_1=2$.
$\therefore B_2(3,-2)$.
故答案为:$(1,-1)$,$(3,-2)$.
(2)$\because A_1(0,-1)$,$B_1(1,-1)$,
$\therefore$ 抛物线 L_1 的对称轴为直线 $x=\frac{1}{2}$.
将 $x=\frac{1}{2}$ 代入 $y=-x-1$,得 $y=-\frac{3}{2}$,
$\therefore$ 抛物线 L_1 的顶点为$(\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$.
$\because A_2(1,-2)$,$B_2(3,-2)$,
$\therefore$ 抛物线 L_2 的对称轴为直线 $x=2$.
$\therefore$ 抛物线 L_2 的顶点为$(2,-3)$.
设抛物线 L_2 的解析式为 $y=a(x-2)^2-3$.
$\because L_2$ 过点 $B_2(3,-2)$,
$\therefore -2=a\cdot(3-2)^2-3$,解得 $a=1$.
$\therefore$ 抛物线 L_2 的解析式为 $y=(x-2)^2-3$.
将 $x=3$ 代入 $y=-x-1$ 中,得 $y=-4$,
$\therefore A_3(3,-4)$.
$\because$ 四边形 $A_3B_3C_3C_2$ 是正方形,$\therefore A_3B_3=4$.
$\therefore B_3(7,-4)$.
$\therefore$ 抛物线 L_3 的对称轴为直线 $x=5$.
把 $x=5$ 代入 $y=-x-1$,得 $y=-6$,
$\therefore$ 抛物线 L_3 的顶点为$(5,-6)$.
设抛物线 L_3 的解析式为 $y=a'(x-5)^2-6$,
将点 $B_3(7,-4)$代入,可得 $a'=\frac{1}{2}$,
$\therefore$ 抛物线 L_3 的解析式为 $y=\frac{1}{2}(x-5)^2-6$.
$\because$ 抛物线 L_1 的顶点为$(\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$,
抛物线 L_2 的顶点为$(2,-3)$,
抛物线 L_3 的顶点为$(5,-6)$,
……
$\therefore$ 抛物线 L_n 的顶点坐标为$(3\times 2^{n-2}-1,-3\times 2^{n-2})$.
(3)k_1 与 k_2 的数量关系为 $k_1=k_2$. 理由如下:
由(2)得 L_2 的解析式为 $y=(x-2)^2-3$,
当 $y=-1$ 时,$-1=(x-2)^2-3$,
解得 $x_1=\sqrt{2}+2$,$x_2=-\sqrt{2}+2$.
$\because 0<A_1D_1<1$,
$\therefore A_1D_1=2-\sqrt{2}$,$D_1B_1=1-(2-\sqrt{2})=\sqrt{2}-1$.
$\therefore A_1D_1=\sqrt{2}D_1B_1$,即 $k_1=\sqrt{2}$.
由(2)得抛物线 L_3 的解析式为 $y=\frac{1}{2}(x-5)^2-6$,
当 $y=-2$ 时,$-2=\frac{1}{2}(x-5)^2-6$,
解得 $x=5-2\sqrt{2}$或 $x=5+2\sqrt{2}$(舍去).
$\therefore A_2D_2=5-2\sqrt{2}-1=4-2\sqrt{2}=2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$,
$D_2B_2=2-(4-2\sqrt{2})=2\sqrt{2}-2=2(\sqrt{2}-1)$.
$\therefore A_2D_2=\sqrt{2}D_2B_2$,即 $k_2=\sqrt{2}$.
$\therefore k_1=k_2$.

体验5 解:(1)根据"关联抛物线"的定义得 C_2 的解析式为 $y=ax^2+4ax+4a-3$.
$\because y=ax^2+4ax+4a-3=a(x+2)^2-3$,
$\therefore C_2$ 的顶点坐标为$(-2,-3)$.
(2)①设点 P 的横坐标为 m.
$\therefore M(m,4am^2+am+4a-3)$,$N(m,am^2+4am+4a-3)$.
$\therefore MN=|4am^2+am+4a-3-(am^2+4am+4a-3)|=|3am^2-3am|$.
$\because MN=6a$,
$\therefore |3am^2-3am|=6a$.
解得 $m=-1$ 或 $m=2$.
$\therefore$ 点 P 的坐标为$(-1,0)$或$(2,0)$.
②$\because C_2$ 的解析式为 $y=a(x+2)^2-3$,
$\therefore$ 当 $x=-2$ 时,$y=-3$.
当 $x=a-4$ 时,$y=a(a-4+2)^2-3=a(a-2)^2-3$.
当 $x=a-2$ 时,$y=a(a-2+2)^2-3=a^3-3$.
根据题意可知,需要分三种情况讨论.
当 $a-4\leqslant -2<a-2$ 时,$0<a\leqslant 2$,
且当 $0<a<1$ 时,函数的最大值为 $a(a-2)^2-3$,函数的最小值为 -3,
$\therefore a(a-2)^2-3-(-3)=2a$,解得 $a=2-\sqrt{2}$或 $a=2+\sqrt{2}$(舍去).
当 $1\leqslant a\leqslant 2$ 时,函数的最大值为 a^3-3,函数的最小值为 -3,
$\therefore a^3-3-(-3)=2a$,解得 $a=\sqrt{2}$或 $a=-\sqrt{2}$(舍去).
当 $-2\leqslant a-4<a-2$ 时,$a\geqslant 2$,
函数的最大值为 a^3-3,函数的最小值为 $a(a-2)^2$

-3,

$\therefore a^3-3-[a(a-2)^2-3]=2a$,

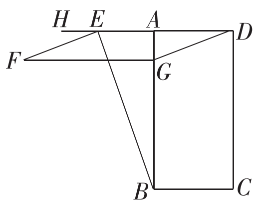
解得 $a=\frac{3}{2}$(舍去).

当 $a-4<a-2\leqslant -2$ 时,$a\leqslant 0$,不符合题意,舍去.

综上所述,a 的值为 $2-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}$.

体验6 解:(1)$y=-\frac{1}{2}x^2+x(0\leqslant x\leqslant 2)$,$AD=2$.

(2)当点 E 在 DA 的延长线上时,如图.



$\because BE\perp EF$,

$\therefore \angle HEF+\angle AEB=180°-\angle BEF=90°$.

又$\because AB\perp AE$,$\therefore \angle AEB+\angle ABE=90°$.

$\therefore \angle HEF=\angle ABE$.

又$\because EF/\!/DG$,$\therefore \angle ADG=\angle HEF$.

$\therefore \angle ADG=\angle ABE$.

又$\because \angle DAG=\angle EAB$,

$\therefore \triangle ADG\backsim\triangle ABE$.

$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{DG}{EB}=\frac{AG}{AE}$.

又$\because \frac{BE}{FE}=\frac{AB}{AD}$,$\therefore DG=EF$.

$\therefore$ 四边形 $DEFG$ 为平行四边形.

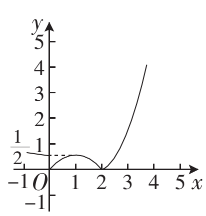
$\therefore y=DE\cdot AG$.

$\because AE=DE-AD=x-2$,

$\therefore AG=\frac{DA}{AB}\cdot AE=\frac{2}{4}(x-2)=\frac{1}{2}x-1$.

$\therefore y=x\cdot(\frac{1}{2}x-1)=\frac{1}{2}x^2-x(x\geqslant 2)$.

(3)①画出 y 关于 x 的图象,如图.



$\therefore$ 存在三个不同位置的点 E 时,$0<y<\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 点 E_1 和 E_2 在抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+x$ 上.

$\therefore DE_1+DE_2=2$.

②$\because 2DE_2=DE_1+DE_3$,$\therefore 2DE_2=2-DE_2+DE_3$.

$\therefore DE_3=3DE_2-2$.

令 $DE_2=a$,则有 $-\frac{1}{2}a^2+a=\frac{1}{2}(3a-2)^2-(3a-2)$,

整理得 $5a^2-10a+4=0$,

解得 $a=1+\frac{\sqrt{5}}{5}$ 或 $1-\frac{\sqrt{5}}{5}$(舍去).

$\therefore y=\frac{2}{5}$,即四边形 $DGFE_3$ 的面积为 $\frac{2}{5}$.

针对训练

1. 解:(1)① $y=x^2-2x+1$.

②当 $x<1$ 时,y 随 x 的增大而减小.(答案不唯一)

(2)$\because x=0$ 和 $x=2$ 时的函数值都是 1,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=1$.

$\therefore (1,n)$ 是顶点,$(-1,m)$ 和 $(3,p)$ 关于对称轴对称.

若在 m,n,p 这三个实数中,只有一个是正数,则抛物线必须开口向下,且 $m\leqslant 0$.

$\because -\frac{b}{2a}=1$,$\therefore b=-2a$.

$\therefore$ 二次函数为 $y=ax^2-2ax+1$.

$\therefore m=a+2a+1\leqslant 0$. $\therefore a\leqslant -\frac{1}{3}$.

2. 解:(1)将 $A(-1,0)$,$B(3,0)$ 代入 $y=x^2+bx+c$,

得 $\begin{cases}1-b+c=0,\\9+3b+c=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-2,\\c=-3.\end{cases}$

$\therefore$ 该抛物线的解析式为 $y=x^2-2x-3$.

(2)$\because$ 抛物线的解析式为 $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$,

$\therefore$ 抛物线的顶点 F 的坐标为 $(1,-4)$,抛物线的对称轴为直线 $x=1$.

当 $x=0$ 时,$y=0^2-2\times 0-3=-3$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0,-3)$.

设直线 BC 的解析式为 $y=mx+n(m\neq 0)$.

将 $B(3,0)$,$C(0,-3)$ 代入 $y=mx+n$,

得 $\begin{cases}3m+n=0,\\n=-3.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=1,\\n=-3.\end{cases}$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y=x-3$.

当 $x=1$ 时,$y=1-3=-2$,

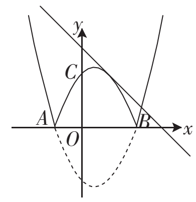
$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(1,-2)$.

$\therefore EF=|-2-(-4)|=2$.

(3)∵ 点 A 的坐标为$(-1,0)$,点 B 的坐标为$(3,0)$,∴ $AB=|3-(-1)|=4$.
设点 P 的坐标为(t,t^2-2t-3).
∵ $S_{\triangle PAB}=6$,
∴ $\frac{1}{2}\times4\cdot|t^2-2t-3|=6$,
即 $t^2-2t-3=3$ 或 $t^2-2t-3=-3$.
解得 $t_1=1-\sqrt{7}$,$t_2=1+\sqrt{7}$,$t_3=0$,$t_4=2$.
∴ 存在满足 $S_{\triangle PAB}=6$ 的点 P,点 P 的坐标为$(1-\sqrt{7},3)$,$(1+\sqrt{7},3)$,$(0,-3)$或$(2,-3)$.

3. 解:(1)①②③
(2)①$(0,3)$,$(1,0)$
②由①得 $y=nx^2-(n+3)x+3$ 与 x 轴的两个交点为$(1,0)$,$(\frac{3}{n},0)$,
C_n 的纵坐标为$\frac{4n\cdot3-(n+3)^2}{4n}$.
∵ $n>0$,抛物线与 x 轴有两个交点,
∴ 点 C_n 到 x 轴的距离为$\frac{(n+3)^2-12n}{4n}$.
当$\frac{3}{n}>1$ 时,
若$\frac{3}{n}-1=2\cdot\frac{(n+3)^2-12n}{4n}$,则$\triangle A_nB_nC_n$ 是直角三角形.
∴ $n_1=1$,$n_2=3$(舍去).
当$\frac{3}{n}<1$ 时,
若 $1-\frac{3}{n}=2\cdot\frac{(n+3)^2-12n}{4n}$,则$\triangle A_nB_nC_n$ 是直角三角形.
∴ $n_3=5$,$n_4=3$(舍去).
综上所述,$n=1$ 或 5.
③A_nA_{n+1}和 D_nD_{n+1}相等. 理由如下:
当 $n\geqslant4$ 时,抛物线 y_n 与 x 轴的左交点为 $A_n(\frac{3}{n},0)$,抛物线 y_{n+1} 与 x 轴的左交点为 $A_{n+1}(\frac{3}{n+1},0)$.
当 $nx^2-(n+3)x+3=3$ 时,
$x_1=\frac{n+3}{n}$,$x_2=0$(舍去).
∴ 点 D_n 的横坐标为$\frac{n+3}{n}$.
同理可得点 D_{n+1}的横坐标为$\frac{n+4}{n+1}$.
∴ $A_nA_{n+1}=\frac{3}{n}-\frac{3}{n+1}=\frac{3}{n(n+1)}$,$D_nD_{n+1}=\frac{n+3}{n}-\frac{n+4}{n+1}=\frac{3}{n(n+1)}$.
∴ $A_nA_{n+1}=D_nD_{n+1}$.

4. 解:(1)对于 $y=x^2-x-2$,当 $x=0$ 时,$y=-2$,
∴ $C(0,2)$.
当 $y=0$ 时,$x^2-x-2=0$,即$(x-2)(x+1)=0$,
∴ $x_1=2$,$x_2=-1$.
∴ $A(-1,0)$,$B(2,0)$.
设图象 W 位于线段 AB 上方部分对应的函数解析式为 $y=a(x+1)(x-2)$.
把 $C(0,2)$代入,得 $-2a=2$.
∴ $a=-1$.
∴ $y=-(x+1)(x-2)=-x^2+x+2$.
∴ 图象 W 位于线段 AB 上方部分对应的函数解析式为 $y=-x^2+x+2(-1\leqslant x\leqslant2)$.
(2)由图象得直线 $y=-x+b$ 与图象 W 有三个交点时,存在两种情况:
①当直线 $y=-x+b$ 过点 C 时,直线与图象 W 有三个交点,此时 $b=2$.
②当直线 $y=-x+b$ 与图象 W 位于线段 AB 上方部分对应的函数图象相切时,如下图,



令 $-x+b=-x^2+x+2$.
化简得 $x^2-2x+b-2=0$.
∴ $\Delta=(-2)^2-4\times1\times(b-2)=0$.
∴ $b=3$.
综上所述,b 的值是 2 或 3.
(3)存在. 点 P 的坐标为$(1,0)$,$(\frac{1+\sqrt{17}}{2},0)$或$(1+\sqrt{5},0)$.

5. 解:(1)由题意可知,$a_2=c_1$,$a_1=c_2$,$b_1=-b_2\neq0$,
∴ $m=3$,$n=2$,$k=-1$.
因此,k 的值为 -1,m 的值为 3,n 的值为 2.
(2)①∵ 点 $P(r,t)$与点 $Q(s,t)(r\neq s)$始终在关于 x 的函数 $y_1=x^2+2rx+s$ 的图象上运动,

$\therefore y_1$ 的对称轴为直线 $x=\frac{r+s}{2}=-\frac{2r}{2}$.

$\therefore s=-3r$.

$\because y_2=sx^2-2rx+1$,

$\therefore y_2$ 的对称轴为直线 $x=-\frac{-2r}{2s}=\frac{r}{s}=-\frac{1}{3}$.

因此,函数 y_2 的图象的对称轴为直线 $x=-\frac{1}{3}$.

②$y_2=-3rx^2-2rx+1=-(3x^2+2x)r+1$,

令 $3x^2+2x=0$,

解得 $x_1=0,x_2=-\frac{2}{3}$.

因此,函数 y_2 的图象过定点$(0,1)$,$(-\frac{2}{3},1)$.

(3)由题意可知 $y_1=ax^2+bx+c$,

$y_2=cx^2-bx+a$,

$\therefore A(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$,$B(\frac{b}{2c},\frac{4ac-b^2}{4c})$,

$CD=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$,$EF=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|c|}$.

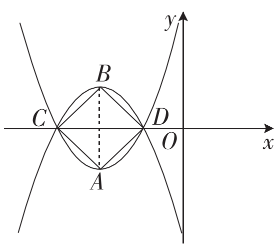
$\because CD=EF$ 且 $b^2-4ac>0$,$\therefore |a|=|c|$.

若 $a=-c$,

则 $y_1=ax^2+bx-a$,$y_2=-ax^2-bx+a$,

要使以 A,B,C,D 为顶点的四边形为正方形,

则$\triangle CAD$,$\triangle CBD$ 为等腰直角三角形,如图.



$\therefore CD=2|y_A|$. $\therefore \frac{\sqrt{b^2+4a^2}}{|a|}=2\cdot\left|\frac{-4a^2-b^2}{4a}\right|$.

$\therefore 2\sqrt{b^2+4a^2}=b^2+4a^2$. $\therefore b^2+4a^2=4$.

$\therefore S_{正方形}=\frac{1}{2}CD^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2-4ac}{a^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2+4a^2}{a^2}$

$=\frac{2}{a^2}$.

$\because b^2=4-4a^2>0$,$\therefore 0<a^2<1$. $\therefore S_{正方形}>2$.

若 $a=c$,则 A,B 关于 y 轴对称,以 A,B,C,D 为顶点的四边形不能构成正方形.

综上所述,当 $a=-c$ 时,以 A,B,C,D 为顶点的四边形能构成正方形,此时 $S_{正方形}>2$.

6. (1)②④

(2)证明:$\because$ 四边形 $ABCD$ 的内角和为 $360°$,

且满足$\angle ABC:\angle BAD:\angle ADC:\angle BCD=6:7:4:7$,

$\therefore \angle ABC=90°$,$\angle BAD=105°$,$\angle ADC=60°$,$\angle BCD=105°$.

$\therefore \angle BAD=\angle BCD$.

$\because BD$ 平分$\angle ABC$,$\therefore \angle ABD=\angle CBD$.

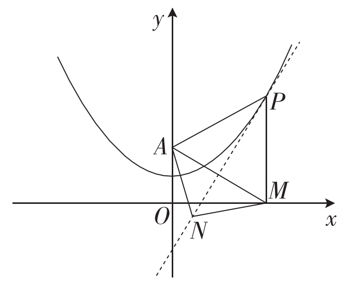
$\because BD=BD$,

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle CBD$(AAS).

$\therefore AB=BC$,$AD=CD$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是筝形.

(3)解:如图,四边形 $APMN$ 是筝形,$AP=PM$,$AN=MN$.



设点 P 的坐标为(x,y).

$\because PM\perp x$ 轴,

$\therefore$ 点 M 的坐标为$(x,0)$.

$\because PA^2=(x-0)^2+(y-2)^2=x^2+y^2-4y+4$,

$PM^2=(x-x)^2+(y-0)^2=y^2$,

$\therefore y^2=x^2+y^2-4y+4$.

$\therefore L:y=\frac{1}{4}x^2+1$.

设 $P_1(t,y_1)$,$P_2(t+1,y_2)$,$P_3(t+a,y_3)$,

则 $y_1=\frac{1}{4}t^2+1$,$y_2=\frac{1}{4}(t+1)^2+1$,

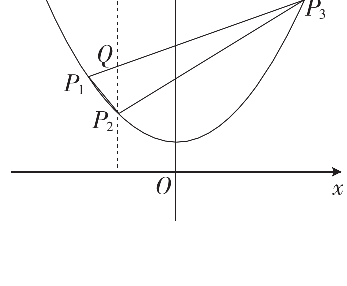
$y_3=\frac{1}{4}(t+a)^2+1$,

$\therefore y_2-y_1=\frac{1}{4}(t+1)^2+1-(\frac{1}{4}t^2+1)=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}$,

$y_3-y_1=\frac{1}{4}(t+a)^2+1-(\frac{1}{4}t^2+1)=\frac{1}{2}at+\frac{1}{4}a^2$.

如图,过点 P_2 作 x 轴的垂线交直线 P_1P_3 于点 Q.

设直线 P_1P_3 的解析式为 $y=kx+b(k\neq0)$,



则$\begin{cases} tk+b=y_1, \\ (t+a)k+b=y_3, \end{cases}$

解得$\begin{cases} k=\dfrac{y_3-y_1}{a}, \\ b=y_1-\dfrac{t(y_3-y_1)}{a}. \end{cases}$

∴ 直线 P_1P_3 的解析式为 $y=\dfrac{y_3-y_1}{a}x+y_1-\dfrac{t(y_3-y_1)}{a}$.

令 $x=t+1$,得 $y=\dfrac{y_3-y_1}{a}+y_1$,

∴ $Q(t+1,\dfrac{y_3-y_1}{a}+y_1)$.

∴ $P_2Q=\dfrac{y_3-y_1}{a}+y_1-y_2=\dfrac{1}{4}a-\dfrac{1}{4}$.

则 $S_{\triangle P_1P_2P_3}=\dfrac{1}{2}P_2Q\cdot(t+a-t)=\dfrac{1}{8}(a-\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{1}{32}$.

∵ $\dfrac{1}{8}>0$,且$\dfrac{1}{2}<\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 4$,

∴ 当 $a=4$ 时,$S_{\triangle P_1P_2P_3}$有最大值,最大值为$\dfrac{3}{2}$.

对点提分训练

1 ~17 题对点提分训练

提分训练(一)

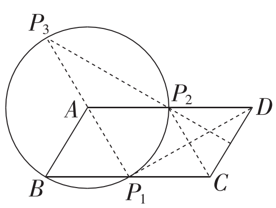
1. C 2. D 3. C 4. A 5. D 6. D

7. $a(x+3)(x-3)$ 8. 3.4×10^{-10} 9. 6

10. 2 024 11. 4

12. 60°,120°或 240°

【解析】满足条件的点 P 如图所示.



由图易得旋转角分别为 60°,120°或 240°.

13. (1)解:原式 $=\dfrac{1}{3}+1+2\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}$

$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}+1+1$

$=3$.

(2)证明:∵ $\triangle ABC$ 和$\triangle ECD$ 都是等腰直角三角形,$\angle ACB=\angle DCE=90°$,

∴ $AC=BC,CE=CD$,

$\angle DCE-\angle ACD=\angle ACB-\angle ACD$,即 $\angle ACE=\angle BCD$.

∴ $\triangle ACE\cong\triangle BCD$(SAS). ∴ $AE=BD$.

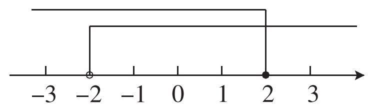
14. 解:由①得 $x\leqslant 2$.

由②得 $2x+6>x+4$,

∴ $x>-2$.

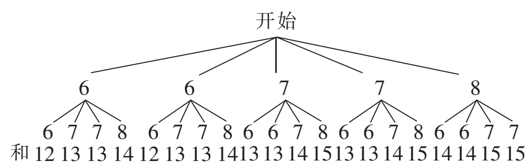
∴ 不等式组的解集为 $-2<x\leqslant 2$.

在数轴上表示其解集如图.



15. 解:(1)$\dfrac{2}{5}$

(2)画树状图如下:



由树状图可知,共有 20 种等可能的结果,其中所选两个纸箱里西瓜的质量之和为 15 kg 的结果有 4 种,

∴ 所选两个纸箱里西瓜的质量之和为 15 kg 的概率为$\dfrac{4}{20}=\dfrac{1}{5}$.

16. 解:(1)如图 1,点 P 即为所求.

(2)如图 2,弦 BD 即为所求.

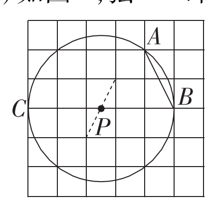


图 1

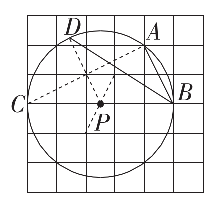
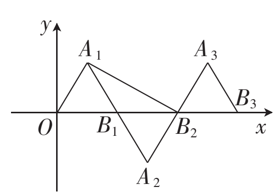


图 2

17. 解:(1)$B_1(2,0)$,$B_2(4,0)$,$B_3(6,0)$.

(2)∵ $\triangle OA_1B_1$ 与$\triangle B_2A_2B_1$ 关于点 B_1 成中心对称,且$\triangle OA_1B_1$ 为等边三角形,



∴ $\angle A_1OB_2=\angle A_1B_1O=60°$,$A_1B_1=B_1B_2=2$.

∴ $\angle A_1B_2O=\angle B_1A_1B_2=30°$,$OB_2=4$.

$\therefore \angle OA_1B_2=90°$.

$\therefore A_1B_2=\sqrt{OB_2^2-OA_1^2}=\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$.

提分训练(二)

1. D 2. A 3. C 4. B 5. C 6. A

7. $x\geqslant1$ 且 $x\neq2$ 8. 1.64×10^8 9. -3 10. 200

11. $\frac{2}{7}$

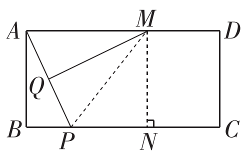
12. 4,$2\sqrt{5}$或$4\sqrt{5}$

【解析】$\because$ 当点 P 和点 B 重合时,Q 为 AB 的中点,$\angle MAQ=90°$,

$\therefore \triangle AMQ$ 为直角三角形.

$\therefore AP=AB=4$.

当$\angle AQM=90°$时,连接 MP,过点 M 作 $MN\perp BC$ 于点 N.



$\because$ 点 Q 是 AP 的中点,

$\therefore \triangle APM$ 是等腰三角形.

$\therefore PM=AM=5$.

又$\because MN=AB=4$,

$\therefore PN=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

$\therefore BP=BN-PN=5-3=2$.

$\therefore AP=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

当点 P 与点 C 重合时,$MP=\sqrt{3^2+4^2}=5$,

$\therefore AM=PM$. $\therefore \triangle AMP$ 是等腰三角形.

又$\because$ 点 Q 是 AP 的中点,$\therefore MQ\perp AC$.

$\therefore \triangle AMQ$ 是直角三角形. $\therefore AP=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$.

综上,AP 的长为 4,$2\sqrt{5}$或$4\sqrt{5}$.

13. (1)解:原式$=2+\sqrt{5}-2-9+3-\sqrt{5}$

$=-6$.

(2)证明:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore \angle BAF=\angle AED$,且$\angle C+\angle D=180°$.

又$\because \angle BFE+\angle BFA=180°$,$\angle BFE=\angle C$,

$\therefore \angle BFA=\angle D$. $\therefore \triangle ABF\backsim\triangle EAD$.

14. 解:任务一

(1)①

(2)一　左边 1 漏乘了 2

任务二:

解:去分母,得 $2-x\geqslant3x-3$.

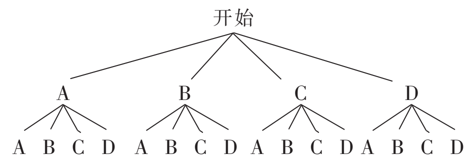
移项,得 $-x-3x\geqslant-3-2$.

合并同类项,得 $-4x\geqslant-5$.

系数化为 1,得 $x\leqslant\frac{5}{4}$.

15. 解:(1)$\frac{1}{4}$

(2)画树状图如下:



共有 16 种等可能的结果,其中小雨和莉莉两名同学抽到相同题目的结果有 4 种,

$\therefore$ 小雨和莉莉两名同学抽到相同题目的概率为 $\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

16. 解:(1)如图 1,点 P 即为所求.

(2)如图 2,EF 即为所求.

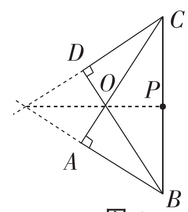


图 1

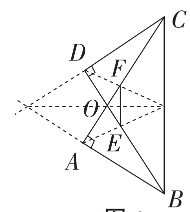


图 2

17. 解:设调整前甲、乙两地该商品的销售单价分别为 x 元、y 元,根据题意得

$$\begin{cases}x+10=y,\\x(1+10\%)+1=y-5,\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x=40,\\y=50.\end{cases}$

答:调整前甲、乙两地该商品的销售单价分别为 40 元、50 元.

提分训练(三)

1. A 2. A 3. D 4. C 5. B 6. C

7. 6 8. $(x+2y)(x-2y)$ 9. -4 10. 294 11. $\frac{7}{4}$

12. 6,$6\sqrt{3}$或$6\sqrt{7}$

【解析】如图 1 所示,当点 P 在 AB 上时.

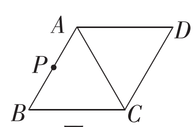


图 1

$\because AB=2AP$,$AB=12$,$\therefore BP=\frac{1}{2}AB=6$.

如图 2 所示,当点 P 在 AC 上时.

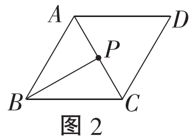


图 2

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore AB=BC$.

$\because \angle ABC=60°$，$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形.

$\therefore AB=AC=BC=12$.

$\because AB=2AP$，$\therefore AC=2AP$. $\therefore$ 点 P 是 AC 的中点.

$\therefore AC\perp BP$，$AP=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}AB=6$.

$\therefore BP=\sqrt{AB^2-AP^2}=6\sqrt{3}$.

如图 3 所示，当点 P 在 AD 上时，作 $BE\perp DA$ 交 DA 的延长线于点 E.

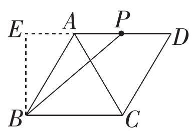


图 3

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore AD/\!/BC$.

$\because BE\perp DA$，$\therefore EB\perp BC$. $\therefore \angle EBC=90°$.

$\because \angle ABC=60°$，$\therefore \angle ABE=30°$.

$\therefore AE=\frac{1}{2}AB=6$.

$\therefore BE^2=AB^2-AE^2=108$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore AD=AB=12$.

$\because AB=2AP$，$\therefore AD=2AP$.

$\therefore AP=\frac{1}{2}AD=6$.

$\therefore PE=AP+AE=12$.

$\therefore BP=\sqrt{BE^2+PE^2}=6\sqrt{7}$.

综上所述，BP 的长为 6，$6\sqrt{3}$ 或 $6\sqrt{7}$.

13. (1) 解：原式 $=x^2+6x+9-(x^2-9)=6x+18$.

(2) 证明：$\because BD$ 平分 $\angle ABC$，

$\therefore \angle ABD=\angle EBC$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle EBC$ 中，

$$\begin{cases}\angle D=\angle C,\\ \angle ABD=\angle EBC,\\ AB=EB,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle EBC$(AAS).

$\therefore AD=EC$.

14. 解：原式 $=\frac{a^2-4a+3+1}{a-3}\cdot\frac{a-3}{(a+2)(a-2)}$

$=\frac{(a-2)^2}{a-3}\cdot\frac{a-3}{(a+2)(a-2)}=\frac{a-2}{a+2}$.

当 $a=(-1)^{2\,023}+(\pi-3)^0+(\frac{1}{4})^{-1}=-1+1+4=4$ 时，原式 $=\frac{4-2}{4+2}=\frac{1}{3}$.

15. 解：(1) 如图 1，点 F 即为所求.

(2) 如图 2，$\angle BAG$ 即为所求.

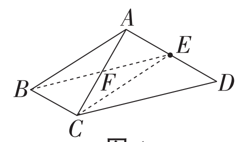


图 1

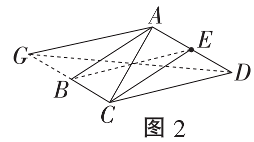
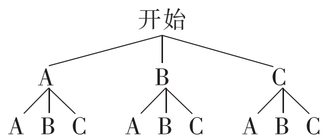


图 2

16. 解：(1) 随机

(2) 画树状图如下：



共有 9 种等可能的结果，其中小明同学两次随机抽得的卡片都没有实验项目“C”的结果有 4 种，

$\therefore$ 小明同学两次随机抽得的卡片都没有实验项目“C”的概率为 $\frac{4}{9}$.

17. 解：(1) ③　不能由 SSA 判定三角形全等

(2) 证明：$\because \angle ABC=\angle ADC$，$BD$ 平分 $\angle ABC$ 与 $\angle ADC$，

$\therefore \angle ADB=\angle CBD=\angle ABD=\angle CDB$.

$\therefore AD/\!/BC$，$AB/\!/DC$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

$\because \angle ABD=\angle ADB$，

$\therefore AB=AD$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

提分训练（四）

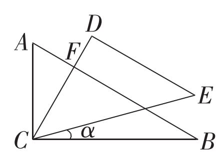
1. A　2. D　3. A　4. D　5. D　6. D

7. $7m+n$　8. 8×10^2　9. $(x-2)^2+(x-4)^2=x^2$

10. 13　11. 54°

12. 15°，60°或 105°

【解析】①当 $CD\perp AB$ 时，如图.

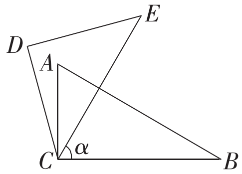


$\therefore \angle CFB=90°$.

$\because \angle B=30°$，$\therefore \angle FCB=60°$.

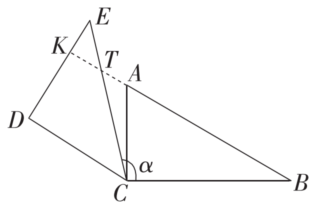
$\therefore \alpha=\angle FCB-\angle DCE=60°-45°=15°$.

②当 $CE\perp AB$ 时，如图.



$\alpha = 90° - \angle B = 90° - 30° = 60°$.

③当 $DE \perp AB$ 时，如图.



$\because \angle EKT = 90°, \angle E = 45°$,

$\therefore \angle KTE = \angle CTB = 45°$.

$\therefore \alpha = 180° - \angle CTB - \angle B = 180° - 45° - 30° = 105°$.

综上所述，α 为 $15°, 60°$ 或 $105°$.

13. (1)解：原式 $= 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 = 1$.

(2)证明：$\because DE \parallel AB, \therefore \angle EDC = \angle A$.

又$\because \angle CBD = \angle A, \therefore \angle EDC = \angle CBD$.

$\because \angle E = \angle E, \therefore \triangle ECD \backsim \triangle EDB$.

14. 解：(1)一

(2)原式 $= \frac{a-b}{a} \div (\frac{a^2}{a} - \frac{2ab - b^2}{a})$

$= \frac{a-b}{a} \div \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a} = \frac{a-b}{a} \div \frac{(a-b)^2}{a}$

$= \frac{a-b}{a} \cdot \frac{a}{(a-b)^2} = \frac{1}{a-b}$.

15. 解：(1)如图1，弦 BC 即为所求.

(2)如图2，矩形 $AEOM$ 即为所求.

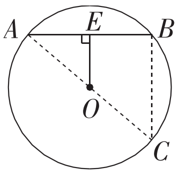


图 1

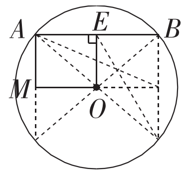


图 2

16. 解：(1)4　3　1

(2)在 $y_1 = -x + 4$ 中，当 $x = 0$ 时，$y_1 = 4$，

当 $y_1 = 0$ 时，$x = 4$，

$\therefore$ 点 C 的坐标为$(0,4)$，点 D 的坐标为$(4,0)$.

$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COB} - S_{\triangle COA} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 - \frac{1}{2} \times 4 \times 1 = 4$.

17. 解：(1)设乙商店租用服装每套 x 元，则甲商店租用服装每套$(x + 10)$元.

由题意可得 $\frac{500}{x+10} = \frac{400}{x}$.

解得 $x = 40$.

经检验，$x = 40$ 是该分式方程的解，并符合题意.

$\therefore x + 10 = 50$.

$\therefore$ 在甲、乙两个商店租用的服装每套各 50 元、40 元.

(2)该参赛队伍准备租用 20 套服装时，

甲商店的费用为 $50 \times 20 \times 0.9 = 900$(元).

乙商店的费用为 $40 \times 20 = 800$(元).

$\because 900 > 800$，

$\therefore$ 在乙商店租用服装的费用较少.

18 ~ 20 题对点提分训练

提分训练(一)

18. 解：(1)①③②④

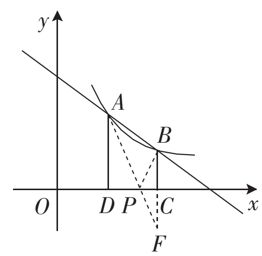
(2)D

(3)由条形统计图估计八年级学生中选择趣味数学的人数为

$\frac{8}{40} \times 1\,000 = 200$(人)，$200 \div 40 = 5$.

答：至少应该开设 5 个趣味数学班.

19. 解：(1)由题意可得 $4m = 2n$，



即 $n = 2m$.

$\because DC = 3$，

$\therefore n - m = 3$.

$\therefore m = 3, n = 6$.

$\therefore$ 点 $A(3,4)$，点 $B(6,2)$.

$\therefore k_2 = 3 \times 4 = 12$.

$\therefore$ 反比例函数的解析式为 $y_2 = \frac{12}{x}$.

(2)$0 < x \leqslant 3$ 或 $x \geqslant 6$.

(3)如图，作点 B 关于 x 轴的对称点 $F(6,-2)$，连接 AF 交 x 轴于点 P，连接 BP，此时$\triangle ABP$ 的周长最小.

设直线 AF 的解析式为 $y = kx + a$，

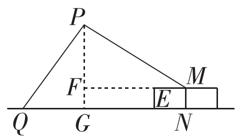
把$(3,4)$，$(6,-2)$代入得 $\begin{cases} 3k + a = 4, \\ 6k + a = -2, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} k = -2, \\ a = 10. \end{cases}$

$\therefore$ 直线 AF 的解析式为 $y = -2x + 10$.

当 $y = 0$ 时，$x = 5$，$\therefore$ 点 P 的坐标为$(5,0)$.

20. 解：(1)过点 P 作 $PG\perp QN$，垂足为 G，延长 ME 交 PG 于点 F.



由题意得：$MF\perp PG, MF=GN, FG=MN=1$ m.

在 Rt△PFM 中，$\angle PMF=37°, PM=5$ m，

$\therefore PF=PM\cdot\sin 37°\approx 5\times\frac{3}{5}=3$(m).

$\therefore PG=PF+FG\approx 3+1=4$(m).

∴ 点 P 到地面的高度约为 4 m.

(2)由题意得 $QN=7$ m.

在 Rt△PFM 中，$\angle PMF=37°, PF\approx 3$ m，

$\therefore \angle MPF=90°-\angle PMF=53°, FM=\frac{PF}{\tan 37°}\approx\frac{3}{\frac{3}{4}}=4$(m).

$\therefore FM=GN\approx 4$ m.

$\therefore QG=QN-GN\approx 7-4=3$(m).

在 Rt△PQG 中，$\tan\angle QPG=\frac{QG}{PG}\approx\frac{3}{4}$，

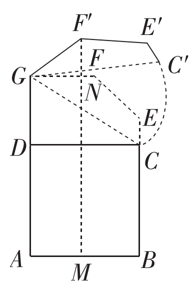
$\therefore \angle QPG\approx 37°$.

$\therefore \angle QPM=\angle QPG+\angle MPG\approx 90°$.

$\therefore \angle QPM$ 的度数约为 90°.

提分训练(二)

18. 解：(1)连接 CG, GC'.



在 Rt△CDG 中，

$CG=\sqrt{DG^2+CD^2}=\sqrt{30^2+40^2}=50$(cm).

$\because \angle CGC'=40°$，

∴ 点 C 运动轨迹的长度 $=\frac{40\pi\times 50}{180}=\frac{100\pi}{9}$(cm).

(2)过点 F' 作 $F'M\perp AB$ 于点 M，交 GF 于点 N.

$\because \angle A=\angle NMA=\angle AGN=90°$，

∴ 四边形 $AMNG$ 是矩形.

$\therefore MN=AG=AD+DG=40+30=70$(cm).

$\because F'N=GF'\sin 40°\approx 20\times 0.64=12.8$(cm)，

$\therefore F'M=F'N+MN\approx 12.8+70=82.8$(cm).

∴ 点 F' 到地面 AB 的距离约为 82.8 cm.

19. 解：(1)设 A 型球拍每副 x 元，B 型球拍每副 y 元，依题意得

$\begin{cases}3x+4y=248,\\5x+2y=264,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=40,\\y=32.\end{cases}$

答：A 型球拍每副 40 元，B 型球拍每副 32 元.

(2)设购买 B 型球拍 a 副，总费用为 w 元.

依题意得 $30-a\geqslant 2a$，解得 $a\leqslant 10$.

$w=40(30-a)+32a=-8a+1\ 200$.

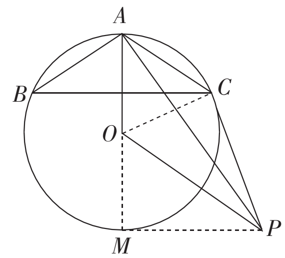
$\because -8<0$，$\therefore w$ 随 a 的增大而减小.

∴ 当 $a=10$ 时，w 最小，$w_{最小}=-8\times 10+1\ 200=1\ 120$(元)，

此时 $30-10=20$(副).

答：费用最少的方案是购买 A 型球拍 20 副，B 型球拍 10 副，所需费用为 1 120 元.

20. (1)证明：如图，连接 OC.



$\because OP\parallel AC$，

$\therefore \angle COP=\angle OCA$.

$\because OA=OC$，

$\therefore \angle OAC=\angle OCA=\angle COP$.

$\because OA\perp BC$，$\therefore \angle OAC+\angle ACB=90°$.

$\therefore \angle COP+\angle ACB=90°$.

$\because \angle ACB=\angle OPC$，

$\therefore \angle COP+\angle OPC=90°$.

$\therefore \angle OCP=90°$，即 $OC\perp CP$.

$\because OC$ 是⊙O 的半径，

$\therefore PC$ 是⊙O 的切线.

(2)解：如图，延长 AO 交⊙O 于点 M，连接 PM.

$\because OP\parallel AC$，$\therefore \angle MOP=\angle OAC$.

由(1)已证：$\angle OAC=\angle OCA=\angle COP$，

$\therefore \angle MOP=\angle COP$.

又$\because OM=OC, OP=OP$，

$\therefore$ △$OMP\cong$△OCP(SAS).

$\therefore \angle OMP=\angle OCP=90°$.

在 Rt△OMP 中，$\tan\angle MOP=\tan\angle COP=\tan\angle OCA=\frac{4}{3}=\frac{PM}{OM}$，

设 $PM=4x, OM=3x$，

$\therefore OP=\sqrt{PM^2+OM^2}=5x=10$.

解得 $x=2$.

$\therefore OA=OM=3x=6, PM=4x=8$.

$\therefore AM=OA+OM=12$.

在 Rt$\triangle AMP$ 中, $AP=\sqrt{AM^2+PM^2}=4\sqrt{13}$.

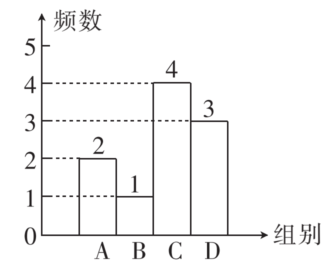
提分训练(三)

18. 解:(1)将七年级 10 名学生的成绩从低到高排列后,处在中间位置的两个数的平均数为 $\frac{89+90}{2}=89.5$,因此中位数是 89.5,即 $a=89.5$;

八年级 10 名学生成绩出现次数最多的是 93,共出现 2 次,因此众数是 93,即 $b=93$.

八年级 10 名学生成绩处在"C 组"的有 $10-2-3-1=4$(人),补全频数分布直方图如下:

八年级抽取的学生竞赛成绩频数分布直方图



(2)八年级学生成绩较好. 理由:八年级学生成绩的中位数、众数都比七年级的高,且八年级学生成绩的方差较小,比较稳定.

(3)$800\times\frac{5}{10}+1\ 000\times\frac{7}{10}=1\ 100$(人).

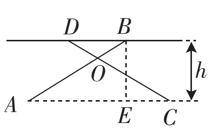
答:估计参加此次竞赛活动成绩优秀($x\geq 90$)的学生有 1 100 人.

19. 解:(1)如答图 1,过点 B 作 $BE\perp AC$ 于点 E.

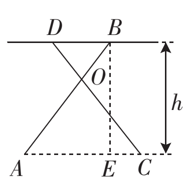
$\because OA=OC, \angle AOC=120°$,

$\therefore \angle OAC=\angle OCA=\frac{180°-120°}{2}=30°$.

$\therefore h=BE=AB\cdot\sin 30°=110\times\frac{1}{2}=55$(cm).



答图 1



答图 2

(2)如答图 2,过点 B 作 $BE\perp AC$ 于点 E.

$\because OA=OC, \angle AOC=74°$,

$\therefore \angle OAC=\angle OCA=\frac{180°-74°}{2}=53°$.

$\therefore AB=BE\div\sin 53°\approx 120\div 0.8=150$(cm),

即该熨烫台支撑杆 AB 的长度约为 150 cm.

20. 解:(1)$4\sqrt{2}-3$

(2)①相切. 证明:如图,过点 O 作 $OQ\perp CD$ 于点 Q,延长 QO 交 AB 于点 P,则 $\angle CQP=90°$.

又$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

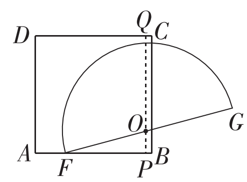
$\therefore \angle DCB=\angle ABC=\angle CQP=90°$.

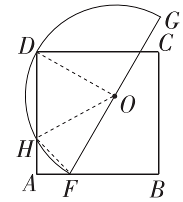
$\therefore$ 四边形 $QPBC$ 为矩形. $\therefore \angle FPO=90°$.

$\because \cos\angle GFB=\frac{2\sqrt{2}}{3}, OF=3, \therefore FP=2\sqrt{2}. \therefore PO=1$.

$\therefore QO=3$,即 OQ 是半圆 O 的半径.

$\therefore DC$ 与半圆 O 相切.





②连接 OH, OD, HF.

$\because AH=AF=1, \angle A=90°, AD=4$,

$\therefore \angle AHF=45°, DH=3. \because OH=OD=3$,

$\therefore \triangle ODH$ 为等边三角形. $\therefore \angle DHO=60°$.

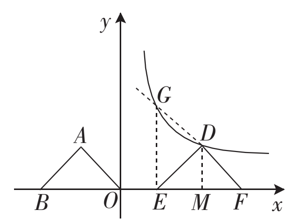
$\therefore \angle FHO=75°. \therefore \angle FOH=30°$.

$\therefore \overset{\frown}{HF}$的长为$\frac{30\pi\cdot 3}{180}=\frac{\pi}{2}$.

提分训练(四)

18. 解:(1)$m=-2, D(4,2)$.

(2)过点 D 作 $DM\perp EF$ 于点 M.



$\because \triangle DEF$ 是等腰直角三角形,

$\therefore \angle DFM=45°$.

$\therefore DM=MF=2$.

由 $D(4,2)$ 得 $F(6,0)$.

设直线 DF 的表达式为 $y=kx+b$,将 $F(6,0)$ 和 $D(4,2)$ 代入,得

$\begin{cases}2=4k+b,\\0=6k+b,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-1,\\b=6.\end{cases}$

$\therefore$ 直线 DF 的表达式为 $y=-x+6$.

(3)延长 FD 交 $y=\frac{8}{x}$的图象于点 G,连接 EG.

由$\begin{cases} y=-x+6, \\ y=\dfrac{8}{x}, \end{cases}$

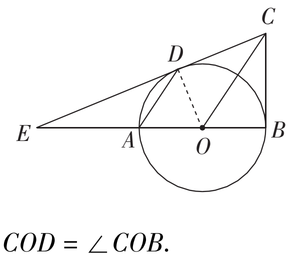
解得$\begin{cases} x_1=4, \\ y_1=2, \end{cases}\begin{cases} x_2=2, \\ y_2=4. \end{cases}$

$\therefore G(2,4)$.

$\because EF=2MF=4$,

$\therefore S_{\triangle EFG}=\frac{1}{2}EF\cdot y_G=\frac{1}{2}\times4\times4=8$.

19.(1)证明:连接 OD.



$\because AD/\!/OC$,

$\therefore \angle DAO=\angle COB$,

$\angle ADO=\angle COD$.

又$\because OA=OD$,

$\therefore \angle DAO=\angle ADO. \therefore \angle COD=\angle COB$.

在$\triangle COD$和$\triangle COB$中,

$\begin{cases} OC=OC, \\ \angle COD=\angle COB, \\ OD=OB, \end{cases}$

$\therefore \triangle COD\cong\triangle COB$(SAS).

$\therefore \angle CDO=\angle CBO=90°$.

$\therefore CD$是$\odot O$的切线.

(2)解:$\because \triangle COD\cong\triangle COB$,

$\therefore CD=CB$.

$\because DE=\sqrt{2}BC, \therefore DE=\sqrt{2}CD$.

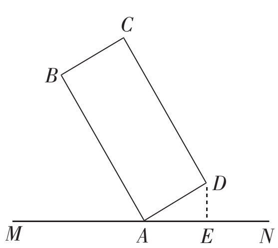
$\because AD/\!/OC, \therefore \triangle EAD\backsim\triangle EOC$.

$\therefore \frac{DE}{CE}=\frac{AE}{OE}$.

$\because \odot O$的半径为2,

$\therefore \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=\frac{AE}{AE+2}$,解得$AE=2\sqrt{2}$.

20.解:(1)如图,过点 D 作 $DE\perp MN$,垂足为 E.



由题意得$\angle BAM=60°$,$\angle BAD=90°$,

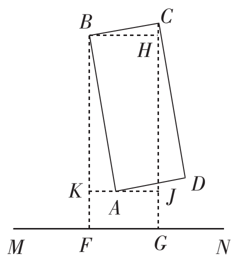
$\therefore \angle DAE=180°-\angle BAM-\angle BAD=30°$.

在 Rt$\triangle ADE$ 中,$AD=0.5$,

$\therefore DE=\frac{1}{2}AD=0.25$.

$\therefore$ 此时点 D 离地面的高度为 0.25 m.

(2)如图,过点 B 作 $BF\perp MN$,垂足为 F,过点 C 作 $CG\perp MN$,垂足为 G,过点 B 作 $BH\perp CG$,垂足为 H,过点 A 作 $AK\perp BF$,垂足为 K,交 CG 于点 J.



则$BK=HJ$,$JG=0.3$,$\angle BHC=\angle ABC=90°$,$BH/\!/AK$.

在 Rt$\triangle ABK$ 中,$\angle BAK=80°$,$AB=1.7$,

$\therefore BK=AB\cdot\sin 80°\approx1.7\times0.98=1.666$.

$\therefore HJ=BK\approx1.666$.

$\because BH/\!/AK$,

$\therefore \angle HBA=\angle BAK=80°$.

$\therefore \angle CBH=\angle ABC-\angle HBA=10°$.

$\because \angle BHC=90°$,

$\therefore \angle BCH=90°-\angle CBH=80°$.

在 Rt$\triangle BCH$ 中,$BC=0.5$,

$\therefore CH=BC\cdot\cos 80°\approx0.5\times0.17=0.085$.

$\therefore CH+HJ+JG\approx0.085+1.666+0.3\approx2.05$.

$\therefore$ 最高点 C 与地面的距离约为 2.05 m.

$2.05-2=0.05$.

$\therefore$ 他要下蹲 5 cm 才刚好进门.

21~23 题对点提分训练

提分训练(一)

21.(1)①等边三角形

②解:如图,连接 ON,OM.

$\because \triangle ABC$是等边三角形,

$\therefore \angle OAM=60°$.

$\because$ 当点 P 与点 A 重合时,AB 即为$\odot O$的直径,

$\therefore OA=OM$.

$\therefore \triangle AOM$是等边三角形.

$\therefore \angle AOM=60°$.

同理可得$\angle BON=60°$,

$\therefore \angle MON=60°$.

$\therefore \overset{\frown}{MN}$的长度$=\dfrac{60\times\pi\times\frac{6}{2}}{180}=\pi$.

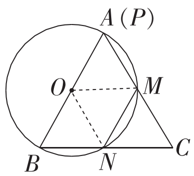


图 1

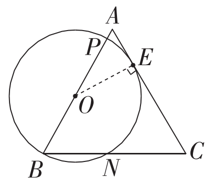


图 2

(2)证明:过点 O 作 $OE\perp AC$ 于点 E.

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle OAC=60°$.

$\because AB=6, OB=12\sqrt{3}-18$,

$\therefore OA=24-12\sqrt{3}$.

$\because \sin\angle OAC=\dfrac{OE}{AO}$,

$\therefore OE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AO=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(24-12\sqrt{3})=12\sqrt{3}-18$.

$\therefore OE=BO$.

$\therefore AC$ 与⊙O 相切.

22. (1)证明:$\because \angle BAC=90°$,

$\therefore \angle BAD+\angle DAC=90°$.

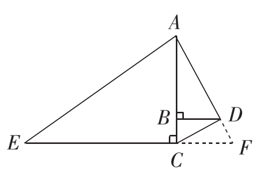
$\because AD\perp BC$, $\therefore \angle ADB=\angle ADC=90°$.

$\therefore \angle C+\angle DAC=90°$.

$\therefore \angle BAD=\angle C$. $\therefore \triangle ABD\backsim\triangle CAD$.

$\therefore \dfrac{AD}{CD}=\dfrac{BD}{AD}$,即 $AD^2=BD\cdot CD$.

(2)解:如图,延长 AD,交 EC 的延长线于点 F.



由(1)得$\triangle AEC\backsim\triangle FAC$, $\therefore \dfrac{AC}{FC}=\dfrac{CE}{AC}$.

$\therefore \dfrac{5}{CF}=\dfrac{\frac{20}{3}}{5}$. $\therefore CF=\dfrac{15}{4}$.

$\because BD\perp AC, CF\perp AC, \therefore BD/\!/CF$.

$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle ACF$.

$\therefore \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{CF}$. $\therefore \dfrac{AB}{5}=\dfrac{3}{\frac{15}{4}}$.

$\therefore AB=4$.

$\therefore BC=AC-AB=1$.

$\therefore CD=\sqrt{BC^2+BD^2}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.

故答案为 $\sqrt{10}$.

(3)解:$\because \angle ADB=150°, \angle BDC=60°$,

$\therefore \angle ADC=360°-150°-60°=150°$.

$\therefore \angle ADC=\angle BDA=150°$.

$\therefore \angle DAC+\angle ACD=30°$.

$\because \angle CAB=30°$, $\therefore \angle DAC+\angle BAD=30°$.

$\therefore \angle BAD=\angle ACD$.

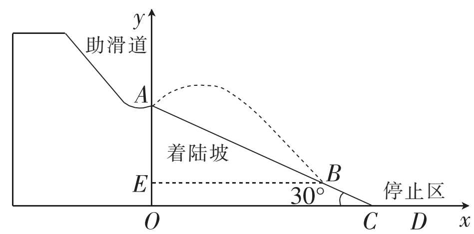
$\therefore \triangle ADC\backsim\triangle BDA$.

$\therefore \dfrac{CD}{AD}=\dfrac{AD}{BD}$.

$\therefore AD^2=CD\cdot BD=4\times 10=40$.

$\therefore AD=2\sqrt{10}$.

23. 解:(1)作 $BE\perp y$ 轴于点 E.



$\because OA=65$ m,着陆坡 AC 的坡角为 $30°$, $AB=100$ m,

$\therefore$ 点 A 的坐标为$(0,65)$, $AE=50$ m, $BE=50\sqrt{3}$ m.

$\therefore OE=OA-AE=65-50=15$(m).

$\therefore$ 点 B 的坐标为$(50\sqrt{3},15)$.

$\because$ 点 A,B 在二次函数 $y=-\dfrac{1}{60}x^2+bx+c$ 的图象上,

$\therefore \begin{cases} c=65, \\ -\dfrac{1}{60}\times(50\sqrt{3})^2+50\sqrt{3}b+c=15. \end{cases}$

解得$\begin{cases} b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ c=65, \end{cases}$

即 b 的值是$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, c 的值是 65.

(2)①设 x 关于 t 的函数解析式是 $x=kt+m$.

$\because$ 点$(0,0)$, $(5,50\sqrt{3})$在该函数图象上,

$\therefore \begin{cases} m=0, \\ 5k+m=50\sqrt{3}, \end{cases}$ 解得$\begin{cases} k=10\sqrt{3}, \\ m=0. \end{cases}$

即 x 关于 t 的函数解析式是 $x=10\sqrt{3}t$.

②设直线 AB 的解析式为 $y=px+q$.

$\because$ 点 $A(0,65)$,点 $B(50\sqrt{3},15)$在该直线上,

$\therefore \begin{cases} q=65, \\ 50\sqrt{3}p+q=15, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} p=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \\ q=65. \end{cases}$

即直线 AB 的解析式为 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+65$.

则 $h=\left(-\dfrac{1}{60}x^2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+65\right)-\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+65\right)=-\dfrac{1}{60}x^2+\dfrac{5\sqrt{3}}{6}x$.

$\therefore$ 当 $x=-\dfrac{\frac{5\sqrt{3}}{6}}{2\times\left(-\frac{1}{60}\right)}=25\sqrt{3}$ 时，h 取得最大值，

此时 $h=\dfrac{125}{4}$.

$\because 25\sqrt{3}<50\sqrt{3}$，

$\therefore$ 当 $x=25\sqrt{3}$ 时，h 取得最大值，符合题意.

将 $x=25\sqrt{3}$ 代入 $x=10\sqrt{3}t$，得 $25\sqrt{3}=10\sqrt{3}t$，

解得 $t=2.5$.

$\therefore$ 当 t 为 2.5 s 时，运动员离着陆坡的竖直距离 h 最大，最大值是 $\dfrac{125}{4}$ m.

提分训练(二)

21. 解：(1)①1.5　1 或 3

②如图.

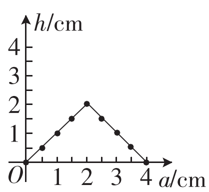


图 2–1

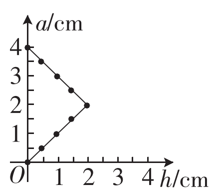


图 2–2

③A

(2)①当 $0\leqslant a\leqslant 2$ 时，$DE=AD=a$，$S_{\triangle ADE}=\dfrac{1}{2}AD\cdot DE=\dfrac{1}{2}a^2$；

当 $2<a\leqslant 4$ 时，$DE=BD=AB-AD=4-a$，

$\therefore S=\dfrac{1}{2}BD\cdot DE=\dfrac{1}{2}(4-a)^2$.

$\therefore S=\begin{cases} \dfrac{1}{2}a^2(0\leqslant a\leqslant 2), \\ \dfrac{1}{2}(4-a)^2(2<a\leqslant 4). \end{cases}$

②$S=\dfrac{1}{2}$，当 $0\leqslant a\leqslant 2$ 时，$\dfrac{1}{2}a^2=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore a_1=1$，$a_2=-1$(舍去).

当 $2<a\leqslant 4$ 时，$\dfrac{1}{2}(4-a)^2=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore a_3=3$，$a_4=5$(舍去).

综上所述，当 $S=\dfrac{1}{2}$ 时，$a=1$ 或 3.

22. 解：(1)$(6,\dfrac{5}{2})$　$x=3$

(2)由(1)知 $D(6,\dfrac{5}{2})$ 是抛物线上一点，

$\therefore 36m+6n+\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{2}$，得 $n=-6m$.

(3)当 $y=0$ 时，$mx^2-6mx+\dfrac{5}{2}=0$，

$\therefore x_1x_2=\dfrac{5}{2m}=5$，解得 $m=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore y=\dfrac{1}{2}x^2-3x+\dfrac{5}{2}=\dfrac{1}{2}(x-3)^2-2$.

$\therefore$ 顶点 $M(3,-2)$.

由 $\dfrac{1}{2}x^2-3x+\dfrac{5}{2}=0$，得 $x_1=1$，$x_2=5$.

$\therefore B(5,0)$.

设直线 BM 的解析式为 $y=kx+b$，则

$\begin{cases} 3k+b=-2, \\ 5k+b=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=1, \\ b=-5. \end{cases}$

$\therefore y=x-5$.

设平移后的抛物线的顶点为 $(a,a-5)$，

则 $y=\dfrac{1}{2}(x-a)^2+a-5$.

$\because$ 平移后的抛物线经过点 $(0,-\dfrac{7}{2})$，

$\therefore \dfrac{1}{2}(0-a)^2+a-5=-\dfrac{7}{2}$，解得 $a_1=1$，$a_2=-3$.

$\therefore$ 平移后的抛物线的解析式为

$y=\dfrac{1}{2}(x-1)^2-4$ 或 $y=\dfrac{1}{2}(x+3)^2-8$.

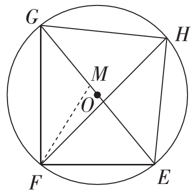
23. (1)正方形、矩形

(2)解：由“完美四边形”的定义可知：

$2\times 2+2\times\dfrac{5}{2}=3BD$，

$\therefore BD=3$.

(3)①证明：如图，在 GE 上取一点 M，使 $\angle GFM=\angle HFE$.



$\because \angle FGM=\angle FHE$,

$\therefore \triangle FGM\backsim\triangle FHE$.

$\therefore \dfrac{FG}{FH}=\dfrac{GM}{HE}$.

$\therefore FG\cdot HE=FH\cdot GM$.

$\because \angle GFM=\angle HFE$,

$\therefore \angle GFH=\angle MFE$.

又$\because \angle GHF=\angle MEF$,

$\therefore \triangle GHF\backsim\triangle MEF$.

$\therefore \dfrac{GH}{ME}=\dfrac{HF}{FE}$.

$\therefore GH\cdot FE=FH\cdot ME$.

$\therefore GH\cdot FE+FG\cdot HE=FH\cdot ME+FH\cdot GM=FH\cdot(ME+GM)=FH\cdot GE$.

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 为“完美四边形”.

②解:存在.

如图①,$\because GE$ 是直径,

$\therefore \angle EFG=90°$.

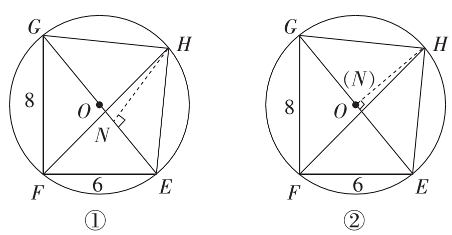
$\therefore GE=\sqrt{6^2+8^2}=10$,$\triangle GEF$ 的面积为$\dfrac{1}{2}\times6\times8=24$.

$\therefore$ 要使四边形 $EFGH$ 的面积最大,则只需$\triangle GEH$ 的面积最大.

作 $HN\perp GE$,垂足为 N,

则 HN 的值最大时,$\triangle GEH$ 的面积就最大.

$\because$ 点 H 到直径 GE 的垂线段的长最大为半径,即垂足 N 在点 O 处时最大.



① ②

如图②,当点 O 与点 N 重合时,FH 即为所求.

$\because GE$ 是直径,$\therefore \angle GHE=90°$.

$\because HN$ 垂直平分 GE,$\therefore HG=HE$.

$\because GE^2=GH^2+HE^2$,

$\therefore HG=HE=\dfrac{10}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$.

$\because$ 四边形 $EFGH$ 是“完美四边形”,

$\therefore 10FH=6\times5\sqrt{2}+8\times5\sqrt{2}$.

$\therefore FH=7\sqrt{2}$.

$\therefore$ 当 $FH=7\sqrt{2}$时,四边形 $EFGH$ 的面积最大.

提分训练(三)

21. 解:(1)根据销售单价从低到高排列如表.

售价/(元/盆)	18	20	22	26	30
日销售量/盆	54	50	46	38	30

(2)观察表格可知日销售量是售价的一次函数.

设日销售量为 y,售价为 x,$y=kx+b$,

把(18,54),(20,50)代入,得

$\begin{cases}18k+b=54,\\20k+b=50,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-2,\\b=90,\end{cases}$

$\therefore y=-2x+90$.

(3)①$\because$ 每天获得 400 元的利润,

$\therefore (x-15)(-2x+90)=400$,

解得 $x=25$ 或 $x=35$.

$\therefore$ 要想每天获得 400 元的利润,售价应定为 25 元/盆或 35 元/盆.

②设每天获得的利润为 w 元,

根据题意得 $w=(x-15)(-2x+90)=-2x^2+120x-1\,350=-2(x-30)^2+450$.

$\because -2<0$,

$\therefore$ 当 $x=30$ 时,w 取得最大值 450.

$\therefore$ 当售价定为30 元/盆时,每天能够获得最大利润450 元.

22. 解:(1)①正方形

②$\because \angle B=\angle CEG=90°$,

$\therefore GE/\!/AB$.

$\therefore \dfrac{CG}{AG}=\dfrac{CE}{BE}$,即$\dfrac{AG}{BE}=\dfrac{CG}{CE}$.

$\because$ 四边形 $CEGF$ 是正方形,

$\therefore CE=GE$.

$\therefore$ 由勾股定理得 $CG=\sqrt{CE^2+GE^2}=\sqrt{2}CE$.

$\therefore \dfrac{AG}{BE}=\dfrac{CG}{CE}=\dfrac{\sqrt{2}CE}{CE}=\sqrt{2}$.

故答案为:$\sqrt{2}$.

(2)$AG=\sqrt{2}BE$. 理由如下:

如答图 1,连接 CG.

由旋转可得$\angle BCE=\angle ACG=\alpha$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \angle ABC=90°, AB=BC$.

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

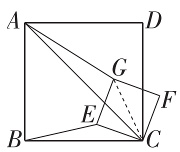
$\therefore \frac{AC}{BC}=\sqrt{2}$.

同理可得$\frac{CG}{CE}=\sqrt{2}$.

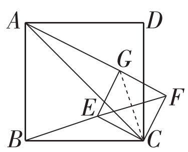
$\therefore \frac{AC}{BC}=\frac{CG}{EC}=\sqrt{2}$.

$\therefore \triangle ACG \backsim \triangle BCE$.

$\therefore \frac{AG}{BE}=\frac{CG}{EC}=\sqrt{2}$,即 $AG=\sqrt{2}BE$.



答图 1



答图 2

(3) $AG \perp GE$.

理由如下:如答图 2,连接 CG.

$\because \angle CEF=45°$, B,E,F 三点共线,

$\therefore \angle BEC=135°$.

$\because \triangle ACG \backsim \triangle BCE$,

$\therefore \angle AGC=\angle BEC=135°$.

$\therefore \angle AGF=\angle AGC+\angle CGF=135°+45°=180°$.

$\therefore$ 点 A,G,F 三点共线.

$\therefore \angle AGE=180°-90°=90°$.

$\therefore AG \perp GE$.

23. 解:(1) $\because$ 抛物线过原点,

$\therefore c=0$.

$\therefore$ "过零抛物线"的解析式为 $y=ax^2+bx$.

① $\because$ 顶点为(1,3),

$\therefore -\frac{b}{2a}=1, -\frac{b^2}{4a}=3$.

解得 $a=-3, b=6$.

故答案为 $-3,6$.

② $\because$ 顶点为$(e,3e)$,

$\therefore -\frac{b}{2a}=e, -\frac{b^2}{4a}=3e$.

解得 $a=-\frac{3}{e}$.

故答案为 $a=-\frac{3}{e}$.

(2)由顶点$(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a})$在直线 $y=kx$ 上,

得 $-\frac{b^2}{4a}=k(-\frac{b}{2a})$.

$\because b\neq 0$,

$\therefore b=2k$.

(3)由题意得 $A_n(n,3n)$, $B_n(n,0)$.

$\because$ 四边形 $A_nOB_nC_n$ 是平行四边形,

$\therefore A_nC_n /\!/ OB_n$, $A_nC_n=OB_n=n$.

$\therefore C_n(2n,3n)$.

$\because$ 过零抛物线的顶点 $A_n(n,3n)$ 在直线 $y=3x$ 上,

$\therefore$ 设抛物线的解析式是 $y=ax^2+6x$.

将顶点 $A_n(n,3n)$ 代入上式,得 $3n=an^2+6n$,解得 $a=-\frac{3}{n}$.

$\therefore$ 该抛物线的解析式为 $y=-\frac{3}{n}x^2+6x$.

$\because$ 点 $C_n(2n,3n)$ 在另一条过零抛物线上,

$\therefore$ 设另一条过零抛物线为 $y=-\frac{3}{m}x^2+6x$.

将点 $C_n(2n,3n)$ 代入上式,得

$-\frac{3}{m}(2n)^2+12n=3n$,解得 $m=\frac{4}{3}n$.

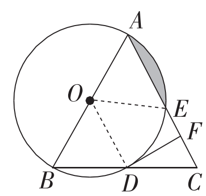
$\because m\leqslant 10, n\leqslant 10$,且 m,n 为正整数,

$\therefore n=3, m=4$ 或 $n=6, m=8$.

$\therefore C_n(6,9)$ 或 $C_n(12,18)$.

提分训练(四)

21. 如(1)证明:如图,连接 OD.



$\because$ 点 D 恰好是 BC 的中点,

$\therefore BD=CD$.

$\because OA=OB$,

$\therefore OD$ 是$\triangle ABC$ 的中位线.

$\therefore OD /\!/ AC$.

$\because DF \perp AC$ 于点 F,

$\therefore \angle ODF=\angle DFC=90°$.

$\because DF$ 经过$\odot O$ 的半径 OD 的端点 D,且 $DF \perp OD$,

$\therefore DF$ 是$\odot O$ 的切线.

(2)解:如图,连接 OE,则 $OE=OA$.

$\because \angle A=60°$, $\therefore \triangle AOE$ 是等边三角形.

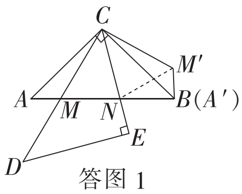
$\therefore \angle AOE=60°$.

$\because OA=OE=4$,

$\therefore S_{阴影}=\frac{60\cdot\pi\times 4^2}{360}-\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4^2=\frac{8}{3}\pi-4\sqrt{3}$.

$\therefore$ 阴影部分的面积为$\frac{8}{3}\pi-4\sqrt{3}$.

22. 解:(1)旋转后的$\triangle A'CM'$如答图 1 所示.



答图 1

(2)连接 $M'N$.

$\because \triangle ABC$ 与 $\triangle DCE$ 均为等腰直角三角形，$\angle E=\angle ACB=90°$，

$\therefore \angle A=\angle CBA=\angle DCE=45°$.

$\therefore \angle ACM+\angle BCN=45°$.

$\because \triangle BCM'$是由$\triangle ACM$旋转得到的，

$\therefore \angle BCM'=\angle ACM$，$CM=CM'$，$AM=BM'$，$\angle CBM'=\angle A=45°$.

$\therefore \angle M'CN=\angle MCN=45°$，$\angle NBM'=90°$.

$\because$ 在$\triangle MCN$与$\triangle M'CN$中，

$$\begin{cases}CM=CM',\\ \angle MCN=\angle M'CN,\\ CN=CN,\end{cases}$$

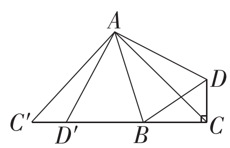
$\therefore \triangle MCN\cong\triangle M'CN$(SAS).

$\therefore MN=M'N$.

在 Rt$\triangle BM'N$ 中，根据勾股定理得 $M'N^2=BN^2+BM'^2$，

$\therefore MN^2=AM^2+BN^2$.

(3)如答图 2，将$\triangle ADC$绕点 A 顺时针旋转 90°得到$\triangle AC'D'$，连接 $C'C$，



答图 2

则$\triangle AC'C$是等腰直角三角形，$C'D'=3$，$\angle DAD'=90°$.

$\because \angle BAD=45°$，$\therefore \angle BAD'=45°$.

又$\because CA$ 平分$\angle BCD$，且$\angle BCD=90°$，

$\therefore \angle C'=\angle ACB=45°$.

$\therefore C'$，D'，B，C 均在同一直线上.

在$\triangle DAB$与$\triangle D'AB$中，

$$\begin{cases}AD=AD',\\ \angle DAB=\angle D'AB,\\ AB=AB,\end{cases}$$

$\therefore \triangle DAB\cong\triangle D'AB$(SAS).

$\therefore DB=D'B$.

在 Rt$\triangle BCD$ 中，

$\because BC=4$，$CD=3$，

$\therefore DB=5=BD'$.

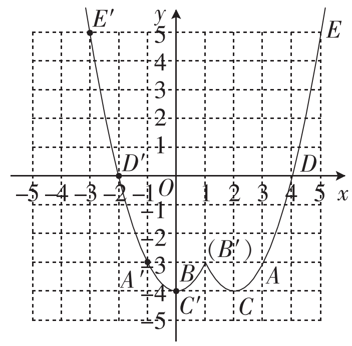
$\because C'D'=CD=3$，

$\therefore CC'=12$.

$\therefore AC=6\sqrt{2}$.

23. 解：(1)①$C'(0,-4)$，$A'(-1,-3)$.

②如图.



③ -3

④ $0\leqslant x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 2$

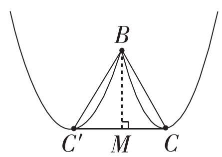
(2)① $-3m^2$

②当 $m>0$ 时，x 的取值范围为 $0\leqslant x\leqslant m$ 或 $x\geqslant 2m$.

当 $m<0$ 时，x 的取值范围为 $2m\leqslant x\leqslant m$ 或 $x\geqslant 0$.

③$m=\pm\sqrt{3}$.

提示：如图，过点 B 作 $BM\perp CC'$，垂足为 M.



$\because$ 点 B 为直线 $x=m$ 与双抛图形 L'的交点，

$\therefore$ 点 B 的横坐标为 m，代入 L 得 $y=-3m^2$，即 $B(m,-3m^2)$.

易得点 C 的横坐标为 $2m$，代入 L 得 $y=-4m^2$，即 $C(2m,-4m^2)$，$\therefore C'(0,-4m^2)$.

$\therefore BM=-3m^2-(-4m^2)=m^2$，$CM=|2m-m|=|m|$.

$\because \triangle BCC'$为等边三角形，$\therefore \tan 60°=\dfrac{BM}{CM}$.

$\therefore \sqrt{3}=\dfrac{m^2}{|m|}$. $\therefore m=\pm\sqrt{3}$.