

2024 版《学考新评价》初中数学

参 考 答 案 正 文 部 分

第一章 数 与 式

1 实数的概念与运算

考点清单

考点一:1. 正整数 负整数 负分数

无限不循环小数 2. 0 4. (1) ≥ 0 (2) 0 0 0

体验 1: (1) -5 (2) B (3) C

考点二: 一一对应的 0 原点 距离 乘积 0 ± 1

体验 2: B

考点三: 右 左

体验 3: C

考点四: 1 10^4 10^8 10^{-9}

体验 4: 1.8×10^7

考点五: 乘方、开方 乘除 加减 括号

体验 5: 8

典例剖析

例 1: B

举一反三: B

例 2: C

举一反三: -2

例 3: 解: $|1 - \sqrt{2}| - 2\cos 45^\circ + (\frac{1}{2})^{-1}$

$$= \sqrt{2} - 1 - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 2$$

$$= \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} + 2$$
$$= 1.$$

举一反三: 解: 原式 $= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 + 2 - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 3 + 2$
 $- 2\sqrt{3} = 5.$

2 整式与因式分解

考点清单

考点一: 指数的和 单项式 次数最高项 单项式

多项式 系数 字母的指数

体验 1: (1) D (2) -1

体验 2: $(2m - 4)$

考点三: a^{m+n} 不变 相减 a^{m-n} 相乘 a^{mn}

相乘 $a^n b^n$

体验 3: B

考点四: 1. 变号 2. (1) ①指数 ④ $(a+b)(a-b) = a^2$
 $- b^2$ ⑤ $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

体验 4: (1) B (2) -6

考点五: 积 $m(a+b+c)$ $(a+b)(a-b)$ $(a \pm b)^2$

体验 5: (1) B (2) $a(a+1)^2$

典例剖析

例 1: 解: 原式 $= 4x^2 + 12xy + 9y^2 - 4x^2 + y^2 - 6xy - 10y^2$
 $= 6xy.$

当 $x = \sqrt{2}, y = \frac{\sqrt{6}}{2} - 1$ 时,

$$\text{原式} = 6 \times \sqrt{2} \times (\frac{\sqrt{6}}{2} - 1) = 6\sqrt{3} - 6\sqrt{2}.$$

举一反三: 解: $(x+1)^2 + (2+x)(2-x)$
 $= x^2 + 2x + 1 + 4 - x^2$
 $= 2x + 5.$

当 $x = 1$ 时, 原式 $= 2 + 5 = 7.$

例 2: (1) $a(a+b)^2$ (2) 6

举一反三: (1) 6 (2) $2x(x+3y)(x-3y)$

例 3: 解: (1) C_5H_{12}

(2) C_nH_{2n+2}

(3) 由题意得 $2n+2 = 4048,$

解得 $n = 2023.$

故 $C_{2023}H_{4048}$ 属于上述的碳氢化合物.

举一反三: $(2+2n)$

3 数的开方与二次根式

考点清单

考点一: 相反数 0

体验 1: (1) B (2) C

考点二: 1. 非负数 2. (1) 最简 (2) ①分母

3. (1) a (2) $|a|$ a $-a$ (3) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ (4) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

体验 2: (1) D (2) D (3) $a \leq 1$

考点三: 被开方数 $\sqrt{ab}$ $\sqrt{\frac{a}{b}}$ 3 4

体验 3: (1) C (2) 3

典例剖析

例 1: (1) A (2) 3

举一反三: (1) C (2) D

例 2: (1) C (2) $\frac{1}{4}$

举一反三: $x \geq -\frac{1}{2}$ 且 $x \neq 1$

例 3: 解: (法一) 原式 $= 2\sqrt{3} - 3 + 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 4 - 2\sqrt{3}.$

(法二) 原式 $= (2 - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}) = 4 - 2\sqrt{3}.$

举一反三: 解: 原式 $= 2\sqrt{3} - 2 + (3 - 1) - \sqrt{3} = \sqrt{3}.$

4 分 式

考点清单

考点一: 字母 $B = 0$ $B \neq 0$ $B \neq 0$

体验 1: $x \neq 2$

考点二:4. 公因式

体验 2:C

考点三:1. $\frac{b \pm c}{a} \quad \frac{ad \pm bc}{bd} \quad 2. \frac{ac}{bd} \quad \frac{d}{c} \quad \frac{ad}{bc} \quad 3. \frac{a^n}{b^n}$

4. 乘方 加减

体验 3:(1)2 (2) $\frac{2}{x-1}$

体验 4: $\frac{1}{3}$

典例剖析

例 1:解:原式 $= \frac{4}{x+2} + \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = \frac{4+x^2-4}{x+2}$
 $= \frac{x^2}{x+2}$.

例 2:解:(1)② ③
(2)选择乙同学的解法.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1} \right) \cdot \frac{x^2-1}{x} \\ &= \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{x} + \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{x} \\ &= \frac{x}{x+1} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x} + \frac{x}{x-1} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x} \\ &= x-1+x+1 \\ &= 2x. \end{aligned}$$

例 3:解:原式 $= \left[\frac{(x-1)(x+1)}{x+1} - \frac{3}{x+1} \right] \cdot \frac{(x+1)^2}{x^2-4}$
 $= \frac{x^2-4}{x+1} \cdot \frac{(x+1)^2}{x^2-4}$
 $= x+1$.

$\because x \neq -1, 2$,

$\therefore x = 1$.

$\therefore$ 原式 $= 1+1=2$.

举一反三:解: $\left(\frac{x}{x+1} - \frac{2}{x-1} \right) \div \frac{1}{x^2-1}$
 $= \left[\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{2(x+1)}{(x+1)(x-1)} \right] \div \frac{1}{x^2-1}$
 $= \frac{x^2-3x-2}{(x+1)(x-1)} \cdot (x+1)(x-1)$
 $= x^2-3x-2$.
 $\because x^2-3x-4=0, \therefore x^2-3x=4$.
 $\therefore$ 原式 $= 4-2=2$.

第二章 方程与不等式(组)

5 一元一次方程、二元一次方程组及其应用

考点清单

考点一:1. (1) m (2) $bm \neq 0$

2. (1)等式 (2)未知数

体验 1:A

考点二:1. 未知数 1

2. ①去分母 ③移项 ④合并同类项

体验 2: $x = \frac{5}{9}$

考点三:2. 两 3. 代入消元法 加减消元法

体验 3:(1) $\begin{cases} x=3, \\ y=-1 \end{cases}$ (2)2

考点四:1. ②设未知数 ③列方程(组)

体验 4: $\begin{cases} 5x+6y=1, \\ 4x+y=5y+x \end{cases}$

典例剖析

例 1:解:去分母,得 $4x-1=6-2(3x-1)$.
去括号,得 $4x-1=6-6x+2$.
移项,得 $4x+6x=6+2+1$.
合并,得 $10x=9$.

系数化为 1,得 $x = \frac{9}{10}$.

举一反三:解:去分母,得 $2(3x-2)-6=5-4x$.
去括号,得 $6x-4-6=5-4x$.
移项、合并同类项,得 $10x=15$.
系数化为 1,得 $x=1.5$.

例 2:解:② $\times 3$ +①,得 $11x=44$.
解得 $x=4$.
将 $x=4$ 代入②,得 $12-y=10$.
解得 $y=2$.

$\therefore$ 原方程组的解是 $\begin{cases} x=4, \\ y=2. \end{cases}$

举一反三:(1)解:① $\times 2$ +②,得 $5x=25$.
解得 $x=5$.
将 $x=5$ 代入①,得 $5-2y=1$.
解得 $y=2$.

$\therefore$ 原方程组的解是 $\begin{cases} x=5, \\ y=2. \end{cases}$

(2)解: $\begin{cases} x+2y=4, \text{①} \\ x+3y=5. \text{②} \end{cases}$

②-①,得 $y=1$.

把 $y=1$ 代入①得 $x=2$.

$\therefore$ 该方程组的解为 $\begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$

例 3:解:(1)设学校租用 45 座的客车 x 辆,共有学生 y 人.由题意,得 $\begin{cases} 45x+15=y, \\ 60(x-1)=y. \end{cases}$
解得 $\begin{cases} x=5, \\ y=240. \end{cases}$

答:该校七年级共有 240 名学生参观冰雪大世界.
(2)采用方案一花费: $160 \times 0.9 \times 240 = 34\,560$ (元).
采用方案二花费: $100 \times 160 + (240-100) \times 160 \times 0.8 = 16\,000 + 17\,920 = 33\,920$ (元).
 $\because 33\,920 < 34\,560$,
 $\therefore$ 采用方案二购买门票更省钱.

举一反三:解:(法一)设该班的学生人数为 x ,树苗有 y 棵,根据题意得

$$\begin{cases} 3x+20=y, \\ 4x-25=y. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=45, \\ y=155. \end{cases}$

答:该班的学生人数为 45.

(法二)设该班的学生人数为 x ,根据题意得 $3x+20=4x-25$.
解得 $x=45$.
答:该班的学生人数为 45.

6 可化为一元一次方程的分式方程的解法及应用

考点清单

考点一:1. 未知数

2. 整式 (1)最简公分母 (3)验根

体验 1:(1)C (2)D

体验 2:
$$\frac{25}{x} - \frac{32}{(1+60\%)x} = \frac{1}{6}$$

典例剖析

例 1:解:方程两边都乘 $(2x-1)$,
得 $x=2(2x-1)+3$.

解得 $x=-\frac{1}{3}$.

检验:当 $x=-\frac{1}{3}$ 时, $2x-1\neq 0$.

$\therefore$ 分式方程的解是 $x=-\frac{1}{3}$.

举一反三:解:(1)分式的基本性质

(2)方程两边同乘 $(x-3)$,得

$$x-2-2(x-3)=10-3x.$$

去括号,得 $x-2-2x+6=10-3x$.

移项,得 $x-2x+3x=10-6+2$.

合并同类项,得 $2x=6$.

系数化为 1,得 $x=3$.

检验:当 $x=3$ 时, $x-3=0$,

$\therefore x=3$ 是原方程的增根.

$\therefore$ 原分式方程无解.

例 2:D

举一反三: $m\geq -5$ 且 $m\neq -3$

例 3:解:(1)设 B 型机器人每小时搬运 x 千克化工原料,则 A 型机器人每小时搬运 $(x+30)$ 千克化工原料.

根据题意得
$$\frac{1\ 500}{x+30} = \frac{1\ 000}{x}.$$

解得 $x=60$.

经检验, $x=60$ 是所列方程的解,且符合题意.

$\therefore x+30=60+30=90$.

答:A 型机器人每小时搬运 90 千克化工原料,B 型机器人每小时搬运 60 千克化工原料.

(2)设购进 m 台 A 型机器人,则购进 $(12-m)$ 台 B 型机器人.

根据题意得 $5m+3(12-m)\leq 44$.

解得 $m\leq 4$.

答:最多可购进 A 型机器人 4 台.

7 一元一次不等式(组)的解法及应用

考点清单

考点一:2. $<$ $<$ $<$ $>$ $>$

体验 1:(1)D (2) $80(1-20\%)x\geq 960$

考点二:1. 一个未知数 1 2. 去括号 合并同类项

4. (1)一元一次不等式 (2)公共部分

体验 2:(1)A (2) $-1\leq x<3$ (3) $-3\leq m<-2$

体验 3:8. 8

典例剖析

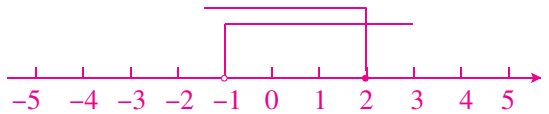
例 1:解:
$$\begin{cases} 2(x-1)+1>-3, & \text{①} \\ x-1\leq \frac{1+x}{3}. & \text{②} \end{cases}$$

解不等式①,得 $x>-1$.

解不等式②,得 $x\leq 2$.

$\therefore$ 原不等式组的解集为 $-1<x\leq 2$.

将解集在数轴上表示如下:



举一反三:解:解不等式①,得 $x>-1$.

解不等式②,得 $x<3$.

$\therefore$ 原不等式组的解集是 $-1<x<3$.

$\therefore$ 它的所有整数解为 0,1,2.

例 2:C

举一反三: $-3\leq a<-2$

例 3:解:(1)设 A 品牌腐竹每箱的售价为 x 元,B 品牌腐竹每箱的售价为 y 元.

由题意得
$$\begin{cases} 20x+30y=4\ 400, \\ 10x+40y=4\ 200. \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} x=100, \\ y=80. \end{cases}$$

答:A 品牌腐竹每箱的售价为 100 元,B 品牌腐竹每箱的售价为 80 元.

(2)设购买 A 品牌腐竹 m 箱,则购买 B 品牌腐竹 $(100-m)$ 箱.

由题意得 $100m+80(100-m)\leq 9\ 200$.

解得 $m\leq 60$.

答:A 品牌腐竹最多能购买 60 箱.

举一反三:解:(1)根据题意得
$$\frac{1\ 800}{x+300} = \frac{1\ 200}{x}.$$

解得 $x=600$.

经检验, $x=600$ 是所列方程的解,且符合题意.

答: x 的值为 600.

(2)设甲工程队单独施工 m 天,则乙工程队单独施工 $(22-m)$ 天.

根据题意得 $(600+300)m+600(22-m)\geq 15\ 000$.

解得 $m\geq 6$.

设该段时间内体育中心需要支付 w 元施工费用,

则 $w=3\ 600m+2\ 200(22-m)$,

即 $w=1\ 400m+48\ 400$.

$\because 1\ 400>0$, $\therefore w$ 随 m 的增大而增大.

$\therefore$ 当 $m=6$ 时, w 取得最小值,最小值为 $1\ 400\times 6+48\ 400=56\ 800$.

答:该段时间内体育中心至少需要支付 56 800 元施工费用.

8 一元二次方程及其应用

考点清单

考点一:1. 未知数 2

考点二:1. 降次 直接开平方法 配方法 公式法 因式分解法 2. ①直接开平方法 ②因式分解

③
$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

体验 1:(1)C (2)D (3) $x_1=1, x_2=2$

考点三:1. ②设未知数 ③列一元二次方程

体验 2:(1) $301(1+x)^2=500$

(2) $(70-x)(160+8x)=16\ 000$

典例剖析

例 1:解: $2x^2+x-2=0$.

$\therefore a=2, b=1, c=-2$,

$\therefore b^2-4ac=1^2-4\times 2\times (-2)=17$.

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

$$\therefore x_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}.$$

举一反三:(1)解: $x(x-7) - 2(7-x) = 0$.

$$x(x-7) + 2(x-7) = 0.$$

$$(x+2)(x-7) = 0.$$

$$\therefore x_1 = -2, x_2 = 7.$$

(2)解: $x_1 = 11, x_2 = -9$.

例2:解:(1)设平均每次下调的百分率为 x .

根据题意,得 $10(1-x)^2 = 6.4$.

解得 $x = 20\%$ 或 $x = 180\%$ (舍去).

答:平均每次下调的百分率为 20% .

(2)选择方案一更优惠.理由如下:

方案一: $6.4 \times 0.8 \times 2\,000 = 10\,240$ (元).

方案二: $6.4 \times 2\,000 - 2\,000 = 10\,800$ (元).

$\therefore 10\,240 < 10\,800$,

$\therefore$ 采购员选择方案一更优惠.

举一反三:解:(1)设月平均增长率为 x .

依题意,得 $225(1+x)^2 = 324$.

解得 $x_1 = 0.2 = 20\%$, $x_2 = -2.2$ (不合题意,舍去).

答:月平均增长率是 20% .

(2)设售价应降低 y 元,则每天可售出 $300 + \frac{100y}{2} =$

$(300 + 50y)$ 千克.

依题意,得 $(24 - 12 - y)(300 + 50y) = 4\,000$.

整理,得 $y^2 - 6y + 8 = 0$.

解得 $y_1 = 2, y_2 = 4$.

$\therefore$ 要尽量减少库存, $\therefore y = 4$.

答:售价应降低 4 元.

9 一元二次方程根的判别式及根与系数的关系

考点清单

考点一:(1)有两个不相等的 (2)有两个相等的
(3)没有

体验1:(1)A (2)C (3)C

考点二: $-\frac{b}{a}$ $\frac{c}{a}$

体验2:(1)-1 2 (2)1

典例剖析

例1:解:(1)由题意知

$$\Delta = (2m)^2 - 4(m-2)(m+3) > 0,$$

解得 $m < 6$.

又 $m-2 \neq 0$, 即 $m \neq 2$,

$\therefore m < 6$ 且 $m \neq 2$.

(2)由(1)知 $m = 5$,

则方程为 $3x^2 + 10x + 8 = 0$.

$$\text{解得 } x_1 = -2, x_2 = -\frac{4}{3}.$$

举一反三:解:(1) $\therefore \Delta = (-3)^2 - 4(m-1) \times 2 = -8m + 17$,

依题意,得 $\begin{cases} m-1 \neq 0, \\ -8m+17 \geq 0, \end{cases}$

解得 $m \leq \frac{17}{8}$ 且 $m \neq 1$.

(2) $\therefore m$ 为正整数,

$\therefore m = 2$.

此时原方程为 $x^2 - 3x + 2 = 0$.

解得 $x_1 = 1, x_2 = 2$.

例2:(1)证明: $\therefore \Delta = [- (2m-1)]^2 - 4 \times 1 \times (-3m^2+m)$

$$= 4m^2 - 4m + 1 + 12m^2 - 4m$$

$$= 16m^2 - 8m + 1$$

$$= (4m-1)^2 \geq 0,$$

$\therefore$ 方程总有实数根.

(2)解:由题意知 $x_1 + x_2 = 2m-1, x_1x_2 = -3m^2+m$.

$$\therefore \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1x_2} - 2 = -\frac{5}{2},$$

$$\therefore \frac{(2m-1)^2}{-3m^2+m} - 2 = -\frac{5}{2}.$$

整理得 $5m^2 - 7m + 2 = 0$,

$$\text{解得 } m_1 = 1, m_2 = \frac{2}{5}.$$

举一反三:(1)证明: $\therefore \Delta = [- (2m+1)]^2 - 4(m^2+m)$

$$= 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 4m$$

$$= 1 > 0,$$

$\therefore$ 无论 m 取何值,方程都有两个不相等的实数根.

(2)解: $\therefore$ 该方程的两个实数根为 a, b ,

$$\therefore a+b = -\frac{-(2m+1)}{1} = 2m+1, ab = \frac{m^2+m}{1} = m^2+m.$$

$$\therefore (2a+b)(a+2b)$$

$$= 2a^2 + 4ab + ab + 2b^2$$

$$= 2(a^2 + 2ab + b^2) + ab$$

$$= 2(a+b)^2 + ab,$$

$$\therefore 2(a+b)^2 + ab = 20.$$

$$\therefore 2(2m+1)^2 + m^2 + m = 20.$$

整理得 $m^2 + m - 2 = 0$.

解得 $m_1 = -2, m_2 = 1$.

$\therefore m$ 的值为 -2 或 1 .

第三章 函数及其图象

10 平面直角坐标系的认识与函数意义

考点清单

考点一:1. x 轴 y 轴

2. 横坐标 纵坐标 一一对应

考点二:0 0 0 相等 互为相反数 纵坐标 横坐标

体验1:(1)B (2)D

考点三:纵坐标 横坐标

体验2:1 或 -7

考点四:1. 函数 自变量

3. (1)解析式法 (2)列表法 (3)图象法

体验3:A

考点五:1. 横坐标、纵坐标 2. ②描点 3. 增大 减小

体验4:D

典例剖析

例1:解:(1)依题意有 $3m-6=0$,

解得 $m=2$.

$$\therefore m+1 = 2+1 = 3.$$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(0,3)$.

(2)依题意有 $m+1=0$,

解得 $m = -1$.

$\therefore 3m - 6 = 3 \times (-1) - 6 = -9$.

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-9, 0)$.

(3) $\because$ 点 $P(3m - 6, m + 1)$ 在过点 $A(-1, 2)$ 且与 x 轴平行的直线上,

$\therefore m + 1 = 2$,

解得 $m = 1$.

$\therefore 3m - 6 = 3 \times 1 - 6 = -3$.

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-3, 2)$.

举一反三: 解: (1) 当 $a = 1$ 时, $2 \times 1 - 6m + 4 = 0$, 解得 $m = 1$.

把 $m = 1$ 代入 $b + 2m - 8 = 0$ 中, 得 $b = 6$.

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(1, 6)$.

$\therefore$ 点 P 到 x 轴的距离为 6.

(2) 当点 P 在第一、三象限的角平分线上时, $a = b$.

由 $2a - 6m + 4 = 0$, 可得 $a = 3m - 2$;

由 $b + 2m - 8 = 0$, 可得 $b = -2m + 8$.

则 $3m - 2 = -2m + 8$, 解得 $m = 2$.

$\therefore a = b = 4$.

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(4, 4)$.

(3) 由(2)中解答过程可知 $a = 3m - 2, b = -2m + 8$.

若 $a < b$, 即 $3m - 2 < -2m + 8$, 解得 $m < 2$.

例 2: 解: (1) $(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)$

(2) 根据题意可知: 当点 P 从点 O 出发, 运动 n s 时, 可得到的整数点的个数是 $n + 1$, 当 $n = 10$ 时, $n + 1 = 10 + 1 = 11$.

$\therefore$ 当点 P 运动 10 s 时, 可得到的整数点的个数是 11, 故答案为 11.

(3) 由题意可得, 当点 P 运动 n s 时, 可得到的整数点都在直线 $y = -x + n$ 上,

则 $-28 + n = 7$, 解得 $n = 35$.

$\therefore$ 当点 P 运动 35 s 时, 可得到整数点 $(28, 7)$.

举一反三: $(51, 50)$

例 3: 解: (1) 小正方形的边长是自变量.

(2) 由题意可得:

$y = 12^2 - 4x^2 = 144 - 4x^2$.

(3) 由(2)知: $y = 144 - 4x^2$.

当小正方形的边长由 1 cm 变化到 5 cm 时, x 增大, x^2 也随之增大, $-4x^2$ 则随着 x 的增大而减小, $\therefore y$ 随着 x 的增大而减小.

当 $x = 1$ 时, y 有最大值, $y_{\text{最大}} = 144 - 4 \times 1^2 = 140$.

当 $x = 5$ 时, y 有最小值, $y_{\text{最小}} = 144 - 4 \times 5^2 = 44$.

$\therefore$ 当小正方形的边长由 1 cm 变化到 5 cm 时, 阴影部分的面积由 140 cm^2 变化到 44 cm^2 .

11 一次函数

考点清单

考点一: $b = 0$ 正比例

体验 1: (1) 2 (2) 1

考点二: 2. 减小

体验 2: (1) D (2) A

考点三: 4. 数量关系

体验 3: -6

考点四: 1. $k_1 = k_2$ $b_1 \neq b_2$ 2. $k_1 \neq k_2$

体验 4: B

考点五: 2. >

体验 5: C

典例剖析

例 1: 解: (1) 依题意有 $6 + 3m < 0, \therefore m < -2$.

$\therefore$ 当 $m < -2$ 时, y 随 x 的增大而减小.

(2) 依题意有 $6 + 3m \neq 0, n - 4 < 0$,

$\therefore m \neq -2, n < 4$.

$\therefore$ 当 $m \neq -2, n < 4$ 时, 函数图象与 y 轴的交点在 x 轴下方.

(3) 依题意有 $6 + 3m \neq 0, n - 4 = 0$,

$\therefore m \neq -2, n = 4$.

$\therefore$ 当 $m \neq -2, n = 4$ 时, 函数图象经过原点.

(4) $\because$ 一次函数 $y = (6 + 3m)x + (n - 4)$ 的图象不经过第二象限,

$\therefore$ 二次函数 $y = (6 + 3m)x + (n - 4)$ 的图象经过第一、三、四象限或第一、三象限.

$\therefore 6 + 3m > 0, n - 4 \leq 0$, 解得 $m > -2, n \leq 4$.

$\therefore$ 当 $m > -2, n \leq 4$ 时, 函数图象不经过第二象限.

举一反三: 解: (1) $\because$ 这个函数的图象经过原点,

$\therefore 4m - 2 = 0$. 解得 $m = \frac{1}{2}$.

(2) $\because$ 这个函数的图象不经过第四象限,

$\therefore \begin{cases} m > 0, \\ 4m - 2 \geq 0. \end{cases}$ 解得 $m \geq \frac{1}{2}$.

(3) 一次函数 $y = mx + 4m - 2$ 变形为 $m(x + 4) = y + 2$.

$\therefore$ 不论 m 取何实数, 这个函数的图象都过定点,

$\therefore x + 4 = 0, y + 2 = 0$. 解得 $x = -4, y = -2$.

$\therefore$ 不论 m 取何实数, 这个函数的图象都过定点 $(-4, -2)$.

例 2: 解: (1) $\because$ 直线 $y = kx$

+ 6 过点 $E(-8, 0)$,

$\therefore 0 = -8k + 6, k = \frac{3}{4}$.

$\therefore$ 直线 EF 的解析式为 $y = \frac{3}{4}x + 6$.

(2) $\because F(0, 6), \therefore OF = 6$.

$\therefore OE = 8$,

$\therefore S_{\triangle OEF} = \frac{1}{2}OE \cdot OF = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$.

(3) 设 $P(x, y)$.

$\because$ 点 A 的坐标为 $(-6, 0), \therefore OA = 6$.

$\therefore S_{\triangle OPA} = \frac{1}{2} \times 6 \times y = 12. \therefore y = 4$.

令 $\frac{3}{4}x + 6 = 4$, 得 $x = -\frac{8}{3}$.

$\therefore$ 点 P 运动到点 $(-\frac{8}{3}, 4)$ 处时, $\triangle OPA$ 的面积为 12.

举一反三: 解: (1) 一次函数的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

(2) 把 $x = 2$ 代入一次函数解析式,

得 $y = -1 + 2 = 1$.

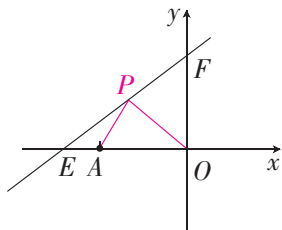
$\therefore S_{\triangle ABC} = 4$,

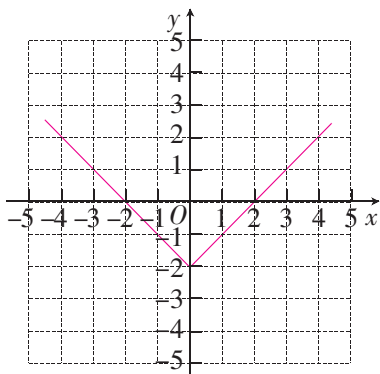
$\therefore \frac{1}{2} \times 4 \times |m - 1| = 4$, 即 $|m - 1| = 2$.

解得 $m = 3$ 或 $m = -1$ (舍去).

$\therefore m$ 的值为 3.

例 3: 解: 函数 $y = |x| - 2$ 的图象如图.





(1) 最低点的坐标是 $(0, -2)$, 函数 y 的最小值是 -2 .

(2) $x > 2$ 或 $x < -2$.

(3) 当 $y = 1$ 时, $|x| - 2 = 1$, 解得 $x = -3$ 或 $x = 3$ (舍去).

$\therefore$ 交点 A 的坐标为 $(-3, 1)$.

$\therefore$ 交点 B 的坐标为 $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$,

$\therefore$ 关于 x 的方程 $|x| - 2 = kx + b$ 的解为 $x = -3$ 或 $x = \frac{1}{2}$.

12 反比例函数

考点清单

考点一: 1. (1) $y = kx^{-1} (k \neq 0)$ -1 $k \neq 0$ (2) $xy = k$

2. x 轴、 y 轴

体验 1: 2

考点二: 1. 双曲线 越小 越大

2. 一、三 减小 二、四 增大

3. (1) 坐标原点 (2) $y = -x$

体验 2: (1) C (2) D (3) -2

考点三: $\frac{1}{2}k$ $2k$ $\frac{1}{2}(k_1 - k_2)$

体验 3: D

体验 4: $y = \frac{12}{x}$

典例剖析

例 1: 解: (1) $\therefore$ 函数 $y = (m-2)x^{m^2-5}$ 是关于 x 的反比例函数,

$\therefore \begin{cases} m-2 \neq 0, \\ m^2-5 = -1. \end{cases}$ 解得 $m = -2$.

(2) $\therefore m = -2$,

$\therefore$ 反比例函数的解析式为 $y = -\frac{4}{x}$.

$\therefore -4 < 0$,

$\therefore$ 函数图象的两个分支分别位于第二、四象限, 且在每个象限内, y 随 x 的增大而增大.

(3) $\therefore$ 反比例函数的解析式为 $y = -\frac{4}{x}$,

$\therefore$ 当 $x = -3$ 时, $y = \frac{4}{3}$; 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, $y = 8$.

结合反比例函数的图象可知, 当 $-3 \leq x \leq -\frac{1}{2}$ 时, y 的

取值范围是 $\frac{4}{3} \leq y \leq 8$.

举一反三: (1) C (2) C

例 2: 解: (1) 当 $k = 1$ 时, $y = x + k$ 和 $y = \frac{k+1}{x}$ 化为 $y = x$

$+ 1$ 和 $y = \frac{2}{x}$.

由 $\begin{cases} y = x + 1, \\ y = \frac{2}{x} \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -2, \\ y = -1. \end{cases}$

$\therefore A(1, 2), B(-2, -1)$.

(2) 当 $k = 2$ 时, $y = x + k$ 和 $y = \frac{k+1}{x}$ 化为 $y = x + 2$ 和 $y =$

$\frac{3}{x}$.

由 $\begin{cases} y = x + 2, \\ y = \frac{3}{x} \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = -3, \\ y = -1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 3. \end{cases}$

$\therefore A(1, 3), B(-3, -1)$.

$\therefore$ 直线 AB 的解析式为 $y = x + 2$,

$\therefore$ 直线 AB 与 y 轴的交点为 $(0, 2)$.

$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 4$.

(3) 当 $k = 1$ 时, $S_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times (1 + 2) = \frac{3}{2}$;

当 $k = 2$ 时, $S_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times (1 + 3) = 4, \dots$;

当 $k = n$ 时, $S_n = \frac{1}{2}n(1 + n + 1) = \frac{1}{2}n^2 + n$.

举一反三: 解: (1) $\therefore$ 直线 $y = x + b$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$

($x > 0$) 的图象交于点 $A(2, 3)$,

$\therefore k = 2 \times 3 = 6, 2 + b = 3$, 即 $b = 1$.

$\therefore$ 直线 AB 的解析式为 $y = x + 1$, 反比例函数的解析式为 $y = \frac{6}{x}$.

(2) $\therefore$ 直线 $y = x + 1$ 与 y 轴交于点 B ,

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时, $y = 1$.

$\therefore B(0, 1)$.

$\therefore BC \parallel x$ 轴, 直线 BC 与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图

象交于点 C ,

$\therefore$ 点 C 的纵坐标为 1.

$\therefore \frac{6}{x} = 1$, 即 $x = 6$.

$\therefore C(6, 1)$.

$\therefore BC = 6$.

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times (3 - 1) = 6$.

13 生活中的一次函数与反比例函数

考点清单

体验 1: B

体验 2: (1) 0.6 (2) D

典例剖析

例 1: 解: (1) 设商场能购进 A 型台灯 x 盏, B 型台灯 $(100 - x)$ 盏.

根据题意得 $30x + 50(100 - x) = 3\ 500$.

解得 $x = 75$.

$$\therefore 100 - 75 = 25.$$

答:能购进 A 型台灯 75 盏, B 型台灯 25 盏.

$$(2) \text{依题意有 } P = (45 - 30)m + (70 - 50)(100 - m) = -5m + 2\,000,$$

$$\text{即 } P = -5m + 2\,000.$$

(3) $\because$ B 型台灯的进货数量不超过 A 型台灯数量的 4 倍,

$$\therefore 100 - m \leq 4m. \therefore m \geq 20.$$

$\because k = -5 < 0$, P 随 m 的增大而减小,

$$\therefore \text{当 } m = 20 \text{ 时, } P \text{ 取得最大值, 为 } -5 \times 20 + 2\,000 = 1\,900.$$

答:商场购进 A 型台灯 20 盏, B 型台灯 80 盏时, 销售完这批台灯后获利最大, 最大利润为 1 900 元.

例 2: 解: (1) $\because$ 方案一中, 总费用 = 广告赞助费 + 门票费,

$$\therefore y = 60x + 10\,000.$$

在方案二中, 当 $0 \leq x \leq 100$ 时, 设函数关系式为 $y = ax$.

$$\text{把 } (100, 10\,000) \text{ 代入上式, 得 } 10\,000 = 100a, \text{ 解得 } a = 100.$$

$$\therefore y = 100x.$$

当 $x > 100$ 时, 设函数关系式为 $y = kx + b$.

把 $(100, 10\,000)$ 和 $(150, 14\,000)$ 代入上式, 得

$$\begin{cases} 100k + b = 10\,000, \\ 150k + b = 14\,000. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k = 80, \\ b = 2\,000. \end{cases}$$

$$\therefore y \text{ 与 } x \text{ 的函数关系式为 } y = 80x + 2\,000.$$

故答案分别是: $y = 60x + 10\,000$, $y = 100x$, $y = 80x + 2\,000$.

(2) $\because$ 购买本场足球赛门票超过 100 张,

$$\therefore \text{当 } 60x + 10\,000 = 80x + 2\,000 \text{ 时, 解得 } x = 400.$$

$$\text{当 } 60x + 10\,000 > 80x + 2\,000 \text{ 时, 解得 } x < 400;$$

$$\text{当 } 60x + 10\,000 < 80x + 2\,000 \text{ 时, 解得 } x > 400.$$

$\therefore$ 当购买 100 张以上 400 张以下时, 选择方案二; 当购买 400 张以上时, 选择方案一; 当购买 400 张时, 两种方案皆可.

例 3: 解: (1) 材料锻造时, 设 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$.

$$\text{由题意得 } 600 = \frac{k}{8}, \text{ 解得 } k = 4\,800. \therefore y = \frac{4\,800}{x}.$$

$$\text{当 } y = 800 \text{ 时, } \frac{4\,800}{x} = 800, \text{ 解得 } x = 6.$$

$$\therefore \text{点 } B \text{ 的坐标为 } (6, 800).$$

材料煅烧时, 设 $y = ax + 32 (a \neq 0)$.

$$\text{由题意得 } 800 = 6a + 32, \text{ 解得 } a = 128.$$

$$\therefore \text{材料煅烧时, } y \text{ 与 } x \text{ 的函数关系式为 } y = 128x + 32 (0 \leq x \leq 6);$$

$$\text{锻造时, } y \text{ 与 } x \text{ 的函数关系式为 } y = \frac{4\,800}{x} (x > 6).$$

$$(2) \text{把 } y = 400 \text{ 代入 } y = \frac{4\,800}{x} \text{ 中,}$$

$$\text{得 } x = 12, 12 - 6 = 6 (\text{min}).$$

答: 锻造的操作时间最多有 6 min.

(3) 当 $y = 400$ 时, $x = 12$, $\therefore$ 锻造每个零件需要煅烧两次, 第一次煅烧需要 6 min, 第二次煅烧从 400°C 烧到 800°C .

$$\text{当 } y = 400 \text{ 时, 代入 } y = 128x + 32, \text{ 得 } x = \frac{23}{8},$$

$$\text{用时 } 6 - \frac{23}{8} = \frac{25}{8} (\text{min}).$$

$$\therefore \text{加工第一个零件一共需要 } 12 + \frac{25}{8} + 6 = \frac{169}{8} (\text{min}).$$

举一反三: 解: (1) $a = 6 \div 2 = 3$.

又由题意可知: 当 $3 \leq x \leq 8$ 时, y 与 x 成反比例, 设 $y = \frac{m}{x}$.

将 $(3, 6)$ 代入上式,

$$\text{得 } m = 3 \times 6 = 18. \therefore y = \frac{18}{x} (3 \leq x \leq 8).$$

$$(2) \text{把 } y = 3 \text{ 分别代入 } y = 2x \text{ 和 } y = \frac{18}{x},$$

$$\text{得 } x = 1.5 \text{ 和 } x = 6.$$

$$\therefore 6 - 1.5 = 4.5 > 4,$$

$\therefore$ 这种抗菌新药可以作为有效药物投入生产.

微专题一 坐标系中的面积问题

1. 解: $\because$ 点 C 的坐标为 $(-4, 4)$,

$\therefore \triangle ABC$ 的 AB 边上的高为 4.

$$\text{又由题可知 } AB = 4 - (-2) = 6,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12.$$

2. 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $A(-1, -2)$,

$$B(0, 1), C(5, 1), D(4, -2),$$

$$\therefore AD \parallel x \text{ 轴}, AD = 4 - (-1) = 5, \text{ 高为 } 1 - (-2) = 3.$$

$$\therefore \text{平行四边形 } ABCD \text{ 的面积} = 5 \times 3 = 15.$$

3. 解: (1) 由图可知 $A(4, 0)$, $B(0, 3)$, $C(2, -2)$.

$$(2) \text{三角形 } ABC \text{ 的面积为 } 4 \times 5 - \frac{1}{2} \times 4 \times 3 - \frac{1}{2} \times 5 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 7.$$

(3) $\because$ 三角形 ABC 的面积为 7,

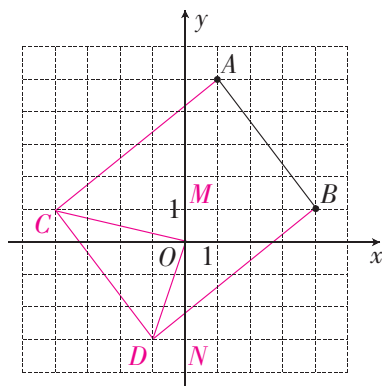
$$\therefore \frac{1}{2} \times (|y_B| + |y_C|) \times AD = 7,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times 5 \times AD = 7.$$

$$\text{解得 } AD = \frac{14}{5}.$$

$$\therefore 4 - \frac{14}{5} = \frac{6}{5}, \text{ 即点 } D \text{ 的坐标为 } (\frac{6}{5}, 0).$$

4. 解: (1) 补全图形, 如图所示.



点 C 和点 D 的坐标分别是 $(-4, 1)$, $(-1, -3)$.

$$(2) \text{由题可得 } S_{\triangle OCD} = S_{\text{四边形 } CMND} - S_{\triangle CMO} - S_{\triangle OND} = \frac{1}{2}$$

$$\times 4 \times (4 + 1) - \frac{1}{2} \times 1 \times 4 - \frac{1}{2} \times 1 \times 3 = \frac{13}{2}.$$

5.3

6. 解:(1)(2,3)

(2)将 $\triangle ABC$ 先向右平移3个单位,再向下平移2个单位;或者先向下平移2个单位,再向右平移3个单位,可到达 $\triangle A_1B_1C_1$ 的位置.

故填:右 3 下 2(答案不唯一)

(3)根据题意及平移的性质知 $AB \parallel A_1B_1, AB = A_1B_1$,
 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A_1B_1C_1}$,

$\therefore$ 四边形 ABB_1A_1 为平行四边形.

$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\square ABB_1A_1} = 3 \times 3 = 9$.

7. 解:(1) $\because A(0,2), B(-2,0), C(4,0)$,

$\therefore OA = 2, OB = 2, OC = 4$.

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AO = \frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6$.

故填6.

(2)①由题意,得点 $D(5,4)$,连接 OD .

$S_{\triangle ACD} = S_{\triangle AOD} + S_{\triangle COD} - S_{\triangle AOC}$
 $= \frac{1}{2} \times 2 \times 5 + \frac{1}{2} \times 4 \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 9$.

②由题意,得 $\frac{1}{2} \times 2 \times |m| = \frac{1}{2} \times 2 \times 4$.

解得 $m = \pm 4$.

$\therefore$ 点 $P(-4,3)$ 或 $(4,3)$.

8. 解:(1) $\because A(1,0), B(-2,3), C(-3,0)$,

$\therefore AC = 1 - (-3) = 1 + 3 = 4$,

点 B 到 AC 的距离为3.

$\therefore \triangle ABC$ 的面积 $= \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$.

(2) $\because S_{\triangle ACP} = 2S_{\triangle ABC} = 12$,

$\therefore$ 以 AC 为底时, $\triangle ACP$ 的高 $= 12 \times 2 \div 4 = 6$.

$\therefore$ 当点 P 在 y 轴正半轴时, $P(0,6)$;

当点 P 在 y 轴负半轴时, $P(0,-6)$.

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(0,6)$ 或 $(0,-6)$.

(3) $\because S_{\triangle BCQ} = 2S_{\triangle ABC} = 12$,

$\therefore$ 以 CQ 为底时, $\triangle BCQ$ 的高为3,底边 $CQ = 12 \times 2 \div 3 = 8$.

$\therefore$ 当点 Q 在点 C 的左边时, $Q(-3-8,0)$,
即 $Q(-11,0)$;

当点 Q 在点 C 的右边时, $Q(-3+8,0)$,即 $Q(5,0)$.

$\therefore$ 点 Q 的坐标为 $(-11,0)$ 或 $(5,0)$.

14 二次函数(1)

考点清单

考点一:1. $y = ax^2 + bx + c$

2. (1) $y = ax^2 + bx + c$ (2) $y = a(x-h)^2 + k$ (h, k)

(3) $y = a(x-x_1)(x-x_2)$ $x = \frac{x_1+x_2}{2}$

体验1:(1)B (2)C

考点二:1. $y = ax^2 + bx + c$ 2. $y = a(x-h)^2 + k$

3. $y = a(x-x_1)(x-x_2)$

体验2:(1)D (2)D

体验3:(1)C (2)D (3)B

体验4:(2,-3)

典例剖析

例1:解:(1) $\because$ 二次函数 $y = -x^2 + bx + c$ 的图象经过点 $A(3,1), B(0,4)$,

$\therefore \begin{cases} -9 + 3b + c = 1, \\ c = 4. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} b = 2, \\ c = 4. \end{cases}$

$\therefore$ 该二次函数的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 4$.

$\therefore y = -(x-1)^2 + 5$,

$\therefore$ 顶点坐标为 $(1,5)$.

(2) $\because$ 点 $C(m,n)$ 在该二次函数的图象上,

①当 $m = -1$ 时,则 $C(-1,n)$.

把 $(-1,n)$ 代入 $y = -x^2 + 2x + 4$,得 $n = 1$.

② $\because$ 抛物线的顶点为 $(1,5)$,

把 $y = 1$ 代入 $y = -x^2 + 2x + 4$,得 $1 = -x^2 + 2x + 4$,解得 $x_1 = 3, x_2 = -1$.

$\therefore$ 当 $m \leq x \leq 3$ 时, n 的最大值为5,最小值为1,

$\therefore m$ 的取值范围是 $-1 \leq m \leq 1$.

举一反三:解:(1) $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中,当 $x = 1$ 时,函数 y 有最小值2,

$\therefore$ 点 $(1,2)$ 为抛物线的顶点.

于是可设抛物线的解析式为 $y = a(x-1)^2 + 2$,把 $(0,3)$ 代入得 $a + 2 = 3$.

$\therefore a = 1$.

$\therefore$ 二次函数的解析式为 $y = (x-1)^2 + 2$,

即 $y = x^2 - 2x + 3$.

(2) $\because$ 点 $C(m,6), D(n,6)$ 都在抛物线上,

$\therefore$ 点 C, D 关于直线 $x = 1$ 对称.

$\therefore \frac{m+n}{2} = 1$.

$\therefore m + n = 2$.

例2:解:(1)由题意可知抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 经过 A, B 两点,

$\therefore \begin{cases} a + b + 3 = 4, \\ a - b + 3 = 0. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = -1, \\ b = 2. \end{cases}$

$\therefore$ 抛物线所对应的函数解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$.

(2) $\because$ 抛物线 $y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$,

$\therefore$ 顶点坐标为 $(1,4)$.

当 $m = 0$ 时, $n = 3$;当 $m = 4$ 时, $n = -5$.

$\therefore$ 当 $0 < m < 4$ 时, $-5 < n \leq 4$.

(3) $\because y = -x^2 + 2x + 3 = -(x+1)(x-3)$,

$\therefore$ 抛物线开口向下,与 x 轴的交点为 $(-1,0), (3,0)$.

$\therefore$ 一次函数 $y = (k-1)x - 3k + 3 = (k-1)(x-3)$,

$\therefore$ 一次函数 $y = (k-1)x - 3k + 3$ 的图象一定经过点 $(3,0)$.

$\therefore$ 一次函数 $y = (k-1)x - 3k + 3$ (其中 $k \neq 1$)的图象与(1)中所求抛物线交点的横坐标分别是 x_1 和 x_2 ,且 $x_1 < -1 < x_2$,

$\therefore$ 一次函数 $y = (k-1)x - 3k + 3$ 的图象经过第一、三、四象限.

$\therefore k-1 > 0$,且 $-3k+3 < 0$, $\therefore k > 1$.

例3:解:(1)将 $(4,0)$ 代入 $y_1 = -x^2 + \frac{13}{4}x + c$,

得 $-16 + 13 + c = 0$,

解得 $c = 3$.

$\therefore$ 二次函数的解析式为 $y_1 = -x^2 + \frac{13}{4}x + 3$.

$\therefore$ 点 B 是二次函数的图象与 y 轴的交点,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(0,3)$.

(2)存在满足题意的点 P ,使得 $\triangle ABP$ 是以 AB 为底边

的等腰三角形.
 当 $\triangle ABP$ 是以 AB 为底边的等腰三角形时,点 P 在线段 AB 的垂直平分线上.
 ①当点 P 在 y 轴上时, $PA=PB$.
 设 $P(0,m)$.
 $\because A(4,0),B(0,3)$,
 $\therefore \sqrt{4^2+m^2}=\sqrt{(m-3)^2}$.
 解得 $m=-\frac{7}{6}$.此时 $P(0,-\frac{7}{6})$.
 ②当点 P 在 x 轴上时, $PA=PB$.
 设 $P(n,0)$. $\because A(4,0),B(0,3)$,
 $\therefore \sqrt{(4-n)^2}=\sqrt{n^2+3^2}$.
 解得 $n=\frac{7}{8}$.此时 $P(\frac{7}{8},0)$.
 综上所述,满足条件的点 P 的坐标为 $(0,-\frac{7}{6})$ 或 $(\frac{7}{8},0)$.

15 二次函数(2)

考点清单
 考点一:2. 横坐标 3. (1)2 (2)1 (3)没有
 体验1:(1)A (2) $x_1=-1,x_2=3$
 考点二:1. 方向 大小 2. 左 右 3. 交点的位置
 体验2:C
 考点三:1. a 2. (1)上 下 (2)右 左
 体验3:(1)A (2)2
典例剖析
 例1:C
 举一反三:(1)C (2)D
 例2:(1)证明:由题意得
 $\Delta=(1-5m)^2-4m\times(-5)=(5m+1)^2\geqslant 0$,
 $\therefore$ 无论 m 为何非零实数,此方程总有两个实数根.
 (2)解:解方程 $mx^2+(1-5m)x-5=0$,
 得 $x_1=-\frac{1}{m},x_2=5$.
 由 $|x_1-x_2|=6$,得 $|\frac{1}{m}-5|=6$.
 解得 $m=1$ 或 $-\frac{1}{11}$.
 (3)解:由(2)得,当 $m>0$ 时, $m=1$.
 此时抛物线为 $y=x^2-4x-5$,
 其对称轴为直线 $x=2$.
 由题意知,点 P,Q 关于 $x=2$ 对称.

$\therefore \frac{a+a+n}{2}=2$,即 $2a=4-n$.
 $\therefore 4a^2-n^2+8n=(4-n)^2-n^2+8n=16$.
 举一反三:(1)证明:当 $x=0$ 时, $y=1$.
 $\therefore$ 不论 m 为何值,函数 $y=mx^2-6x+1$ 的图象都经过 y 轴上的一个定点 $(0,1)$.
 (2)解:依题意有 $6^2-4m>0$,且 $m\neq 0$,解得 $m<9$ 且 $m\neq 0$,则 m 的最大整数值为8.
 $\therefore$ 方程 $8x^2-6x+1=0$ 的两个根为 $x_1=\frac{1}{4},x_2=\frac{1}{2}$.
 (3)解:①当 $m=0$ 时,函数 $y=-6x+1$ 的图象与 x 轴只有一个交点.
 ②当 $m\neq 0$ 时,若函数 $y=mx^2-6x+1$ 的图象与 x 轴只有一个交点,则方程 $mx^2-6x+1=0$ 有两个相等的实

数根, $\therefore (-6)^2-4m=0,m=9$.
 综上所述,若函数 $y=mx^2-6x+1$ 的图象与 x 轴只有一个交点,则 m 的值为0或9.
 例3:解:(1)令 $y=0$,则有 $ax^2-2ax-3a=0$,
 解得 $x_1=-1,x_2=3$.
 $\therefore$ 点 A 在点 B 的左侧, $\therefore A(-1,0),B(3,0)$.
 $\therefore$ 抛物线 m 的对称轴为直线 $x=1$.
 (2) $\because$ 抛物线 $m:y=ax^2-2ax-3a=a(x-1)^2-4a$,
 $\therefore$ 顶点 D 的坐标为 $(1,-4a)$.
 $\because$ 抛物线 m 与抛物线 n 关于原点中心对称,
 $\therefore C(-1,4a)$.
 又 $\because 4a=4,\therefore a=1$.
 $\therefore$ 抛物线 m 的解析式为 $y=x^2-2x-3$.
 $\therefore$ 抛物线 n 的解析式为 $y=-(x+1)^2+4=-x^2-2x+3$.
 (3)由题意得 $E(1,4)$,抛物线 e 的解析式为 $y=(x-1)^2+4=x^2-2x+5$.
 设 $P(k,k^2-2k+5),Q(k,k^2-2k-3)$.
 $\because CP=CQ,\therefore$ 直线 $y=4$ 是 PQ 的中垂线,抛物线 m 向上平移8个单位长度可得抛物线 e ,
 $\therefore 4-(k^2-2k-3)=k^2-2k+5-4=4$.
 解得 $k_1=3,k_2=-1$.
 $\therefore P(-1,8),Q(-1,0)$ 或 $P(3,8),Q(3,0)$.

16 二次函数(3)

体验1:D
体验2:C
体验3:(1) $\frac{9}{4}m$ (2) $y=-\frac{1}{2}x^2$
典例剖析
 例1:解:(1)设垂直于墙的边长 x m,围成的矩形面积为 S m²,则平行于墙的边长 $(120-3x)$ m.
 根据题意得 $S=x(120-3x)=-3x^2+120x=-3(x-20)^2+1\ 200$.
 $\because -3<0$,
 $\therefore$ 当 $x=20$ 时, S 取得最大值1 200.
 $\therefore 120-3x=120-3\times 20=60$.
 $\therefore$ 当垂直于墙的边长20 m,平行于墙的边长60 m时,花园面积最大,为1 200 m².
 (2)设购买牡丹 m 株,则购买芍药 $1\ 200\times 2-m=(2\ 400-m)$ 株.
 $\because$ 学校计划购买费用不超过5万元,
 $\therefore 25m+15(2\ 400-m)\leqslant 50\ 000$,
 解得 $m\leqslant 1\ 400$.
 $\therefore$ 最多可以购买1 400株牡丹.
 例2:解:(1)设月销量 y (台)与销售单价 x (元)之间的函数关系式为 $y=kx+b$.
 把 $(50,90)$ 和 $(60,80)$ 分别代入,
 得 $\begin{cases} 90=50k+b, \\ 80=60k+b. \end{cases}$
 解得 $\begin{cases} k=-1, \\ b=140. \end{cases} \therefore y=-x+140$.
 (2)设每月出售这种护眼灯所获得的利润为 w 元.
 根据题意得 $w=(x-40)y=(x-40)(-x+140)=-x^2+180x-5\ 600=-(x-90)^2+2\ 500$.
 $\therefore 40\leqslant x\leqslant 80$,
 $\therefore$ 当 $x=80$ 时, w 最大,为2 400元.

∴ 当护眼灯的销售单价定为 80 元时,商店每月出售这种护眼灯所获得的利润最大,最大月利润为 2 400 元.

举一反三:解:(1) 当 $22 \leq x \leq 30$ 时,易得 y 关于 x 的函数解析式为 $y = -x + 70 (22 \leq x \leq 30)$.

当 $30 < x \leq 45$ 时,易得 y 关于 x 的函数解析式为 $y = -2x + 100 (30 < x \leq 45)$.

$$\therefore y = \begin{cases} -x + 70, & 22 \leq x \leq 30, \\ -2x + 100, & 30 < x \leq 45. \end{cases}$$

(2) 设利润为 w .

$$\text{当 } 22 \leq x \leq 30 \text{ 时, } w = (x - 20)(-x + 70) = -x^2 + 90x - 1400 = -(x - 45)^2 + 625$$

∴ 当 $22 \leq x \leq 30$ 时, w 随着 x 的增大而增大,

∴ 当 $x = 30$ 时, w 取得最大值,为 400.

$$\text{当 } 30 < x \leq 45 \text{ 时, } w = (x - 20)(-2x + 100) = -2x^2 + 140x - 2000 = -2(x - 35)^2 + 450.$$

∴ 当 $x = 35$ 时, w 取得最大值,为 450.

∴ $450 > 400$, ∴ 当销售价格为 35 元/kg 时,每天获得的销售利润最大,为 450 元.

例 3:解:(1) 由题意,得抛物线的顶点坐标为 (2, 3), 设抛物线的解析式为 $y = a(x - 2)^2 + 3$.

$$\text{把 } (8, 0) \text{ 代入解析式得 } 36a + 3 = 0, \text{ 解得 } a = -\frac{1}{12}.$$

$$\therefore \text{ 抛物线的函数解析式为 } y = -\frac{1}{12}(x - 2)^2 + 3.$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = \frac{8}{3} > 2.44, \therefore \text{ 球不能射进球门.}$$

$$(2) \text{ 设小明带球向正后方移动 } m \text{ m, 则移动后的抛物线为 } y = -\frac{1}{12}(x - 2 - m)^2 + 3.$$

$$\text{把 } (0, 2.25) \text{ 代入解析式, 得 } 2.25 = -\frac{1}{12}(0 - 2 - m)^2 + 3, \text{ 解得 } m = -5 (\text{舍去}) \text{ 或 } m = 1.$$

∴ 当时他应该带球向正后方移动 1 m 射门,才能让足球经过点 O 正上方 2.25 m 处.

第四章 三 角 形

17 线段、角、相交线与平行线

考点清单

考点一:3. 平行四边形

体验 1:B

考点二:1. 一条 2. 线段 4. 长度

体验 2:D

考点三:1. 360 180 60 60 2. (1) 相等 (2) 一条垂线段 (3) 长度 (4) ①相等 ②补角 (5) 平分线

3. (1) $\angle 6$ $\angle 7$ $\angle 8$ (2) $\angle 6$ (3) $\angle 5$

体验 3:(1) B (2) C (3) C

考点四:1. 相交 平行 2. 不相交 3. (1) 一 (2) 互相平行 4. (1) 相等 (2) 相等 (3) 互补

5. (1) 垂线段 (2) 相等

体验 4:(1) 144 (2) B

考点五:相等 相等 这个角的平分线 垂直平分线

体验 5:(1) 6 (2) 6

典例剖析

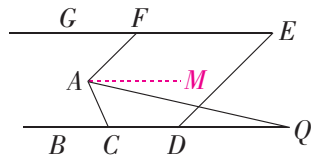
例 1:解:(1) ∵ $BC \parallel EG$,

$$\therefore \angle E = \angle EDQ = 45^\circ.$$

$$\therefore AF \parallel DE,$$

$$\therefore \angle AFG = \angle E = 45^\circ.$$

(2) 如图,作 $AM \parallel BC$.



$$\therefore BC \parallel EG, \therefore AM \parallel EG.$$

$$\therefore \angle FAM = \angle AFG = 45^\circ.$$

$$\therefore AM \parallel BC,$$

$$\therefore \angle QAM = \angle Q = 20^\circ.$$

$$\therefore \angle FAQ = \angle FAM + \angle QAM = 65^\circ.$$

$$\therefore AQ \text{ 平分 } \angle FAC,$$

$$\therefore \angle QAC = \angle FAQ = 65^\circ.$$

$$\therefore \angle MAC = \angle QAC + \angle QAM = 85^\circ.$$

$$\therefore AM \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle MAC = 85^\circ.$$

举一反三:解:(1) $\angle BPD = \angle B - \angle D$.

(2) 点 P 移到 AB, CD 内部, (1) 中结论不成立, 结论是 $\angle BPD = \angle B + \angle D$.

证明: 延长 BP 交 CD 于点 E . ∵ $AB \parallel CD$,
∴ $\angle B = \angle BED$. 又 $\angle BPD = \angle BED + \angle D$,
∴ $\angle BPD = \angle B + \angle D$.

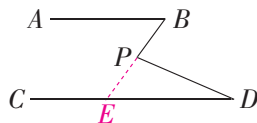
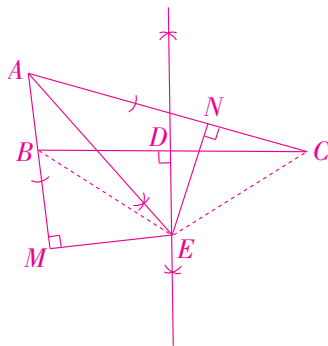


图 2

$$(3) \angle BPD = \angle BQD + \angle B + \angle D.$$

例 2: (1) 解: 如图.



(2) ①证明: 连接 BE, CE , 如图.

由 (1) 知 DE 是 BC 的垂直平分线,

$$\therefore BE = CE.$$

∵ AE 是 $\angle BAC$ 的平分线, $EM \perp AB, EN \perp AC$,

$$\therefore EM = EN.$$

在 $Rt\triangle BME$ 和 $Rt\triangle CNE$ 中,

$$\begin{cases} BE = CE, \\ EM = EN, \end{cases}$$

$$\therefore Rt\triangle BME \cong Rt\triangle CNE (HL).$$

$$\therefore BM = CN.$$

②解: 由 ① 得 $EM = EN$.

在 $Rt\triangle AME$ 和 $Rt\triangle ANE$ 中,

$$\begin{cases} AE = AE, \\ EM = EN, \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt} \triangle AME \cong \text{Rt} \triangle ANE (\text{HL}).$

$\therefore AM = AN.$

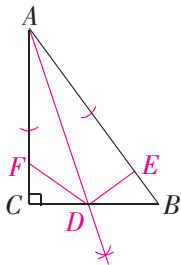
又 $\because AM = AB + BM, AN = AC - CN,$

$\therefore AB + BM = AC - CN.$

$\therefore 2 + BM = 8 - CN.$ 又 $\because BM = CN,$

$\therefore BM = CN = 3.$

举一反三:(1)解:如图所示.



(2)①证明:由作图知 AD 是 $\angle BAC$ 的平分线.

又 $\because DE \perp AB, \angle C = 90^\circ,$

$\therefore DC = DE.$

在 $\text{Rt} \triangle FCD$ 和 $\text{Rt} \triangle BED$ 中,

$$\begin{cases} DC = DE, \\ DF = DB, \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt} \triangle FCD \cong \text{Rt} \triangle BED. \therefore CF = EB.$

②解: $AB = AF + 2BE.$

理由:在 $\text{Rt} \triangle ACD$ 和 $\text{Rt} \triangle AED$ 中,

$$\begin{cases} DC = DE, \\ AD = AD, \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt} \triangle ACD \cong \text{Rt} \triangle AED. \therefore AC = AE.$

$\therefore AB = AE + BE = AF + FC + BE = AF + 2BE.$

18 三角形与全等三角形

考点清单

考点一:2. (1) 180° (2) ①和 ②大于

(3) 大于 小于

体验 1: 65° 钝角

考点二:2. 垂线 3. 中点 重心 相等 4. 一半

体验 2: B

考点三:1. 重合

2. (1) 相等 相等 (2) 相等 相等 相等

3. (1) 相等 (2) 夹角 SAS (3) 夹边

(4) 相等 对边 (5) 斜边

体验 3: D

考点四:2. 题设 结论

7. (1) 图形 (2) 已知 求证 (3) 证明

体验 4: B

典例剖析

例 1: 解: (1) $\because \angle C = 40^\circ, \angle B = 2\angle C,$

$\therefore \angle B = 80^\circ.$

$\therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle B - \angle C = 60^\circ.$

$\therefore AE$ 平分 $\angle BAC,$

$\therefore \angle EAC = \frac{1}{2} \angle BAC = 30^\circ.$

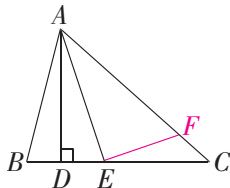
$\therefore AD \perp BC,$

$\therefore \angle ADC = 90^\circ.$

$\therefore \angle DAC = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ.$

$\therefore \angle DAE = \angle DAC - \angle EAC = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ.$

(2) 如图, $EF \perp AE, \therefore \angle AEF = 90^\circ.$



$\therefore \angle AED + \angle FEC = 90^\circ.$

$\therefore \angle DAE + \angle AED = 90^\circ,$

$\therefore \angle DAE = \angle FEC.$

由(1)可知 $\angle DAE = 20^\circ,$

$\therefore \angle FEC = 20^\circ.$

举一反三: 12° 10°

例 2: (1) 证明: $\because CD \perp AB, BE \perp AC,$

$\therefore \angle AEB = \angle ADC = 90^\circ.$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$$\begin{cases} \angle AEB = \angle ADC, \\ \angle BAE = \angle CAD, \\ AB = AC, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD (\text{AAS}).$

(2) 解: $\because \triangle ABE \cong \triangle ACD,$

$\therefore AD = AE = 6.$

在 $\text{Rt} \triangle ACD$ 中, $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$

$\therefore AB = AC = 10,$

$\therefore BD = AB - AD = 10 - 6 = 4.$

例 3: 解: (1) $\because AD$ 是中线, $\therefore BD = DC.$

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle EDB$ 中, $\begin{cases} AD = DE, \\ \angle ADC = \angle EDB, \\ CD = DB, \end{cases}$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle EDB (\text{SAS}).$

$\therefore BE = AC = 3.$

$\therefore AB - BE < AE < AB + BE,$

$\therefore 2 < AE < 8.$

$\therefore AE = 2AD, \therefore 1 < AD < 4.$

(2) $AC = BF.$ 理由如下:

延长 AD 至点 G , 使 $GD = AD$, 连接 $BG.$

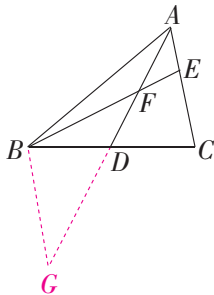


图 2

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle GDB$ 中,

$$\begin{cases} AD = DG, \\ \angle ADC = \angle GDB, \\ CD = BD, \end{cases} \therefore \triangle ADC \cong \triangle GDB (\text{SAS}).$$

$\therefore BG = AC, \angle G = \angle DAC.$

$\therefore AE = EF, \therefore \angle AFE = \angle FAE.$

$\therefore \angle DAC = \angle AFE = \angle BFG.$

$\therefore \angle G = \angle BFG. \therefore BG = BF. \therefore AC = BF.$

19 等腰三角形

考点清单

考点一:2. 相等 等腰直角

体验 1:A

考点二:1. (1)等边对等角 (2)顶角的平分 底边上的中 2. 等角对等边

体验 2:(1)B (2)B

考点三:1. (1)60° (2)相等 (3)三条

2. (2)三个角 (3)60°

体验 3:B

典例剖析

例 1:证明:(1)∵ BD 平分 $\angle ABC$, $\angle ABC = 60^\circ$,

$$\therefore \angle DBC = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ.$$

$$\because \angle ADB = \angle DBC + \angle C = 75^\circ, \\ \angle BAC = 180^\circ - \angle ABC - \angle C = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ADB.$$

$$\therefore AB = BD.$$

(2)∵ $AE \perp BC$,

$$\therefore \angle AEB = \angle AEC = 90^\circ.$$

$$\because \angle C = 45^\circ, \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EAC = 45^\circ, \angle BAE = 30^\circ.$$

$$\therefore AE = EC, \angle ABD = \angle EAB = 30^\circ.$$

$$\therefore AF = BF.$$

$$\because AE = AF + EF, \therefore CE = BF + EF.$$

举一反三:解:(1) $\triangle ABD$, $\triangle ADE$, $\triangle EDC$. (写出两个即可)

(2) AD 与 BE 垂直.

证明:∵ BE 为 $\angle ABC$ 的平分线,

$$\therefore \angle ABE = \angle DBE.$$

$$\text{又} \because DE \perp BC, \therefore \angle BAE = \angle BDE = 90^\circ.$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DBE (\text{AAS}).$$

$$\therefore AE = ED, AB = DB.$$

$$\therefore AD \perp BE.$$

$$(3) 20 + 10\sqrt{2}$$

例 2:(1)证明:在等边三角形 ABC 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 60^\circ$.

由旋转可知: $AP = AP'$, $\angle PAP' = 60^\circ$.

$$\therefore \angle PAP' - \angle BAP = \angle BAC - \angle BAP,$$

$$\text{即} \angle BAP' = \angle CAP.$$

在 $\triangle ABP'$ 和 $\triangle ACP$ 中,

$$\begin{cases} AB = AC, \\ \angle BAP' = \angle CAP, \\ AP' = AP, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABP' \cong \triangle ACP (\text{SAS}).$$

$$\therefore BP' = CP.$$

(2) 150

举一反三:(1)证明:∵ $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 都为等边三角形,

$$\therefore \angle BDE = \angle BCF = 60^\circ, BD = BC.$$

$$\because AE + DE = AD = 2, \text{而} AE + CF = 2,$$

$$\therefore DE = CF.$$

$$\therefore \triangle BDE \cong \triangle BCF (\text{SAS}).$$

(2)解: $\triangle BEF$ 是等边三角形.

证明:∵ $\triangle BDE \cong \triangle BCF$,

$$\therefore \angle DBE = \angle CBF, BE = BF.$$

$$\therefore \angle DBC = \angle DBF + \angle CBF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DBF + \angle DBE = 60^\circ, \text{即} \angle EBF = 60^\circ.$$

∴ $\triangle BEF$ 为等边三角形.

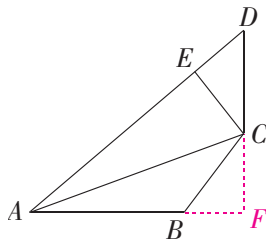
例 3: $\frac{25}{4}$, 10 或 16

举一反三:(1) (3,4), (2,4) 或 (8,4)

(2) 38° , 14° 或 26°

微专题二 与角平分线有关的辅助线作法

1. (1)证明:过点 C 作 $CF \perp AB$, 交 AB 的延长线于点 F .



$$\because CE \perp AD,$$

$$\therefore \angle DEC = \angle CFB = 90^\circ.$$

$$\because \angle D + \angle ABC = 180^\circ, \angle CBF + \angle ABC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle D = \angle CBF.$$

$$\text{在} \triangle CDE \text{ 与} \triangle CBF \text{ 中}, \begin{cases} \angle DEC = \angle CFB, \\ \angle D = \angle CBF, \\ CD = CB, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CDE \cong \triangle CBF (\text{AAS}).$$

$$\therefore CE = CF.$$

$$\therefore AC \text{ 平分} \angle DAB.$$

(2)解:由(1)可得 $BF = DE = 4$.

$$\text{在} \text{Rt} \triangle ACE \text{ 与} \text{Rt} \triangle ACF \text{ 中}, \begin{cases} CE = CF, \\ AC = AC, \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt} \triangle ACE \cong \text{Rt} \triangle ACF (\text{HL}).$$

$$\therefore AE = AF = 10.$$

$$\therefore AB = AF - BF = 6.$$

2. 解:(1)∵ BD 平分 $\angle ABC$,

$$\therefore \angle DBC = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ.$$

$$\because CD \text{ 平分} \angle ACB,$$

$$\therefore \angle DCB = \frac{1}{2} \angle ACB = \frac{1}{2} \times 40^\circ = 20^\circ.$$

$$\therefore \angle BDC = 180^\circ - \angle DBC - \angle DCB = 180^\circ - 30^\circ - 20^\circ = 130^\circ.$$

(2)作 $DF \perp AC$ 于点 F , $DH \perp BC$ 于点 H , 如图 2.

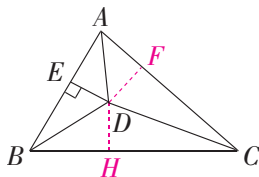


图 2

$$\because BD \text{ 平分} \angle ABC, DE \perp AB, DH \perp BC,$$

$$\therefore DH = DE = 1.$$

$$\because CD \text{ 平分} \angle ACB, DF \perp AC, DH \perp BC,$$

$$\therefore DF = DH = 1.$$

$$\therefore \triangle ADC \text{ 的面积} = \frac{1}{2} DF \cdot AC = \frac{1}{2} \times 1 \times 4 = 2.$$

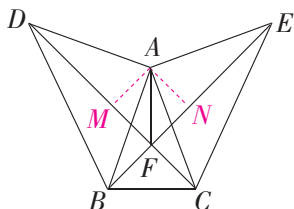
3. (1) 证明: $\because \angle BAD = \angle CAE = 90^\circ$,
 $\therefore \angle BAD + \angle BAC = \angle CAE + \angle BAC$.
 $\therefore \angle DAC = \angle BAE$.

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle AEB$ 中, $\begin{cases} AD = AB, \\ \angle DAC = \angle BAE, \\ AC = AE, \end{cases}$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle AEB$ (SAS).

(2) 解: $\angle AFD = \angle AFE$.

理由是: 过点 A 作 $AM \perp DC$ 于点 M , $AN \perp BE$ 于点 N .



$\therefore \triangle ACD \cong \triangle AEB$,

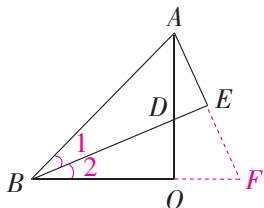
$\therefore S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ABE}$, $DC = BE$.

$\therefore \frac{1}{2} DC \times AM = \frac{1}{2} BE \times AN$.

$\therefore AM = AN$.

$\therefore \angle AFD = \angle AFE$.

4. 证明: 延长 BO , AE , 相交于点 F .



$\because BD$ 平分 $\angle ABO$, $AE \perp BD$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$, $\angle AEB = \angle FEB = 90^\circ$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle FBE$ 中, $\begin{cases} \angle 1 = \angle 2, \\ BE = BE, \\ \angle AEB = \angle FEB, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle FBE$.

$\therefore AE = EF$.

$\because \angle AOB = 90^\circ$, $\angle AED = 90^\circ$, $\angle ADE = \angle BDO$,

$\therefore \angle 2 = \angle OAF$.

$\because \angle AOB = 90^\circ$,

$\therefore \angle DOB = \angle FOA = 90^\circ$.

在 $\triangle OBD$ 和 $\triangle OAF$ 中, $\begin{cases} \angle 2 = \angle FAO, \\ BO = AO, \\ \angle BOD = \angle AOF, \end{cases}$

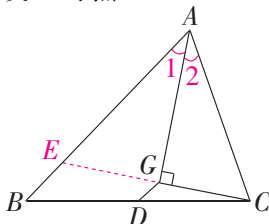
$\therefore \triangle OBD \cong \triangle OAF$.

$\therefore BD = AF$.

$\because AE = EF$,

$\therefore BD = 2AE$.

5. 解: 延长 CG 交 AB 于点 E .



$\because AG$ 平分 $\angle BAC$, $CG \perp AG$ 于点 G ,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$, $\angle AGE = \angle AGC = 90^\circ$.

$\therefore \triangle AEG \cong \triangle ACG$ (ASA).

$\therefore CG = EG$, $AE = AC = 4$.

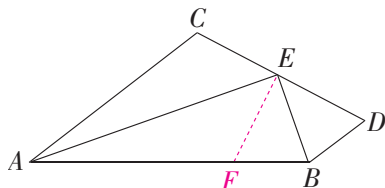
$\therefore BE = AB - AE = 2$.

$\because CG = EG$, D 为 BC 的中点, $\therefore DG = \frac{1}{2} BE = 1$.

6. 解: $AC + BD = AB$.

证明如下:

在 BA 上截取 $BF = BD$, 连接 EF , 如图所示.



$\because AE, BE$ 分别平分 $\angle CAB$ 和 $\angle ABD$,

$\therefore \angle EAF = \angle EAC$, $\angle EBF = \angle EBD$.

在 $\triangle BEF$ 和 $\triangle BED$ 中, $\begin{cases} BF = BD, \\ \angle EBF = \angle EBD, \\ BE = BE, \end{cases}$

$\therefore \triangle BEF \cong \triangle BED$ (SAS). $\therefore \angle BFE = \angle D$.

$\because AC \parallel BD$, $\therefore \angle C + \angle D = 180^\circ$.

$\therefore \angle AFE + \angle BFE = 180^\circ$,

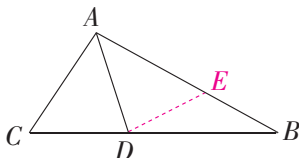
$\therefore \angle AFE + \angle D = 180^\circ$. $\therefore \angle AFE = \angle C$.

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AEC$ 中, $\begin{cases} \angle AFE = \angle C, \\ \angle EAF = \angle EAC, \\ AE = AE, \end{cases}$

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle AEC$ (AAS). $\therefore AF = AC$.

$\therefore AF + BF = AB$, $\therefore AC + BD = AB$.

7. 证明: 在 AB 上截取 $AE = AC$, 连接 DE .



$\therefore AB = AC + CD = AE + EB$,

$\therefore CD = EB$.

$\because AD$ 是 $\angle CAB$ 的平分线,

$\therefore \angle CAD = \angle EAD$.

在 $\triangle CAD$ 和 $\triangle EAD$ 中,

$\begin{cases} AC = AE, \\ \angle CAD = \angle EAD, \\ AD = AD, \end{cases}$

$\therefore \triangle CAD \cong \triangle EAD$ (SAS).

$\therefore \angle C = \angle AED$, $CD = DE = BE$.

$\therefore \angle B = \angle EDB$.

$\therefore \angle AED = \angle B + \angle EDB = 2\angle B$, $\therefore \angle C = 2\angle B$.

20 直角三角形与勾股定理

考点清单

考点一: 1. 互余 2. 一半 3. 一半 4. 30°

5. $a^2 + b^2 = c^2$

体验 1: (1) C (2) B

考点二: 1. 90° 2. $a^2 + b^2 = c^2$

体验 2: B

体验 3: $\frac{100}{13}$

典例剖析

例 1: (1) 25

(2) ①证明: $\because BC = 25 \text{ cm}, CD = 24 \text{ cm}, BD = 7 \text{ cm},$
 $\therefore BC^2 = 25^2 = 625, BD^2 + CD^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576$
 $= 625,$

即 $BC^2 = BD^2 + CD^2.$

$\therefore \triangle BDC$ 为直角三角形.

②解: 设 $AB = x \text{ cm}.$

$\because \triangle ABC$ 是等腰三角形,

$\therefore AB = AC = x \text{ cm}.$

$\because \triangle BDC$ 为直角三角形, $\therefore \triangle ADC$ 为直角三角形.

$\therefore AD^2 + CD^2 = AC^2,$

即 $x^2 = (x - 7)^2 + 24^2.$

解得 $x = \frac{625}{14}.$

故 AB 的长为 $\frac{625}{14} \text{ cm}.$

举一反三: 解: (1) $\triangle ABC$ 为直角三角形. 理由如下:

$\because AC = 6 \text{ cm}, BC = 8 \text{ cm}, AB = 10 \text{ cm},$

$\therefore AC^2 + BC^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2 = AB^2.$

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形, 且 $\angle C = 90^\circ.$

(2) 由折叠可知 $AE = BE.$

设 $AE = BE = x$, 则 $CE = 8 - x.$

在 $\text{Rt} \triangle ACE$ 中, 由勾股定理得

$6^2 + (8 - x)^2 = x^2.$

解得 $x = \frac{25}{4}.$

$\therefore AE$ 的长为 $\frac{25}{4} \text{ cm}.$

例 2: $(\frac{5}{2}, 0), (2, 0)$ 或 $(4, 3)$

举一反三: (1) 3, $\sqrt{10}$ 或 $3\sqrt{10}$

(2) 2 cm, 4 cm 或 10 cm

21 锐角三角函数及其应用

考点清单

考点一: 1. $\frac{a}{c}$ $\frac{b}{c}$ $\frac{a}{b}$ 2. $\angle A$ 的正弦、余弦、正切

体验 1: $\frac{4}{5}$

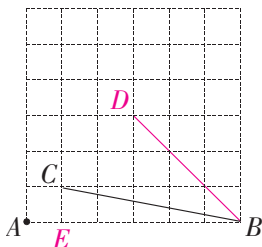
考点二: 2. 增大 减小 0 ~ 1

体验 2: $3\sqrt{2} - 1$

体验 3: (1) D (2) 21

典例剖析

例 1: 解: (1) 如图, 在 $\text{Rt} \triangle BCE$ 中, $\tan \angle ABC = \frac{1}{5}.$



(2) 如图, $\angle CBD$ 即为所求.

举一反三: 解: 如图所示.

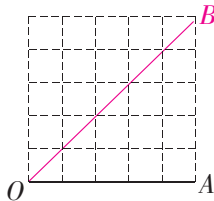


图 1

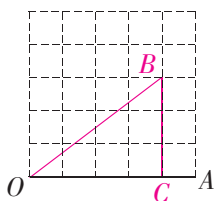


图 2

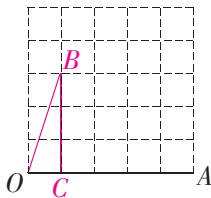


图 3

例 2: 解: (1) 过点 P 作 $PA \perp NQ$ 于点 A , 过点 M 作 $MB \perp PA$ 于点 B .

$\because \sin 37^\circ = \frac{BP}{PM} = \frac{BP}{5}, \therefore \frac{3}{5} \approx \frac{BP}{5}.$

$\therefore BP \approx 3.$

$\therefore PA = PB + AB \approx 3 + 1 = 4 \text{ (m)}.$

$\therefore$ 点 P 离地面的高度约为 4 m.

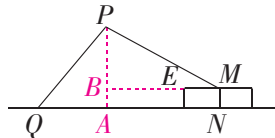


图 2

(2) 在 $\text{Rt} \triangle PBM$ 中, $BM \approx \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$

$\because$ 挖掘机能挖的最远处点 Q 距点 N 7 m,

$\therefore QA \approx 7 - 4 = 3, PA \approx 4.$

$\therefore \tan \angle QPA = \frac{AQ}{AP} \approx \frac{3}{4}.$

$\therefore \angle QPA \approx 37^\circ.$

又 $\angle APM = 90^\circ - \angle PME = 53^\circ,$

$\therefore \angle QPM \approx 53^\circ + 37^\circ = 90^\circ.$

举一反三: 解: (1) $\because A, B$ 两处的水平距离 AE 为 576 m, 索道 AB 与 AF 的夹角为 $15^\circ,$

$\therefore AB = \frac{AE}{\cos 15^\circ} \approx \frac{576}{0.96} = 600 \text{ (m)}.$

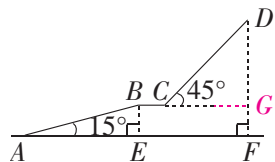


图 2

(2) 延长 BC , 交 DF 于点 G .

$\because AB, CD$ 两段的长度相等, CD 与水平线的夹角为 $45^\circ,$

$\therefore CD \approx 600 \text{ m}, CG = CD \cos 45^\circ \approx 600 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 600 \times \frac{1.41}{2}$

$= 423 \text{ (m)}.$

$\therefore AF = AE + BC + CG \approx 576 + 50 + 423 = 1\,049 \text{ (m)}.$

第五章 四 边 形

22 多边形与平行四边形

考点清单

考点一:1. $(n-2) \cdot 180^\circ$ 360°

$$2. n \cdot \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} \cdot \frac{360^\circ}{n}$$

体验 1:(1)D (2) 18°

考点二:1. 平行 2. (1)平行且相等 (2)相等

(3)互相平分 (4)中心 对称中心

体验 2:B

考点三:1. 平行 2. 平行且相等 3. 相等

4. 互相平分 5. 相等

体验 3:D

典例剖析

例 1:解:(1) $a=10$.

(2)根据题意可得 $\frac{80}{n} = \frac{80+10}{n+10}$, 解得 $n=80$.

经检验, $n=80$ 是所列方程的解, 且符合题意.

一个内角的度数为 $180^\circ - \frac{360^\circ}{80} = 175.5^\circ$.

举一反三:(1)A (2)10

例 2:(1)证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore OA=OC, OB=OD$.

$\because BE=FD$,

$\therefore OB-BE=OD-FD$.

$\therefore OE=OF$.

又 $\because OA=OC$,

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

(2)解: $\because S_{\triangle ABE}=2, BE=EF$,

$\therefore S_{\triangle AEF}=S_{\triangle ABE}=2$.

$\because$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形,

$$\therefore S_{\triangle CFO} = \frac{1}{2} S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \times 2 = 1.$$

举一反三:证明: $\because BE \perp AC, DF \perp AC$,

$\therefore \angle AEB = \angle CFD = 90^\circ$.

$\because AF=CE, AE=AF-EF, CF=CE-EF$,

$\therefore AE=CF$.

又 $\because \angle BAC = \angle DCA$,

$\therefore \triangle AEB \cong \triangle CFD (ASA)$.

$\therefore AB=CD$.

$\because \angle BAC = \angle ACD$,

$\therefore AB \parallel CD$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

23 矩形与菱形

考点清单

考点一:1. 直角 2. (2)直角 (3)相等

(4)轴对称 中心对称 2 对角线的交点

体验 1:B

考点二:1. 直角 2. 直角 3. 相等

体验 2:C

考点三:1. 相等 2. (2)相等 (3)垂直

(4)轴对称 中心对称 2

体验 3:C

考点四:1. 相等 2. 垂直 3. 相等

体验 4:B

典例剖析

例 1:(1)证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AD \parallel BC, AC \perp BD, AD=BC$.

$\because BE=BC, \therefore AD=BE$.

$\therefore$ 四边形 $AEBD$ 是平行四边形.

$\therefore AE \parallel BD. \because BF \parallel AC$,

$\therefore$ 四边形 $AFBO$ 是平行四边形.

$\because AC \perp BD, \therefore \angle AOB = 90^\circ$.

$\therefore$ 平行四边形 $AFBO$ 是矩形.

(2)解:由(1)知四边形 $AFBO$ 是矩形,

$\therefore \angle AFB = 90^\circ, OF=AB$.

$\therefore \angle BFE = 90^\circ$. 又 $\because \angle E = 30^\circ, BF=1$,

$\therefore BE=2BF=2$.

在 $Rt\triangle AEC$ 中, $BE=BC$,

$\therefore AB=BE=2. \therefore OF=2$.

举一反三:证明:(1) $\because AF \parallel BC$,

$\therefore \angle AFE = \angle DCE$.

$\because E$ 为 AD 的中点,

$\therefore AE=DE$.

$\therefore \angle AEF = \angle DEC$,

$\therefore \triangle EAF \cong \triangle EDC (AAS)$.

$\therefore AF=CD. \because CD=BD, \therefore AF=BD$.

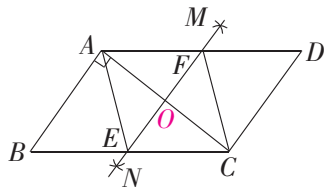
(2) $\because AF \parallel BD, AF=BD$,

$\therefore$ 四边形 $AFBD$ 是平行四边形.

$\because AB=AC, BD=CD, \therefore \angle ADB = 90^\circ$.

$\therefore$ 平行四边形 $AFBD$ 是矩形.

例 2:(1)证明:如图,设 AC 与 MN 的交点为 O ,



根据作图可得 $MN \perp AC$, 且平分 AC .

$\therefore AO=OC$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC. \therefore \angle FAO = \angle OCE$.

又 $\because \angle AOF = \angle COE, AO=CO$,

$\therefore \triangle AOF \cong \triangle COE (ASA)$.

$\therefore AF=EC. \because AF \parallel CE$,

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

$\because MN \perp AC, \therefore$ 四边形 $AECF$ 是菱形.

(2)解: $\because AB \perp AC, MN \perp AC$,

$\therefore EF \parallel AB. \because AD \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是平行四边形.

$\therefore AF=BE. \because AF=EC$,

$$\therefore BE=EC = \frac{1}{2} BC.$$

在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AB=3, AC=4$,

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 5.$$

$$\therefore EC = \frac{1}{2} BC = \frac{5}{2}.$$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是菱形,

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 的周长为 $4EC=10$.

24 正方形

考点清单

考点一:1. 相等 直角

2. (4)轴对称图形 四 中心对称图形 对称中心

体验 1:B

考点二:1. 平行四边形 2. 矩形 3. 矩形 4. 菱形

5. 菱形

体验 2:D

体验 3:(1)B (2)C

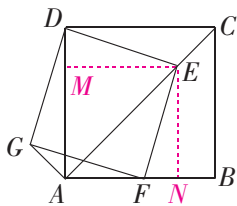
考点四:2. (1)平行四边形 (2)菱形 (3)矩形

(4)正方形

体验 4:矩形

典例剖析

例 1:(1)证明:如图,作 $EM \perp AD$ 于点 M , $EN \perp AB$ 于点 N .



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \angle EAD = \angle EAB$.

$\because EM \perp AD$ 于点 M , $EN \perp AB$ 于点 N ,

$\therefore EM = EN$.

$\because \angle EMA = \angle ENA = \angle DAB = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ANEM$ 是矩形.

$\because EF \perp DE$,

$\therefore \angle MEN = \angle DEF = 90^\circ$.

$\therefore \angle DEM = \angle FEN$.

$\because \angle EMD = \angle ENF = 90^\circ$,

$\therefore \triangle EMD \cong \triangle ENF$ (ASA).

$\therefore ED = EF$.

$\because$ 四边形 $DEFG$ 是矩形,

$\therefore$ 四边形 $DEFG$ 是正方形.

(2)解: $\because$ 四边形 $DEFG$ 是正方形, 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore DG = DE$, $DC = DA = AB = 3\sqrt{2}$, $\angle GDE = \angle ADC = 90^\circ$.

$\therefore \angle ADG = \angle CDE$.

$\therefore \triangle ADG \cong \triangle CDE$ (SAS).

$\therefore AG = CE$.

$\therefore AG + AE = EC + AE = AC = \sqrt{2}AB = 6$.

举一反三:(1)证明: $\because DE \perp AB$, $DF \perp AC$,

$\therefore \angle AED = \angle F = 90^\circ$.

$\because \angle A = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $AEDF$ 是矩形.

$\because \angle CDF + \angle CDE = \angle CDE + \angle BDE = 90^\circ$,

$\therefore \angle CDF = \angle BDE$.

在 $\triangle BDE$ 和 $\triangle CDF$ 中,

$\begin{cases} \angle BED = \angle F = 90^\circ, \\ \angle BDE = \angle CDF, \\ BD = CD, \end{cases}$

$\therefore \triangle BDE \cong \triangle CDF$ (AAS). $\therefore DE = DF$.

$\therefore$ 四边形 $AEDF$ 是正方形.

(2)解:正方形 $AEDF$ 的边长是 $2\sqrt{3} + 2$.

例 2:(1)证明: $\because E, G$ 分别是 AD, BD 的中点,

$\therefore EG$ 是 $\triangle DAB$ 的中位线.

$\therefore EG = \frac{1}{2}AB$, $EG \parallel AB$.

同理可得 $FH = \frac{1}{2}AB$, $FH \parallel AB$.

$\therefore EG = FH$, $EG \parallel FH$.

$\therefore$ 四边形 $EGFH$ 是平行四边形.

(2)解:①: $\because F, G$ 分别是 BC, BD 的中点,

$\therefore FG$ 是 $\triangle DCB$ 的中位线.

$\therefore FG = \frac{1}{2}CD$, $FG \parallel CD$.

当 $AB = CD$ 时, $EG = FG$,

$\therefore$ 四边形 $EGFH$ 是菱形.

故答案为: $AB = CD$; 一组邻边相等的平行四边形是菱形.

② $AB \perp CD$.

证明: $\because HF \parallel AB$,

$\therefore \angle HFC = \angle ABC$.

$\because FG \parallel CD$, $\therefore \angle GFB = \angle DCB$.

$\because AB \perp CD$,

$\therefore \angle ABC + \angle DCB = 90^\circ$.

$\therefore \angle HFC + \angle GFB = 90^\circ$.

$\therefore \angle GFH = 90^\circ$.

$\therefore$ 平行四边形 $EGFH$ 是矩形.

举一反三:解:依题意有

第一次:余下纸片的面积 $S_1 = \frac{1}{2}$,

第二次:余下纸片的面积 $S_2 = \frac{1}{2^2}$,

第三次:余下纸片的面积 $S_3 = \frac{1}{2^3}$,

……

当完成第 2 023 次操作时, 余下纸片的面积为 $S_{2\ 023}$

$= \frac{1}{2^{2\ 023}}$.

第六章 图形变换

25 图形的轴对称与中心对称

考点清单

体验 1:(2, -3)

考点二:1. (1)轴对称图形 对称轴

(2)对称轴 对称点

易错警示:①一条直线 ②全等

2. (1)180° 中心对称 对称中心 (2)180°

体验 2:C

考点三:1. (1)垂直平分 (2)对称轴 (3)相等

2. (1)对称中心 (2)相等

体验 3:A

考点四:(1)轴对称 (2)全等 (3)折痕

典例剖析

例 1:A

举一反三:B

例 2:解:(1) $\triangle A'B'C'$ 和 $\triangle MNB'$ 如图所示.

27 图形的相似与位似

考点清单

考点一: 1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 2. (1) bc (2) $\frac{c \pm d}{d}$ (3) $\frac{a}{b}$

4. (1) $\frac{DE}{EF} = \frac{DE}{DF}$

体验 1: $(80\sqrt{5} - 160)$

考点二: (1) 相等 成比例
(2) 相似比 相似比的平方

体验 2: C

考点三: 1. 相等 成比例

2. (2) 相等 (3) 比例 相等 (4) 比例

3. (1) 相等 (2) 相似比 (3) 相似比 相似比的平方

体验 3: C

考点四: 1. 位似中心 2. (4) $(-kx, -ky)$ 或 (kx, ky)

4. (1) 中心 (2) 位似中心

体验 4: B

典例剖析

例 1: (1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形,

$\therefore \angle ACD = \angle BCA$.

$\because \angle ACD = \angle ABE, \therefore \angle BCA = \angle ABE$.

$\therefore \angle BAC = \angle EAB, \therefore \triangle ABC \sim \triangle AEB$.

(2) 解: $\because \triangle ABC \sim \triangle AEB, \therefore \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AB}$.

$\because AB = 6, AC = 4,$

$\therefore \frac{6}{AE} = \frac{4}{6}, \therefore AE = \frac{36}{4} = 9$.

举一反三: (1) 解: $\because AE = 3, AC = 12,$

$\therefore CE = AC - AE = 12 - 3 = 9$.

$\because AB \parallel CD, \therefore \angle A = \angle ECD, \angle ABE = \angle D$.

$\therefore \triangle CDE \sim \triangle ABE$.

$\therefore \frac{CD}{AB} = \frac{CE}{AE}, \therefore CD = \frac{AB \cdot CE}{AE} = \frac{6 \times 9}{3} = 18$.

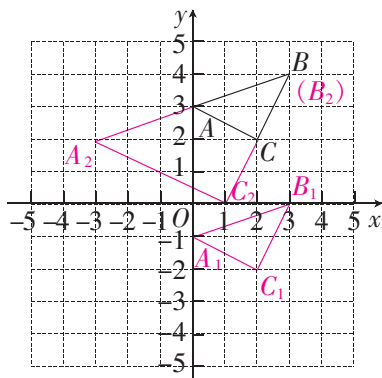
(2) 证明: $\because \frac{AE}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \frac{AB}{AC} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2},$

$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AC}$.

$\because \angle A = \angle A,$

$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ACB$.

例 2: 解: (1) 如图, $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求;

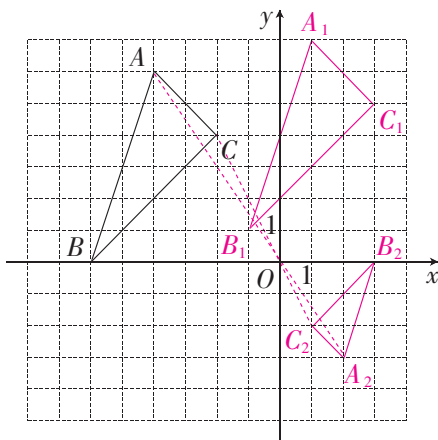


(2) 如图, $\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求;

(3) 点 M 的对应点 M_2 的坐标为 $(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}b)$ 或 $(-\frac{3}{2}a,$

$-\frac{3}{2}b)$.

举一反三: 解: (1) 如图, $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求;



(2) 如图, $\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求. $\triangle A_2B_2C_2$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比为 1:4.

微专题三 全等(相似)三角形常见的 基本图形(一)

1. 解: 由题意得 $CD \perp BD, AB \perp BD$.

$\therefore \angle CDP = \angle PBA = 90^\circ$.

$\because \angle DPC = 17^\circ,$

$\therefore \angle DCP = 90^\circ - \angle DPC = 73^\circ$.

$\therefore \angle APB = 73^\circ, \therefore \angle PCD = \angle APB$.

在 $\triangle CPD$ 和 $\triangle PAB$ 中, $\begin{cases} \angle CDP = \angle PBA, \\ DC = BP, \\ \angle PCD = \angle APB, \end{cases}$

$\therefore \triangle CPD \cong \triangle PAB (ASA)$.

$\therefore PD = AB$.

$\because DB = 33 \text{ m}, BP = 8 \text{ m},$

$\therefore AB = PD = DB - BP = 33 - 8 = 25 (\text{m}).$

$\therefore$ 楼 AB 的高度是 25 m.

2. (1) 证明: $\because$ 等边 $\triangle ABC,$

$\therefore \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$.

$\because$ 将 $\triangle AEF$ 沿 EF 折叠, 点 A 落在 BC 边上的点 D 处,

$\therefore \angle EDF = \angle A = 60^\circ$.

$\because \angle BED + \angle BDE = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$

$\angle BDE + \angle CDF = 180^\circ - \angle EDF = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$

$\therefore \angle BED = \angle CDF$.

又 $\because \angle B = \angle C,$

$\therefore \triangle BED \sim \triangle CDF$.

(2) 解: $\because CD = 2BD,$

$\therefore$ 设 $BD = a$, 则 $CD = 2a$.

设 $ED = AE = x, DF = AF = y$.

$\therefore AB = BC = AC = 3a, BE = 3a - x, CF = 3a - y$.

$\because \triangle BED \sim \triangle CDF,$

$\therefore \frac{ED}{DF} = \frac{BD}{CF} = \frac{BE}{DC}$.

$\therefore \frac{x}{y} = \frac{a}{3a - y} = \frac{3a - x}{2a}$.

解得 $x = \frac{7}{5}a, y = \frac{7}{4}a$.

$\therefore \frac{x}{y} = \frac{4}{5}$.

$$\therefore \frac{ED}{DF} = \frac{4}{5}.$$

3. 解: $\because \angle A = \angle D = 120^\circ, \angle BEF = 120^\circ,$
 $\therefore \angle AEB + \angle DEF = \angle DEF + \angle DFE = 60^\circ.$
 $\therefore \angle AEB = \angle DFE.$
 $\therefore \triangle ABE \sim \triangle DEF. \therefore \frac{AE}{AB} = \frac{DF}{DE}.$
 $\because AB = 6, AD = 4, AE = x, DF = y, \therefore \frac{x}{6} = \frac{y}{4-x}.$

$$\therefore y = \frac{1}{6}x(4-x),$$

$$\text{即 } y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x (0 < x < 4).$$

4. 解:【探究】 $\because \angle DPB$ 是 $\triangle APD$ 的外角,
 $\therefore \angle DPB = \angle A + \angle PDA$, 即 $\angle DPC + \angle CPB = \angle A + \angle PDA.$
 $\therefore \angle A = \angle DPC, \therefore \angle PDA = \angle CPB.$
 又 $\because \angle A = \angle B, \therefore \triangle DAP \sim \triangle PBC. \therefore \frac{PD}{PC} = \frac{AP}{BC}.$
 $\because PD = 4, PC = 8, BC = 6, \therefore \frac{4}{8} = \frac{AP}{6}.$

解得 $AP = 3$.

- 【拓展】 $\because AC = BC, \therefore \angle A = \angle B.$
 $\because \angle CPB$ 是 $\triangle APC$ 的外角, $\therefore \angle CPB = \angle A + \angle PCA,$
 即 $\angle CPE + \angle EPB = \angle A + \angle PCA.$
 $\therefore \angle A = \angle CPE, \therefore \angle ACP = \angle BPE.$
 $\therefore \angle A = \angle B, \therefore \triangle ACP \sim \triangle BPE.$
 当 $CP = CE$ 时, $\angle CPE = \angle CEP.$
 $\therefore \angle CEP > \angle B, \angle CPE = \angle A = \angle B,$
 $\therefore CP = CE$ 不成立.
 当 $PC = PE$ 时, $\triangle ACP \cong \triangle BPE$, 则 $PB = AC = 8.$
 $\therefore AP = AB - PB = 12 - 8 = 4.$
 当 $EC = EP$ 时, $\angle CPE = \angle ECP.$
 $\therefore \angle B = \angle CPE, \therefore \angle ECP = \angle B. \therefore PC = PB.$
 $\therefore \triangle ACP \sim \triangle BPE, \therefore \frac{AC}{BP} = \frac{AP}{BE} = \frac{PC}{EP},$ 即 $\frac{8}{PB} = \frac{12 - PB}{BE}.$
 $= \frac{PB}{8 - BE},$ 解得 $PB = \frac{16}{3}.$
 $\therefore AP = AB - PB = 12 - \frac{16}{3} = \frac{20}{3}.$

综上所述, 当 $\triangle CPE$ 是等腰三角形时, AP 的长为 4 或 $\frac{20}{3}$.

微专题四 全等(相似)三角形常见的基本图形(二)

1. C

2. (1) 解: $\triangle AEG$ 是等边三角形. 理由如下:

- $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,
 $\therefore \angle BAC = \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ.$
 $\therefore EG \parallel BC,$
 $\therefore \angle AEG = \angle ABC = 60^\circ.$
 $\therefore \triangle AEG$ 是等边三角形.
 (2) 证明: $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle EFC$ 都是等边三角形,
 $\therefore AC = BC, CE = CF, \angle ACB = \angle ECF = 60^\circ.$
 $\therefore \angle ACB - \angle BCE = \angle ECF - \angle BCE$, 即 $\angle ACE = \angle BCF.$

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BCF$ 中, $\begin{cases} AC = BC, \\ \angle ACE = \angle BCF, \\ CE = CF, \end{cases}$

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BCF (SAS).$

$\therefore \angle CBF = \angle CAE = 60^\circ.$

$\therefore \angle CBF = \angle ACB.$

$\therefore BF \parallel AC.$

(3) 证明: 由(2)知, $BF \parallel AC, \triangle ACE \cong \triangle BCF,$

$\therefore \angle DAE = \angle EBF = 120^\circ, AE = BF.$

$\therefore ED = EC,$

$\therefore \angle D = \angle ACE.$

由(2)已证: $\angle ACE = \angle BCF, \therefore \angle D = \angle BCF.$

$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle EFC$ 都是等边三角形,

$\therefore \angle ABC = \angle EFC = 60^\circ.$

在 $\triangle BEF$ 中, $\angle BEF = 180^\circ - \angle EBC - \angle CBF - \angle BFE = 120^\circ - \angle CBF - \angle BFE,$

在 $\triangle BCF$ 中, $\angle BCF = 180^\circ - \angle EFC - \angle CBF - \angle BFE = 120^\circ - \angle CBF - \angle BFE,$

$\therefore \angle BEF = \angle BCF = \angle D.$

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle BEF$ 中, $\begin{cases} \angle D = \angle BEF, \\ \angle DAE = \angle EBF, \\ AE = BF, \end{cases}$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BEF (AAS).$

$\therefore AD = BE. \therefore AB = BE + AE = AD + BF.$

3. (1) $EC = AD, EC \perp AD$

(2) 解: 设 DE 与 AB 的交点为 H .

$\therefore DE \parallel BC,$

$\therefore \angle AHE = \angle ABC = 90^\circ.$

$\therefore BD = BE,$

$\therefore AB$ 是 DE 的垂直平分线.

$\therefore AD = AE.$

由(1)知 $AD = CE,$

$\therefore AE = CE. \therefore \triangle ACE$ 是等腰

三角形.

$\because BE = \sqrt{2}, \therefore BH = HE = 1.$

$\therefore AH = AB - BH = 4 - 1 = 3.$

在 $\text{Rt} \triangle AHE$ 中, 由勾股定理得:

$$AE = \sqrt{AH^2 + HE^2} = \sqrt{10}.$$

$\therefore CE = AE = \sqrt{10}.$

(3) 解: EC 的长为 $\sqrt{15} + 1$ 或 $\sqrt{15} - 1$.

提示: 如答图 1, 当点 E 在 BC 上方时.

过点 B 作 $BG \perp DE$ 于点 G .

易得 $CE = AD = AG + DG = \sqrt{15} + 1.$

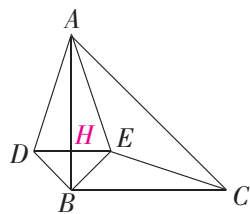
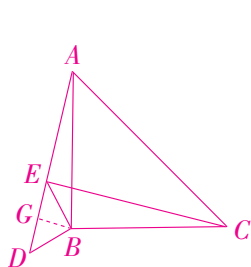
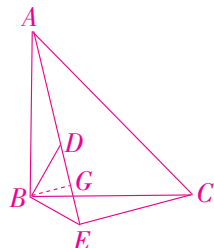


图 3



答图 1



答图 2

如答图 2, 当点 E 在 BC 下方时, 同理可得 $CE = AD = AG - DG = \sqrt{15} - 1.$

4. D

5. 解: (1) $\frac{6}{5}$

(2) (1) 中的结论仍然成立. 理由如下:

由旋转的性质得 $\angle ADE = \angle ABC$, $\angle AED = \angle ACB$.

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC. \therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

在图 2 中, 由旋转的性质可得 $\angle BAC = \angle DAE$,

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE. \therefore \triangle BAD \sim \triangle CAE.$$

$$\therefore \frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{5}.$$

(3) 解: $\angle APE = \angle ABC$. 理由如下:

由 (2) 得 $\triangle BAD \sim \triangle CAE$, $\therefore \angle ABD = \angle ACE$.

又 $\angle AFB = \angle PFC$, $\therefore \triangle AFB \sim \triangle PFC$.

$$\therefore \frac{AF}{PF} = \frac{BF}{CF}, \angle BAC = \angle BPC. \therefore \frac{AF}{BF} = \frac{PF}{CF}$$

又 $\angle AFP = \angle BFC$, $\therefore \triangle AFP \sim \triangle BFC$.

$$\therefore \angle CBF = \angle PAF.$$

$$\therefore \angle APE = \angle ACE + \angle PAF, \angle ABC = \angle ABF + \angle CBF, \therefore \angle APE = \angle ABC.$$

6. 证明: (1) $\because$ 正方形 $ABCD$ 和正方形 $CEFG$,

$$\therefore BC = CD = a, CE = CG = b, \angle BCD = \angle ECG = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle BCD + \angle DCE = \angle ECG + \angle DCE,$$

$$\text{即 } \angle BCE = \angle DCG.$$

$$\therefore \triangle BCE \cong \triangle DCG (\text{SAS}).$$

$$\therefore BE = DG.$$

(2) 由 (1) 知 $\angle CBE = \angle CDG$.

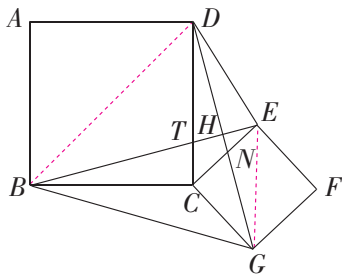
$$\therefore \angle CBE + \angle BTC = 90^\circ, \angle BTC = \angle DTE,$$

$$\therefore \angle CDG + \angle DTE = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle DHT = 90^\circ.$$

$$\therefore BE \perp DG.$$

(3) 连接 BD, EG .



$$\text{在 Rt} \triangle DEH \text{ 中, } DE^2 = DH^2 + EH^2.$$

$$\text{在 Rt} \triangle BGH \text{ 中, } BG^2 = BH^2 + GH^2.$$

$$\text{在 Rt} \triangle BDH \text{ 中, } BH^2 + DH^2 = BD^2.$$

$$\text{在 Rt} \triangle EHG \text{ 中, } EH^2 + GH^2 = EG^2.$$

$$\therefore DE^2 + BG^2 = DH^2 + EH^2 + BH^2 + GH^2 = BD^2 + EG^2.$$

$$\text{在 Rt} \triangle BCD \text{ 中, } BD^2 = BC^2 + CD^2 = 2a^2,$$

$$\text{在 Rt} \triangle CEG \text{ 中, } EG^2 = CE^2 + CG^2 = 2b^2,$$

$$\therefore DE^2 + BG^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

微专题五 全等(相似)三角形常见的 基本图形(三)

1. 45°

2. (1) 证明: $\because$ 将 $\triangle DAE$ 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle DCM$,

$$\therefore DE = DM,$$

$$\angle EDM = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle EDF + \angle FDM = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle EDF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle FDM = \frac{1}{2} \angle EDM = 45^\circ.$$

$$\therefore DF = DF,$$

$$\therefore \triangle DEF \cong \triangle DMF.$$

$$\therefore EF = MF.$$

(2) 解: 设 $EF = x$.

$$\therefore AE = CM = 1,$$

$$\therefore BF = BM - MF = BM - EF = 4 - x.$$

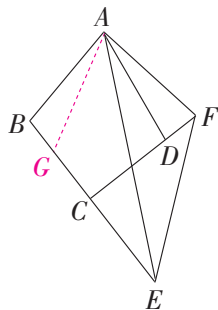
$$\therefore EB = 2,$$

在 $\text{Rt} \triangle EBF$ 中, 由勾股定理得 $EB^2 + BF^2 = EF^2$,
即 $2^2 + (4 - x)^2 = x^2$.

$$\text{解得 } x = \frac{5}{2}.$$

$$\therefore EF \text{ 的长为 } \frac{5}{2}.$$

3. 证明: 在 BE 上截取 BG , 使 $BG = DF$, 连接 AG .



$$\therefore \angle B + \angle ADC = 180^\circ, \angle ADF + \angle ADC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle ADF.$$

在 $\triangle ABG$ 和 $\triangle ADF$ 中,

$$\begin{cases} AB = AD, \\ \angle B = \angle ADF, \\ BG = DF, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABG \cong \triangle ADF (\text{SAS}).$$

$$\therefore \angle BAG = \angle DAF, AG = AF.$$

$$\therefore \angle BAG + \angle EAD = \angle DAF + \angle EAD = \angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD.$$

$$\therefore \angle GAE = \angle EAF.$$

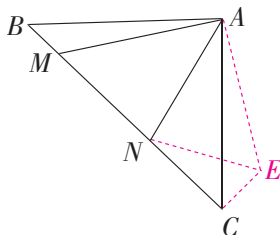
$$\text{在 } \triangle AEG \text{ 和 } \triangle AEF \text{ 中, } \begin{cases} AG = AF, \\ \angle GAE = \angle EAF, \\ AE = AE, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEG \cong \triangle AEF (\text{SAS}). \therefore EG = EF.$$

$$\therefore EG = BE - BG,$$

$$\therefore EF = BE - FD.$$

4. 解: 如图, 过点 C 作 $CE \perp BC$, 垂足为 C , 截取 $CE = BM$, 连接 AE, EN .



$$\therefore AB = AC, \angle BAC = 90^\circ,$$

30 与圆有关的位置关系

考点清单

考点一: 1. 内 $d=r$ 外 $2. d=r$

体验 1: (1) C (2) 5

考点二: 1. (2) 半径 (3) 切点

2. (2) 半径 (3) 垂直于

体验 2: (1) B (2) 2 或 10

考点三: 2. 两 相等 平分

体验 3: (1) B (2) 40° (3) 1 2.5

典例剖析

例 1: C

举一反三: A

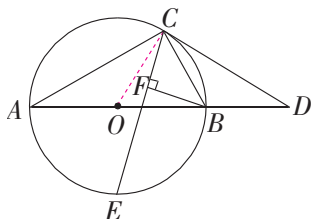
例 2: (1) 证明: 连接 OC .

$\because CD$ 与 $\odot O$ 相切于点 $C, \therefore \angle OCD = 90^\circ$.

$\because \angle D = 30^\circ, \therefore \angle COD = 90^\circ - \angle D = 60^\circ$.

$\therefore \angle A = \frac{1}{2} \angle COD = 30^\circ, \therefore \angle A = \angle D = 30^\circ$.

$\therefore CA = CD$.



(2) 解: $\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle ACB = 90^\circ$.

$\because \angle A = 30^\circ, AB = 12, \therefore BC = \frac{1}{2} AB = 6$.

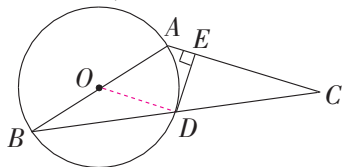
$\because CE$ 平分 $\angle ACB, \therefore \angle BCE = \frac{1}{2} \angle ACB = 45^\circ$.

$\because BF \perp CE, \therefore \angle BFC = 90^\circ$.

$\therefore BF = BC \cdot \sin 45^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.

$\therefore$ 线段 BF 的长为 $3\sqrt{2}$.

举一反三: 证明: 如图, 连接 OD .



$\because$ 以 AB 为直径的 $\odot O$ 交 BC 于点 D, DE 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore OD \perp DE$.

$\because DE \perp AC,$

$\therefore OD \parallel AC$.

$\therefore \angle C = \angle ODB$.

又 $\because OB = OD,$

$\therefore \angle B = \angle ODB$.

$\therefore \angle C = \angle B$.

$\therefore AB = AC$.

例 3: (1) 证明: 连接 OC .

$\because C$ 为 $\widehat{BD}$ 的中点,

$\therefore \widehat{CD} = \widehat{BC}, \therefore \angle 1 = \angle 2$.

又 $\because OA = OC,$

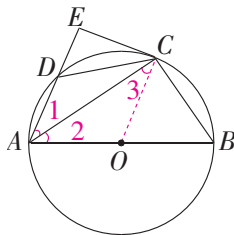
$\therefore \angle 2 = \angle 3$.

$\therefore \angle 1 = \angle 3, \therefore AE \parallel OC$.

又 $\because CE \perp AE,$

$\therefore CE \perp OC$. 又 $\because OC$ 为半径,

$\therefore CE$ 为 $\odot O$ 的切线.



(2) 解: $\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$.

$\because BC = 6, AC = 8,$

$\therefore AB = 10$.

又 $\because \angle 1 = \angle 2, \angle AEC = \angle ACB = 90^\circ,$

$\therefore \triangle AEC \sim \triangle ACB$.

$\therefore \frac{EC}{CB} = \frac{AC}{AB}$, 即 $\frac{EC}{6} = \frac{8}{10}$.

$\therefore EC = \frac{24}{5}$.

$\because \widehat{CD} = \widehat{CB},$

$\therefore CD = BC = 6$.

在 $Rt\triangle DEC$ 中, 由勾股定理得

$DE = \sqrt{CD^2 - CE^2} = \sqrt{6^2 - (\frac{24}{5})^2} = \frac{18}{5}$.

31 圆的有关计算

考点清单

考点一: $2\pi r$ $\frac{n\pi r}{180}$ πr^2 $\frac{n\pi r^2}{360}$

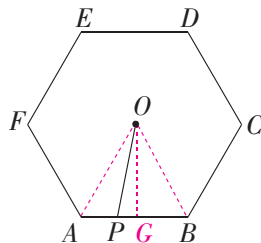
体验 1: 10π

体验 2: D

体验 3: $\frac{9\pi}{2}$

典例剖析

例 1: 解: 过点 O 作 $OG \perp AB$ 于点 G , 连接 OA, OB , 如图所示.



$\because$ 六边形 $ABCDEF$ 是正六边形,

$\therefore \angle AOB = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ, OA = OB$.

$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形.

$\therefore AB = OA = OB = 6$.

$\therefore AG = BG = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 6 = 3$.

$\therefore OG = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$.

$$\therefore AP:BP=1:2,$$

$$\therefore AP=2.$$

$$\therefore PG=1.$$

$$\therefore OP = \sqrt{OG^2 + PG^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2\sqrt{7}.$$

举一反三:A

例2:A

例3:(1)证明: $\because \widehat{AD} = \widehat{AD}$,

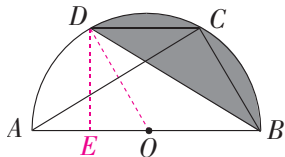
$$\therefore \angle ACD = \angle DBA.$$

$$\text{又} \because \angle CAB = \angle DBA,$$

$$\therefore \angle CAB = \angle ACD.$$

$$\therefore CD \parallel AB.$$

(2)解:如图,连接OD,过点D作DE⊥AB,垂足为E.



$$\because \angle ACD = 30^\circ, \therefore \angle AOD = 60^\circ.$$

$$\therefore \angle BOD = 180^\circ - \angle AOD = 120^\circ.$$

$$\because AB = 4,$$

$$\therefore S_{\text{扇形}BOD} = \frac{n\pi r^2}{360} = \frac{120 \times \pi \times 2^2}{360} = \frac{4}{3}\pi.$$

在Rt△ODE中,

$$\therefore DE = OD \cdot \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle BOD} = \frac{1}{2} OB \cdot DE = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形}BOD} - S_{\triangle BOD} = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}.$$

故阴影部分的面积为 $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$.

微专题六 隐圆问题

1. 解:如图,以D为圆心,DC长为半径作圆.

$$\because DF = DC,$$

$\therefore$ 点F在⊙D的一段弧上运

动,连接BD,交⊙D于点F,

此时BF最小.

$$\because \angle C = 90^\circ, AC = 8, AB = 10,$$

$$CD = 2,$$

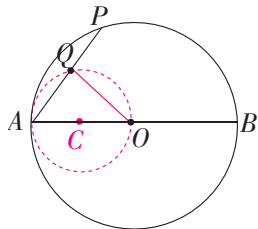
$$\therefore BC = 6.$$

$$\therefore BD = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}.$$

$$\therefore BF = BD - DF = 2\sqrt{10} - 2.$$

$$\therefore BF \text{ 的最小值为 } 2\sqrt{10} - 2.$$

2. 解:连接OQ.



在⊙O中, $\because AQ = PQ, OQ$ 经过圆心O,

$$\therefore OQ \perp AP.$$

$$\therefore \angle AQO = 90^\circ.$$

$\therefore$ 点Q在以OA为直径的⊙C上.

$\therefore$ 当点P在⊙O上运动一周时,点Q在⊙C上运动一周.

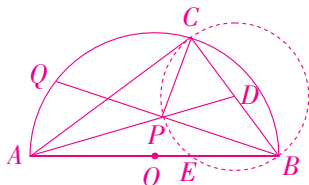
$$\therefore AB = 4,$$

$$\therefore OA = 2.$$

$$\therefore \odot C \text{ 的周长为 } 2\pi.$$

$$\therefore \text{点Q经过的路径长为 } 2\pi.$$

3. 解:如图.



$$\because CP \perp BQ,$$

$$\therefore \angle CPB = 90^\circ.$$

$\therefore$ 点Q是劣弧AC上的一个动点,

$\therefore$ 点P在以CB为直径的⊙D的圆弧上.

连接AD交⊙D于点P,此时线段AP最短.

$$\because \text{弦} BC = 10, \text{半径} OA = \sqrt{61},$$

$$\therefore \text{直径} AB = 2\sqrt{61}, CD = DP = 5.$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(2\sqrt{61})^2 - 10^2} = 12.$$

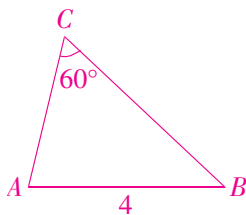
在Rt△ACD中,

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13.$$

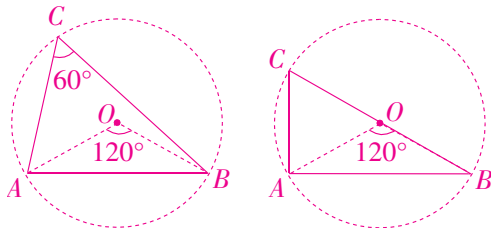
$$\therefore AP = AD - DP = 8.$$

$\therefore$ 线段AP的最小值为8.

4. 解:根据题意作图如下.



因为AB是定值, $\angle C = 60^\circ$,即定边对定角,故点C的轨迹是以点O为圆心的一段圆弧(作AO=BO且 $\angle AOB = 120^\circ$). 题意要求 $\angle A > \angle B$,即 $BC > AC$,故点C的轨迹如下图.



当BC为直径时,BC取到最大值,为 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$;考虑 $\angle A$ 为△ABC中的最大角,故BC为最长边, $BC > AB = 4$,无最小值.

$$\therefore 4 < BC \leq \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

5. (1) ① 20°

②解: $\angle E = \frac{1}{2} \angle A$. 理由如下:

$\because \angle E$ 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 的遥望角,

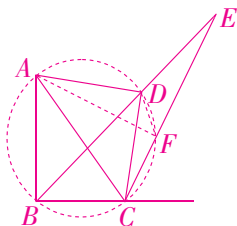
$\therefore \angle EBC = \frac{1}{2} \angle ABC, \angle ECD = \frac{1}{2} \angle ACD$.

$\therefore \angle E = \angle ECD - \angle EBD = \frac{1}{2} (\angle ACD - \angle ABC) = \frac{1}{2} \angle A$.

(2) 证明: $\because \angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$,

$\therefore A, B, C, D$ 四点共圆.

作四边形 $ABCD$ 的外接圆, 交 CE 于点 F , 连接 AF, DF .



$\because$ 四边形 $BCFD$ 内接于 $\odot O$,

$\therefore \angle DFC + \angle DBC = 180^\circ$.

$\because \angle DFC + \angle DFE = 180^\circ, \therefore \angle DFE = \angle DBC$.

$\because BD$ 平分 $\angle ABC, \therefore \angle ABD = \angle DBC$.

$\because \angle ABD = \angle AFD, \therefore \angle AFD = \angle DFE$.

$\because \angle BEC$ 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle BAC$ 的遥望角,

由(1)得 $\angle E = \frac{1}{2} \angle BAC$.

$\because \angle BAC = \angle BDC$,

$\therefore \angle E = \frac{1}{2} \angle BDC$.

$\because \angle E + \angle DCE = \angle BDC$,

$\therefore \angle E = \angle DCE$.

$\because \angle DCE = \angle DAF, \therefore \angle E = \angle DAF$.

$\because DF = DF, \angle AFD = \angle DFE$,

$\therefore \triangle DAF \cong \triangle DEF (AAS), \therefore DA = DE$.

第八章 统计与概率

32 数据的收集、整理与描述

考点清单

考点一: 1. (1) 全面调查 (2) 抽样调查

体验 1: A

考点二: 1. 全体 每一个 个体 一部分个体

体验 2: (1) D (2) 2 250

考点三: 百分比 样本容量

特别提醒: 条形 扇形 折线

体验 3: (1) B (2) C

典例剖析

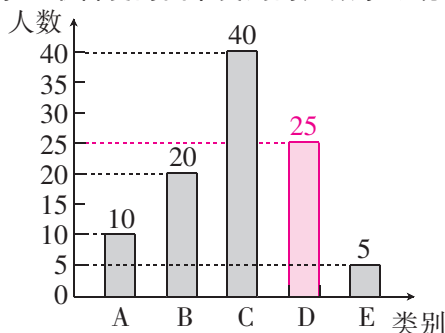
例 1: A

举一反三: B

例 2: 解: (1) 100

(2) D 类的人数为 $100 - 10 - 20 - 40 - 5 = 25$, 补全条形统计图如图所示.

学生最喜爱的图书类别的人数条形统计图



(3) 36

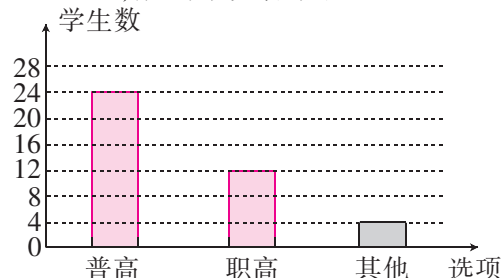
(4) $1\ 800 \times \frac{40}{100} \times 100\% = 720$.

因此, 估计该校 1 800 名学生中, 有 720 名学生最喜爱 C “科普类”图书.

举一反三: 解: (1) 40

(2) 108°

(3) “普高”学生数为 $60\% \times 40 = 24$, “职高”学生数为 $30\% \times 40 = 12$, 补全条形统计图如图.



(4) 该校九年级学生中, 升学意向是职高的学生估计有 $400 \times 30\% = 120$ (名).

因此, 估计该校九年级学生中共有 120 名学生的升学意向是职高.

33 数据的分析(1)

考点清单

考点一: 2. $\frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_k f_k}{n}$

体验 1: 93

考点二: 最多

体验 2: D

考点三: 从小到大 从大到小 最中间位置 平均数

体验 3: (1) A (2) 7.5 7.5

体验 4: C

典例剖析

例 1: 解: (1) 300 0.02

(2) 由(1)知收集到的第一组数据数为 300, 收集到的第二组数据数为 $168 + 9 + 16 + 6 + 1 = 200$.

$\therefore$ 参与调查的总人数为 $300 + 200 = 500$ (人).

$\therefore$ “双减”后报班数为 3 的学生人数所占的百分比为 $\frac{6+6}{500} \times 100\% = 2.4\%$.

(3) ① 1 0

② 分析 1: “双减”后参加校外学科补习班的人数明显下降, “双减”取得了显著效果.

分析 2:“双减”后参加校外学科补习班的现象仍然存在,但比“双减”前明显减少.

分析 3:“双减”后不报班的人数明显增加.

例 2:解:(1)144°

(2)如图所示.

乙校成绩条形统计图

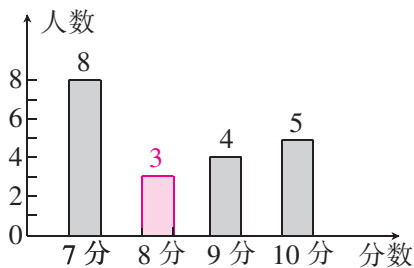


图 2

(3)甲校学生成绩的平均数 = $\frac{1}{20}(7 \times 11 + 8 \times 0 + 9 \times 1 + 10 \times 8) = 8.3$ (分),

将分数从低到高排列,第 10 人与第 11 人的成绩都是 7 分, $\therefore$ 中位数 = $\frac{1}{2}(7 + 7) = 7$ (分).

由于两校成绩的平均数相等,乙校成绩的中位数大于甲校的中位数, $\therefore$ 从平均数和中位数角度上判断,乙校的成绩较好.

(4)由于要组织 8 人的代表队参加市级团体赛,为便于管理,根据表格和条形统计图发现甲校正正好有 8 名得 10 分的,乙校有 5 名得 10 分的,故会选择甲校.

34 数据的分析(2)

考点清单

考点一:1. 最大数据 最小数据

$$2. \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]$$

$$3. \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]}$$

体验 1:(1)B (2)甲

考点二:1. 频数 频率 1

3. ①差 ②组数 组距 ④列频数分布表

体验 2:C

典例剖析

例 1:解:(1) $m = 166, n = 165$.

(2)甲组

$$(3) \because 168, 168, 172 \text{ 的平均数为 } \frac{1}{3}(168 + 168 + 172) = 169 \frac{1}{3},$$

且所选的两名学生与已确定的三名学生所组成的五名学生的身高的方差要小于 $\frac{32}{9}$,

$\therefore$ 数据的差别较小,可供选择的有 170, 172.

$$\text{平均数为: } \frac{1}{5}(168 + 168 + 170 + 172 + 172) = 170,$$

$$\text{方差为: } \frac{1}{5}[(168 - 170)^2 + (168 - 170)^2 + (170 -$$

$$170)^2 + (172 - 170)^2 + (172 - 170)^2] = 3.2 < \frac{32}{9},$$

选出的另外两名学生的身高分别为 170 cm 和 172 cm. 故答案为:170 cm, 172 cm.

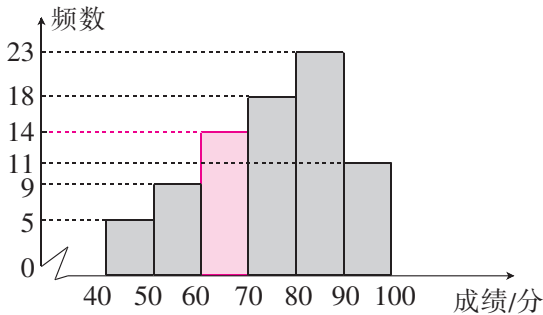
举一反三:解:(1)若该校八年级共有 300 名学生参赛,估计优秀等次的有 $300 \times \frac{6}{20} = 90$ (人),

故答案为 90.

(2)八年级成绩较好. 理由如下:

因为七、八年级的平均数相等,而八年级的众数和中位数都大于七年级的众数和中位数,所以八年级得分高的人数较多,即八年级成绩较好(答案不唯一,合理即可).

例 2:解:(1)第三组的频数为 $80 - 5 - 9 - 18 - 23 - 11 = 14$, 补全频数分布直方图如图.



$$(2) \text{ 七年级的中位数 } m = \frac{77 + 78}{2} = 77.5.$$

(3)小颖的想法不正确.

理由:76 分虽然高于本年级测试成绩的平均数,但低于中位数,所以她的成绩低于本年级一半学生的成绩.

(4) $400 \times 75 = 30\,000$ (分),

因此,估计八年级学生环保知识测试的总成绩为 30 000 分.

35 随机事件与概率

考点清单

考点一:1. 1 0 2. 相等 $\frac{m}{n}$

体验 1:B

考点二:2. 概率 $n \quad m$

体验 2:0.93

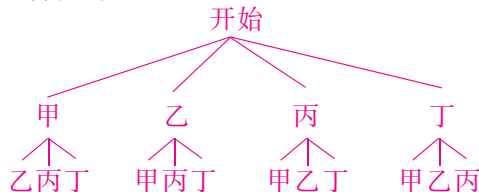
考点三:2. 列表

体验 3:(1)C (2)C (3)B

典例剖析

例 1:解:(1)随机

(2)画树状图如下所示:



由图可得,一共有 12 种等可能结果,其中甲、丁同学都被选为宣传员的结果有 2 种, $\therefore$ 甲、丁同学都被选为宣传员的概率为 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

举一反三:解:(1)随机 不可能

(2)列表如下:

	A	B	C	D
A		(A,B)	(A,C)	(A,D)
B	(B,A)		(B,C)	(B,D)
C	(C,A)	(C,B)		(C,D)
D	(D,A)	(D,B)	(D,C)	

由上表可知,所有可能的结果共有 12 种,且每种结果出现的可能性相等,其中选中《祖国有我》和《东方红》的结果有 2 种,

$$\therefore P(\text{选中《祖国有我》和《东方红》}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

例 2:解:(1)0.195 0.210 0.205 0.198

(2)估计获得饮料的概率为 0.2,故答案为:0.2.

(3)设箱子中有白球 x 个.

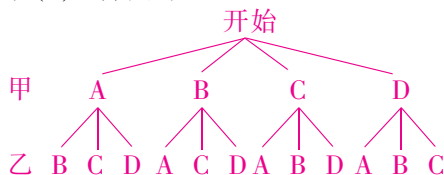
$$\text{根据题意,得 } \frac{8}{x+8} = 0.2.$$

解这个方程,得 $x = 32$.

经检验, $x = 32$ 是所列方程的解.

因此,估计箱子中有 32 个白球.

例 3:解:(1)画树状图如下.

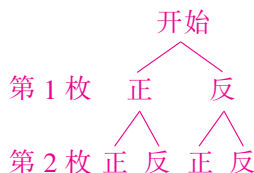


由图可知,一共有 12 种等可能的结果,其中乙选中球拍 C 的结果有 3 种,

$$\therefore P(\text{乙选中球拍 C}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

(2)公平.理由如下:

画树状图如下:



一共有 4 种等可能的结果,其中两枚硬币全部正面向上或全部反面向上的结果有 2 种,

$$\therefore P(\text{甲先发球}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, P(\text{乙先发球}) = \frac{4-2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore P(\text{甲先发球}) = P(\text{乙先发球}).$$

$\therefore$ 这个约定公平.

专题一 多 解 题

典例剖析

例 1:解:如图 1,

当 $OE = AE, EB = EA$ 时, $\triangle AOE$ 和 $\triangle ABE$ 都为等腰三角形.

$$\therefore AO = AB = 2,$$

$$\therefore AE \perp OB, E \text{ 为 } OB \text{ 的中点, 且 } OE = AE = BE.$$

$$\therefore OE^2 + AE^2 = AO^2, \text{ 即 } OE^2 + OE^2 = 2^2.$$

解得 $OE = \sqrt{2}$ (负值已舍去).

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(\sqrt{2}, 0)$.

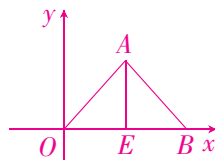


图 1

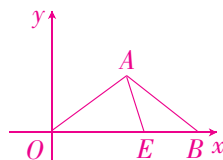


图 2

如图 2, 当 $OE = OA, EB = EA$ 时, $\triangle AOE$ 和 $\triangle ABE$ 都为等腰三角形.

$$\therefore AO = AB = 2, \therefore OE = OA = 2.$$

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(2, 0)$.

如图 3,

当 $OE = AE, EB = AB$ 时, $\triangle AOE$ 和 $\triangle ABE$ 都为等腰三角形.

$$\therefore AO = AB = 2,$$

$$\therefore \triangle OEA \sim \triangle OAB.$$

$$\therefore \frac{OE}{OA} = \frac{OA}{OB}, \text{ 即 } \frac{OE}{2} = \frac{2}{OE+2}.$$

解得 $OE = \sqrt{5} - 1$ 或 $OE = -\sqrt{5} - 1$ (舍去).

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(\sqrt{5} - 1, 0)$.

故点 E 的坐标为 $(\sqrt{2}, 0), (2, 0)$ 或 $(\sqrt{5} - 1, 0)$.

举一反三: $124^\circ, 76^\circ$ 或 28°

例 2:解:由题意得点 M 在直线 $y = -x + 12$ 上. 分情况讨论.

①若点 O 为直角顶点, 则点 M 在 y 轴上, 不合题意, 舍去.

②若点 A 为直角顶点, 则 $MA \perp x$ 轴,

$\therefore$ 点 M 的横坐标为 10.

把 $x = 10$ 代入 $y = -x + 12$ 中, 得 $y = 2$.

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(10, 2)$.

③若点 M 为直角顶点, 如图, 过点 M 作 $MB \perp x$ 轴于点 B , 易得 $\triangle OMB \sim \triangle MAB$.

$$\therefore \frac{OB}{MB} = \frac{MB}{AB}, \therefore MB^2 = OB \cdot AB.$$

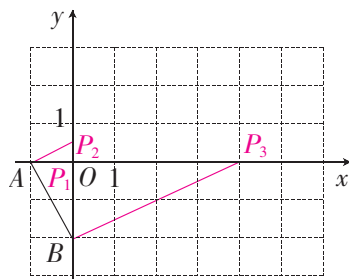
$$\therefore (-x + 12)^2 = x(10 - x).$$

解得 $x = 8$ 或 9 .

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(8, 4)$ 或 $(9, 3)$.

$\therefore$ 当 $\triangle OMA$ 为直角三角形时, 点 M 的坐标为 $(10, 2), (8, 4)$ 或 $(9, 3)$.

举一反三: $(0, 0), (0, \frac{1}{2}), (4, 0)$

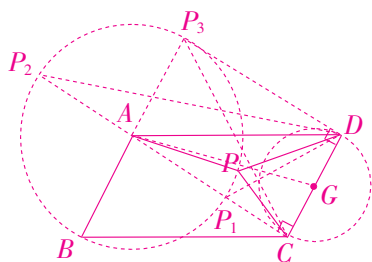


例 3: $-1, 2$ 或 1

举一反三: $-2, 0$ 或 2

例4:解:由题意可知, P 点在以点 A 为圆心, AB 长为半径的圆上运动.

如图,延长 BA 与 $\odot A$ 交于点 P_3 ,连接 P_3C .



$$\because P_3B = 2AB = BC,$$

$$\text{又} \because \angle B = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle P_3BC$ 为等边三角形.

$$\therefore AC \perp AB.$$

在 $\square ABCD$ 中, $AB \parallel CD, AB = CD,$

$$\therefore CD \perp AC.$$

$$\therefore \angle ACD = 90^\circ.$$

$\therefore$ 当点 P 在直线 AC 上时符合题意.

$$\therefore \alpha_1 = 90^\circ, \alpha_2 = 270^\circ.$$

连接 P_3D .

$$\because AP_3 \parallel CD, AP_3 = AB = CD,$$

$\therefore$ 四边形 $ACDP_3$ 为平行四边形.

$$\therefore \angle P_3DC = \angle P_3AC = 90^\circ,$$

即 P 运动到 P_3 时符合题意.

$$\therefore \alpha_3 = 180^\circ.$$

记 CD 的中点为 G ,以 G 为圆心, GC 长为半径作 $\odot G$.

$$AG = \sqrt{AC^2 + CG^2} = \sqrt{BC^2 - AB^2 + CG^2}$$

$$= \sqrt{(2CD)^2 - CD^2 + \left(\frac{1}{2}CD\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}CD > \frac{3}{2}CD,$$

$\therefore \odot A$ 与 $\odot G$ 没有交点.

$$\therefore \angle DPC \neq 90^\circ.$$

故答案为: $90^\circ, 180^\circ$ 或 270° .

举一反三: $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ 或 2

专题二 创新画(作)图题

典例剖析

例1:解:(1)如图1, $\triangle ABC$ 即为所求(答案不唯一);

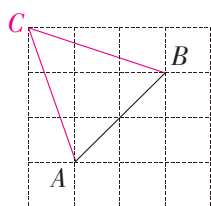


图 1

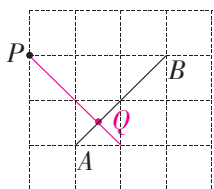


图 2

(2)如图2,点 Q 即为所求.

举一反三:(1)解:①如图1,线段 CM 即为所求;

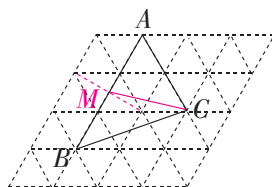


图 1

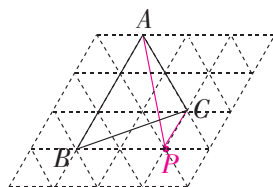


图 2

②如图2, $\angle APC$ 即为所求(答案不唯一).

(2)解:①如图1,平行四边形 $ACBD$ 即为所求;

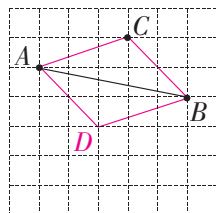


图 1

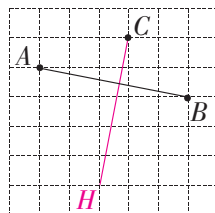


图 2

②如图2,线段 CH 即为所求.

例2:解:①如图1, EF 就是所求作的弦;

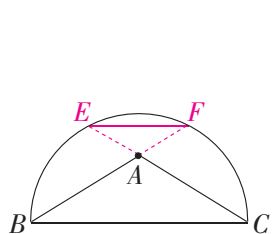


图 1

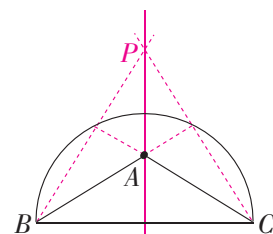


图 2

②如图2,直线 PA 即为所求.

举一反三:(1)解:①如图1,直线 AD 即为所求;

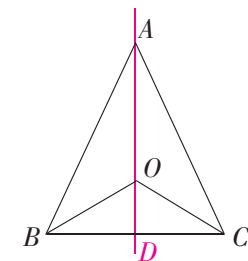


图 1

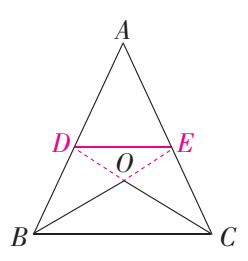


图 2

②如图2, DE 即为所求.

(2)解:①如图1,直线 DP 即为所求;

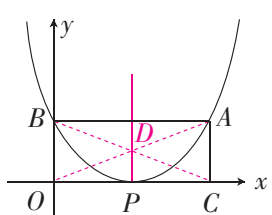


图 1

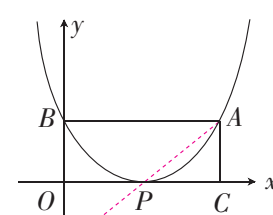


图 2

②如图2,点 D 即为所求.

例3:解:(1)如图1,射线 CD 是 $\angle ACB$ 的平分线;

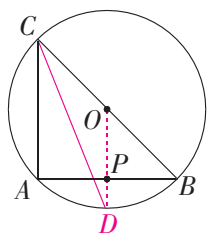


图 1

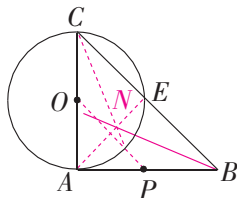


图 2

(2) 如图 2, 射线 BN 是 $\angle ABC$ 的平分线.

举一反三: 解: (1) 如图 1, 线段 BP 即为所求;

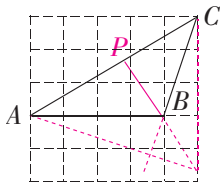


图 1

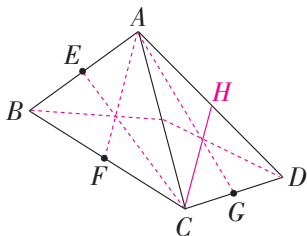


图 2

(2) 如图 2, 线段 CH 即为所求.

专题三 数量关系应用题

典例剖析

例 1: 解: (1) 设购买杂酱面 x 份、牛肉面 y 份.

根据题意得 $\begin{cases} x + y = 170, \\ 15x + 20y = 3\ 000. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x = 80, \\ y = 90. \end{cases}$

答: 购买杂酱面 80 份、牛肉面 90 份.

(2) 设购买牛肉面 m 份, 则购买杂酱面 $(1 + 50\%)m$ 份.

根据题意得 $\frac{1\ 200}{m} - \frac{1\ 260}{(1 + 50\%)m} = 6$.

解得 $m = 60$.

经检验, $m = 60$ 是所列方程的解, 且符合题意.

答: 购买了牛肉面 60 份.

举一反三: 解: (1) 设豆沙粽的单价为 x 元, 肉粽的单价为 $2x$ 元.

由题意可得 $10x + 12 \times 2x = 136$.

解得 $x = 4$.

$\therefore 2x = 8$ (元).

答: 豆沙粽的单价为 4 元, 肉粽的单价为 8 元.

(2) ① 设豆沙粽优惠后的单价为 a 元, 肉粽优惠后的单价为 b 元.

由题意可得 $\begin{cases} 20a + 30b = 270, \\ 30a + 20b = 230. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a = 3, \\ b = 7. \end{cases}$

答: 豆沙粽优惠后的单价为 3 元, 肉粽优惠后的单价为 7 元.

② 由题意可得 $[3m + 7(40 - m)] \times (80 - 4m) + [3 \times (40 - m) + 7m] \times (4m + 8) = 17\ 280$.

解得 $m = 19$ 或 $m = 10$.

$\therefore m \leq \frac{1}{2}(40 - m), \therefore m \leq \frac{40}{3}. \therefore m = 10$.

例 2: 解: (1) 设《周髀算经》的单价是 x 元, 则《孙子算经》的单价是 $\frac{3}{4}x$ 元.

根据题意得 $\frac{600}{\frac{3}{4}x} - \frac{600}{x} = 5$.

解得 $x = 40$.

经检验, $x = 40$ 是所列方程的解, 且符合题意.

$\therefore \frac{3}{4}x = \frac{3}{4} \times 40 = 30$.

答: 《孙子算经》的单价是 30 元, 《周髀算经》的单价是 40 元.

(2) 设购买 m 本《孙子算经》, 则购买 $(80 - m)$ 本《周髀算经》.

根据题意得 $80 - m \geq \frac{1}{2}m$.

解得 $m \leq \frac{160}{3}$.

设购买这两种图书共花费 w 元, 则

$w = 30 \times 0.8m + 40 \times 0.8(80 - m)$,

$\therefore w = -8m + 2\ 560$.

$\therefore -8 < 0$,

$\therefore w$ 随 m 的增大而减小.

又 $\therefore m \leq \frac{160}{3}$, 且 m 为正整数,

$\therefore$ 当 $m = 53$ 时, w 取得最小值, 此时 $80 - m = 80 - 53 = 27$.

答: 当购买 53 本《孙子算经》、27 本《周髀算经》时, 总费用最少.

举一反三: 解: (1) 设这两个月中该景区游客人数的月平均增长率为 x .

由题意可得 $1.6(1 + x)^2 = 2.5$.

解得 $x_1 = 25\%$, $x_2 = -\frac{9}{4}$ (不合题意, 舍去).

答: 这两个月中该景区游客人数的月平均增长率为 25%.

(2) 设 5 月份最后 10 天的日均接待游客人数是 a 万.

由题意可得 $2.125 + 10a \leq 2.5(1 + 25\%)$.

解得 $a \leq 0.1$.

答: 5 月份最后 10 天的日均接待游客人数最多是 0.1 万.

例 3: 解: (1) 根据销售单价从低到高排列得下表.

售价/(元/盆)	18	20	22	26	30
日销售量/盆	54	50	46	38	30

(2) 观察表格可知销售量是售价的一次函数.

设日销售量为 y 盆, 售价为 x 元/盆, $y = kx + b$.

把 $(18, 54)$, $(20, 50)$ 代入, 得 $\begin{cases} 18k + b = 54, \\ 20k + b = 50. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} k = -2, \\ b = 90. \end{cases}$

$\therefore y = -2x + 90$.

(3) ① $\therefore$ 每天获得 400 元的利润,

$\therefore (x - 15)(-2x + 90) = 400$.

解得 $x = 25$ 或 $x = 35$.

∴ 要想每天获得 400 元的利润, 售价应定为 25 元/盆或 35 元/盆.
 ② 设每天获得的利润为 w 元.
 根据题意得 $w = (x - 15)(-2x + 90) = -2x^2 + 120x - 1350 = -2(x - 30)^2 + 450$.
 $\therefore -2 < 0$,
 $\therefore$ 当 $x = 30$ 时, w 取得最大值 450.
 $\therefore$ 售价定为 30 元/盆时, 每天能够获得最大利润 450 元.

专题四 实物情境应用题

典例剖析

例 1: (1) 证明: $\because AB = AC$,

$\therefore \angle B = \angle ACB$.

$\because AD = AC$,

$\therefore \angle ADC = \angle ACD$.

$\therefore \angle B + \angle ACB + \angle ADC + \angle ACD = 180^\circ$,

$\therefore 2\angle ACB + 2\angle ACD = 180^\circ$.

$\therefore \angle ACB + \angle ACD = 90^\circ$.

$\therefore \angle BCD = 90^\circ$.

$\therefore DC \perp BC$.

(2) 解: 如图, 过点 E 作 $EF \perp BC$, 垂足为 F .

在 $\text{Rt}\triangle DCB$ 中, $\angle B = 55^\circ$, $BC = 1.8$ m,

$$\therefore BD = \frac{BC}{\cos 55^\circ} \approx \frac{1.8}{0.57} \approx 3.16 \text{ (m)}.$$

$\because DE = 2$ m,

$\therefore BE = BD + DE \approx 5.16 \text{ (m)}$.

在 $\text{Rt}\triangle BEF$ 中, $EF = BE \cdot \sin 55^\circ \approx 5.16 \times 0.82 \approx 4.2$ (m).

$\therefore$ 雕塑的高约为 4.2 m.

例 2: 解: (1) 在图 1 中, 连接 OM .

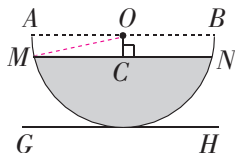


图 1

$\because O$ 为圆心, $OC \perp MN$ 于点 C , $MN = 48$ cm,

$$\therefore MC = \frac{1}{2}MN = 24 \text{ cm}.$$

$$\because AB = 50 \text{ cm}, \therefore OM = \frac{1}{2}AB = 25 \text{ cm}.$$

在 $\text{Rt}\triangle OMC$ 中, $OC = \sqrt{OM^2 - MC^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$ (cm).

(2) $\because GH$ 与半圆的切点为 E , $\therefore OE \perp GH$.

$\because MN \parallel GH$, $\therefore OE \perp MN$ 于点 D .

$\because \angle ANM = 30^\circ$, $ON = 25$ cm,

$$\therefore OD = \frac{1}{2}ON = \frac{25}{2} \text{ cm}.$$

$$\therefore \text{操作后水面下降的高度为 } \frac{25}{2} - 7 = \frac{11}{2} \text{ (cm)}.$$

(3) $\because OE \perp MN$ 于点 D , $\angle ANM = 30^\circ$,

$\therefore \angle DOB = 60^\circ$.

$\because$ 半圆的中点为 Q , $\therefore \widehat{AQ} = \widehat{QB}$.

$\therefore \angle QOB = 90^\circ$. $\therefore \angle QOE = 30^\circ$.

$$\therefore EF = \tan \angle QOE \cdot OE = \frac{25\sqrt{3}}{3} \text{ (cm)},$$

$$\widehat{EQ} \text{ 的长为 } \frac{30 \times \pi \times 25}{180} = \frac{25\pi}{6} \text{ (cm)}.$$

$$\therefore \frac{25\sqrt{3}}{3} - \frac{25\pi}{6} = \frac{50\sqrt{3} - 25\pi}{6} = \frac{25(2\sqrt{3} - \pi)}{6} > 0,$$

$\therefore EF > \widehat{EQ}$.

举一反三: 6. 6

例 3: 解: (1) $\because AB \parallel CD$, $\therefore \triangle EFO \sim \triangle DCO$.

$$\therefore \frac{EF}{CD} = \frac{FO}{OC}$$

$\because EF = 20$ cm, $CD = 40$ cm, $CF = 75$ cm,

$$\therefore \frac{20}{40} = \frac{CF - OC}{OC} = \frac{75 - OC}{OC}.$$

$\therefore OC = 50$ cm.

$\because$ 在 $\triangle OCD$ 中, $CD = 40$ cm, $OC = 50$ cm,

$\therefore \angle COD < \angle D$.

(2) 如图, 过点 O 作 $OG \perp CD$ 于点 G .

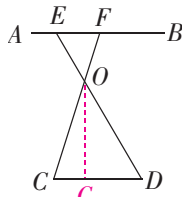


图 2

$\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle OCG = \angle EFC = 75^\circ$, $\angle ODG = \angle FED = 60^\circ$.

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle OCG \text{ 中, } \tan \angle OCG = \frac{OG}{CG},$$

$$\text{得 } CG = \frac{OG}{\tan 75^\circ} = \frac{OG}{2 + \sqrt{3}}.$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ODG \text{ 中, } \tan \angle ODG = \frac{OG}{DG},$$

$$\text{得 } DG = \frac{OG}{\tan 60^\circ} = \frac{OG}{\sqrt{3}}.$$

$\therefore CG + DG = CD$,

$$\therefore \frac{OG}{2 + \sqrt{3}} + \frac{OG}{\sqrt{3}} = 40,$$

$$\text{解得 } OG = 10(3 + \sqrt{3}) \approx 10 \times 4.732 \approx 47.3 \text{ (cm)}.$$

$\therefore$ 点 O 到 CD 的距离约为 47.3 cm.

专题五 以二次函数为主体的探究题

典例剖析

例 1: 解: (1) 由抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 过点 $A(1, 0)$, $C(-2, 3)$, 得

$$\begin{cases} -1 + b + c = 0, \\ -4 - 2b + c = 3. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} b = -2, \\ c = 3. \end{cases}$$

故抛物线的解析式为 $y = -x^2 - 2x + 3$.

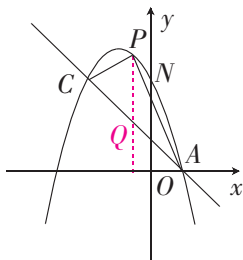
(2) 设直线 AC 的解析式为 $y = kx + n$,

∵ 直线过点 $A(1,0), C(-2,3)$, 则 $\begin{cases} k+n=0, \\ -2k+n=3. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} k=-1, \\ n=1. \end{cases}$

故直线 AC 的解析式为 $y = -x + 1$.

(3) 如图, 过点 P 作 $PQ \perp x$ 轴, 交 AC 于点 Q .



∵ 直线 AC 的解析式为 $y = -x + 1$,

∴ 可设 $Q(x, -x + 1)$, 则 $P(x, -x^2 - 2x + 3)$.

∴ $PQ = (-x^2 - 2x + 3) - (-x + 1) = -x^2 - x + 2$.

∴ $S_{\triangle APC} = \frac{1}{2} \times (-x^2 - x + 2) \times |x_C - x_A|$

$= \frac{1}{2} \times (-x^2 - x + 2) \times 3 = -\frac{3}{2}(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{27}{8}$.

∴ $\triangle APC$ 面积的最大值为 $\frac{27}{8}$.

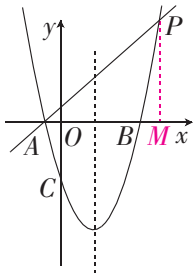
例 2 解: (1) 设 $y = (x - 2)^2 + k$. 把点 A 的坐标代入, 得 $(-1 - 2)^2 + k = 0$.

解得 $k = -9$.

∴ $y = (x - 2)^2 - 9 = x^2 - 4x - 5$.

∴ 抛物线的解析式为 $y = x^2 - 4x - 5$.

(2) 过点 P 作 $PM \perp x$ 轴于点 M , 如图.



设 $P(m, m^2 - 4m - 5)$, 则 $PM = |m^2 - 4m - 5|$.

∵ $A(-1, 0)$, ∴ $AM = m + 1$.

∵ $\angle PAB = 45^\circ$, ∴ $AM = PM$. ∴ $|m^2 - 4m - 5| = m + 1$,

即 $m^2 - 4m - 5 = m + 1$ 或 $m^2 - 4m - 5 = -(m + 1)$.

当 $m^2 - 4m - 5 = m + 1$ 时, 解得 $m_1 = 6, m_2 = -1$ (不合题意, 舍去).

当 $m^2 - 4m - 5 = -(m + 1)$ 时, 解得 $m_3 = 4, m_4 = -1$ (不合题意, 舍去).

∴ 点 P 的坐标是 $(6, 7)$ 或 $(4, -5)$.

(3) 在抛物线的对称轴上存在一点 Q , 使得 $\triangle BCQ$ 是直角三角形.

在 $y = x^2 - 4x - 5$ 中, 令 $x = 0$, 得 $y = -5$,

令 $y = 0$, 得 $x = -1$ 或 $x = 5$.

∴ $B(5, 0), C(0, -5)$.

设 $Q(2, t)$.

∴ $BC^2 = 50, BQ^2 = 9 + t^2, CQ^2 = 4 + (t + 5)^2$.

当 BC 为斜边时, $BQ^2 + CQ^2 = BC^2$,

∴ $9 + t^2 + 4 + (t + 5)^2 = 50$.

解得 $t = -6$ 或 $t = 1$.

∴ 此时点 Q 的坐标为 $(2, -6)$ 或 $(2, 1)$.

当 BQ 为斜边时, $BC^2 + CQ^2 = BQ^2$,

∴ $50 + 4 + (t + 5)^2 = 9 + t^2$. 解得 $t = -7$.

∴ 此时点 Q 的坐标为 $(2, -7)$.

当 CQ 为斜边时, $BC^2 + BQ^2 = CQ^2$,

∴ $50 + 9 + t^2 = 4 + (t + 5)^2$. 解得 $t = 3$.

∴ 此时点 Q 的坐标为 $(2, 3)$.

∴ 存在点 Q , 使 $\triangle BCQ$ 是直角三角形, 此时点 Q 的坐标为 $(2, 3)$ 或 $(2, -7)$ 或 $(2, 1)$ 或 $(2, -6)$.

举一反三: 解: (1) 令 $y = 0$, 则 $-\frac{\sqrt{3}}{6}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3} = 0$.

解得 $x = -2$ 或 $x = 6$. ∴ $A(-2, 0), B(6, 0)$.

令 $x = 0$, 则 $y = 2\sqrt{3}$, ∴ $C(0, 2\sqrt{3})$.

∴ $y = -\frac{\sqrt{3}}{6}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{6}(x - 2)^2 + \frac{8\sqrt{3}}{3}$,

∴ 抛物线的对称轴为直线 $x = 2$. ∴ $D(2, 0)$.

设直线 CD 的函数解析式为 $y = kx + b$, 则 $\begin{cases} b = 2\sqrt{3}, \\ 2k + b = 0. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} k = -\sqrt{3}, \\ b = 2\sqrt{3}. \end{cases}$ ∴ $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$.

(2) 存在点 E , 使 $\triangle ACE$ 为直角三角形.

设 $E(t, -\sqrt{3}t + 2\sqrt{3})$.

∴ $AC^2 = 16, AE^2 = 4t^2 - 8t + 16, CE^2 = 4t^2$.

① 当 $\angle CAE = 90^\circ$ 时, $AC^2 + AE^2 = CE^2$,

∴ $16 + 4t^2 - 8t + 16 = 4t^2$. ∴ $t = 4$.

∴ $E(4, -2\sqrt{3})$.

② 当 $\angle ACE = 90^\circ$ 时, $AC^2 + CE^2 = AE^2$,

∴ $16 + 4t^2 = 4t^2 - 8t + 16$,

∴ $t = 0$ (舍去).

③ 当 $\angle AEC = 90^\circ$ 时, $AE^2 + CE^2 = AC^2$,

∴ $4t^2 - 8t + 16 + 4t^2 = 16$.

∴ $t = 0$ (舍去) 或 $t = 1$.

∴ $E(1, \sqrt{3})$.

∴ 存在点 E , 使 $\triangle ACE$ 为直角三角形, 此时点 E 的坐标为 $(4, -2\sqrt{3})$ 或 $(1, \sqrt{3})$.

例 3 解: (1) ① 3

② $S = t^2 + 2$

(2) 由图 2 可得: 当点 P 运动到点 B 处时, $PD^2 = BD^2 = 6$, 当点 P 运动到点 A 处时, $PD^2 = AD^2 = 18$,

抛物线的顶点坐标为 $(4, 2)$,

∴ $BC = \sqrt{BD^2 - CD^2} = \sqrt{6 - 2} = 2, AD = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

设 $S = a(t - 4)^2 + 2$, 将 $(2, 6)$ 代入, 得 $4a + 2 = 6$, 解得 $a = 1$.

∴ $S = (t - 4)^2 + 2 = t^2 - 8t + 18$.

∴ $AC = AD + CD = 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$,

∴ $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + 2^2} = 6$.

(3) ① 4

提示: 由 (1) (2) 可得

$$S = \begin{cases} t^2 + 2, & 0 \leq t < 2, \\ (t-4)^2 + 2, & 2 \leq t \leq 8. \end{cases}$$

在图2中补全 $0 \leq t < 2$ 的图象.

根据图象可知 $0 \leq t \leq 2$ 内的图象与 $2 \leq t \leq 4$ 内的图象关于直线 $x = 2$ 对称,

因此 $t_1 + t_2 = 4$.

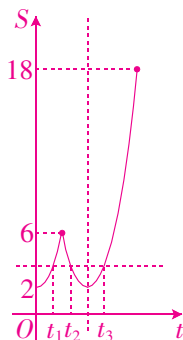
②根据二次函数的对称性,可知 $t_2 + t_3 = 8$.

由①可知 $t_1 + t_2 = 4$, $\therefore t_3 - t_1 = 4$.

又 $\because t_3 = 4t_1$,

$$\therefore 4t_1 - t_1 = 4, \text{得 } t_1 = \frac{4}{3},$$

此时正方形 $DPEF$ 的面积 $S = (\frac{4}{3})^2 + 2 = \frac{34}{9}$.



专题六 综合与探索

典例剖析

例1:(1)证明:在矩形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AD \parallel BC$.

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10,$$

$$\angle FAP = \angle ECP, \angle AFP = \angle CEP.$$

当 $t = 5$ s 时, $CP = 5$. $\therefore AP = PC$.

$$\therefore \triangle AFP \cong \triangle CEP (\text{AAS}). \therefore AF = CE.$$

(2)解: $AQ^2 + CE^2 = QE^2$. 证明如下:

如图2,连接 FQ .

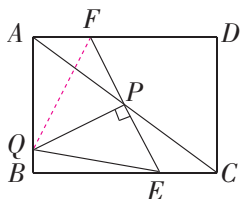


图2

由(1)得, $AF = CE$, $FP = PE$.

$\because QP \perp FE$, $\therefore PQ$ 是线段 FE 的垂直平分线.

$$\therefore QE = QF.$$

$$\because \angle BAD = 90^\circ, \therefore AQ^2 + AF^2 = QF^2.$$

$$\therefore AQ^2 + CE^2 = QE^2.$$

(3)解:设 FQ 与 AC 的交点为点 G .

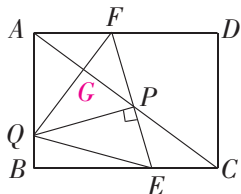


图3

$\because FQ$ 平分 $\angle AFP$, $\angle QAF = \angle QPF = 90^\circ$,

$$\therefore QA = QP, QF \text{ 平分 } \angle AQP.$$

$$\therefore QF \perp AP, AG = PG.$$

$$\because \cos \angle BAC = \frac{AG}{AQ} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5},$$

设 $AG = PG = 3k$, $AQ = PC = 5k$,

$$\therefore AP = 6k.$$

又 $\because AD \parallel BC$,

$$\therefore \triangle AFP \sim \triangle CEP.$$

$$\therefore \frac{AF}{CE} = \frac{AP}{CP} = \frac{6}{5}.$$

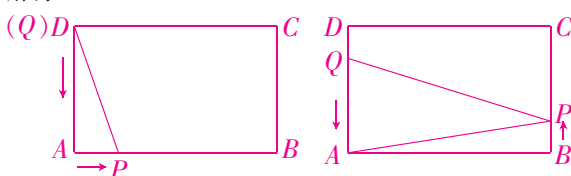
故 $\frac{AF}{CE}$ 的值为 $\frac{6}{5}$.

举一反三:解:①如答图1,当点 P 在 AB 上时, $0 < t \leq 3$.

$\therefore AB = 3$ cm, $AQ = AD = 2$ cm, $AP = t$ cm,

$$\therefore S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} AP \cdot AQ = \frac{1}{2} t \cdot 2 = 2.$$

解得 $t = 2$.



答图1

答图2

②如答图2,当点 P 在 BC 上时, $3 < t \leq 5$.

$\therefore AQ = 2 - 2(t - 3) = (8 - 2t)$ (cm), $\triangle APQ$ 的 AQ 边上的高为 $AB = 3$ cm,

$$\therefore S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} AQ \cdot AB = \frac{1}{2} \times (8 - 2t) \times 3 = 2.$$

$$\text{解得 } t = \frac{10}{3}.$$

综上所述,当 $t = 2$ 或 $\frac{10}{3}$ 时, $\triangle APQ$ 的面积为 2 cm².

例2:解:方案一: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AB = CD = 3, AD = BC = 5.$$

由作图知 $BO = OC = \frac{1}{2} BC = 2.5$.

由翻折的不变性,知 $AP = AB = 3$, $OP = OB = 2.5$, $\angle APO = \angle B = 90^\circ$.

$$\therefore OP = OC = 2.5, \angle QPO = \angle C = 90^\circ.$$

又 $\because OQ = OQ$,

$$\therefore \triangle QPO \cong \triangle QCO (\text{HL}).$$

$$\therefore PQ = CQ.$$

设 $PQ = CQ = x$, 则 $AQ = 3 + x$, $DQ = 3 - x$.

在 $\text{Rt} \triangle ADQ$ 中, $AD^2 + QD^2 = AQ^2$,

$$\text{即 } 5^2 + (3 - x)^2 = (3 + x)^2.$$

$$\text{解得 } x = \frac{25}{12}.$$

$\therefore$ 线段 CQ 的长为 $\frac{25}{12}$.

方案二: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AB = CD = 3, AD = BC = 5.$$

由作图知 $BO = OC = \frac{1}{2} BC = 2.5$.

由旋转的不变性,知 $CR = AB = 3$, $\angle BAO = \angle R$, $\angle B = \angle OCR = 90^\circ$,

则 $\angle OCR + \angle OCD = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

$\therefore$ 点 D, C, R 共线.

由翻折的不变性,知 $\angle BAO = \angle OAQ$,

$$\therefore \angle OAQ = \angle R.$$

$$\therefore QA = QR.$$

设 $CQ = x$, 则 $QA = QR = 3 + x$, $DQ = 3 - x$.

在 $\text{Rt}\triangle ADQ$ 中, $AD^2 + QD^2 = AQ^2$,
即 $5^2 + (3-x)^2 = (3+x)^2$.

解得 $x = \frac{25}{12}$.

$\therefore$ 线段 CQ 的长为 $\frac{25}{12}$.

例 3: (1) ①证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,
 $\therefore CD = CB, \angle DCA = \angle BCA = 45^\circ$.

$\therefore CP = CP, \therefore \triangle DCP \cong \triangle BCP. \therefore PD = PB$.

②解: $\angle DPQ$ 的大小不发生变化, $\angle DPQ = 90^\circ$.

理由: 作 $PM \perp AB, PN \perp AD$, 垂足分别为 M, N , 如图 1.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \angle DAC = \angle BAC = 45^\circ, \angle DAB = 90^\circ$.

$\therefore$ 四边形 $AMPN$ 是矩形, $PM = PN. \therefore \angle MPN = 90^\circ$.

$\therefore PD = PQ, PM = PN$,

$\therefore \text{Rt}\triangle DPN \cong \text{Rt}\triangle QPM$ (HL).

$\therefore \angle DPN = \angle QPM$.

$\therefore \angle QPN + \angle QPM = 90^\circ$,

$\therefore \angle QPN + \angle DPN = 90^\circ$, 即 $\angle DPQ = 90^\circ$.

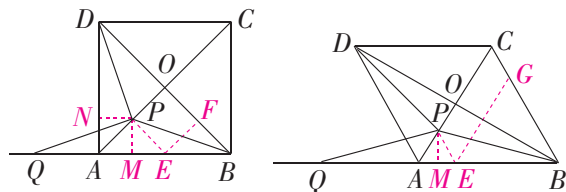


图 1

③解: $AQ = \sqrt{2}OP$.

理由: 作 $PE \perp AO$ 交 AB 于点 E , 作 $EF \perp OB$ 于点 F , 如图 1.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \angle BAC = \angle ABD = 45^\circ, \angle AOB = 90^\circ$.

$\therefore \angle AEP = 45^\circ$, 四边形 $OPEF$ 是矩形.

$\therefore EF = OP, PA = PE$.

$\therefore PD = PB, PD = PQ$,

$\therefore PQ = PB$.

作 $PM \perp AE$ 于点 M , 则 $QM = BM, AM = EM$.

$\therefore AQ = BE$.

$\therefore \angle EFB = 90^\circ, \angle EBF = 45^\circ$,

$\therefore BE = \frac{EF}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}EF$.

$\therefore AQ = \sqrt{2}OP$.

(2) 解: $AQ = CP$.

理由: 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle ABC = 60^\circ$,

$\therefore AB = BC, AC \perp BD, DO = BO$.

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形, AC 垂直平分 BD .

$\therefore \angle BAC = 60^\circ, PD = PB$.

$\therefore PD = PQ, \therefore PQ = PB$.

作 $PE \parallel BC$ 交 AB 于点 E , $EG \parallel AC$ 交 BC 于点 G , 如图 2.

$\therefore$ 四边形 $PEGC$ 是平行四边形, $\angle GEB = \angle BAC = 60^\circ$, $\angle AEP = \angle ABC = 60^\circ$.

$\therefore EG = PC, \triangle APE, \triangle BEG$ 都是等边三角形.

$\therefore BE = EG = PC$.

作 $PM \perp AB$ 于点 M , 则 $QM = MB, AM = EM$.

$\therefore QA = BE. \therefore AQ = CP$.

举一反三: 解: (1) 猜想 $\frac{EG}{FH} = 1$.

理由: 如图 1, 过点 A 作 $AM \parallel HF$ 交 BC 于点 M , 作 $AN \parallel EG$ 交 CD 的延长线于点 N .

易知四边形 $AMFH$ 和四边形 $AEGN$ 均为平行四边形,
 $\therefore AM = HF, AN = EG$.

在正方形 $ABCD$ 中, $AB = AD, \angle ABM = \angle BAD = \angle ADN = 90^\circ$.

$\therefore EG \perp FH, \therefore \angle NAM = 90^\circ$.

$\therefore \angle BAM = \angle DAN$.

在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle ADN$ 中, $\angle BAM = \angle DAN, AB = AD, \angle ABM = \angle ADN$,

$\therefore \triangle ABM \cong \triangle ADN$ (ASA).

$\therefore AM = AN$, 即 $EG = FH. \therefore \frac{EG}{FH} = 1$.

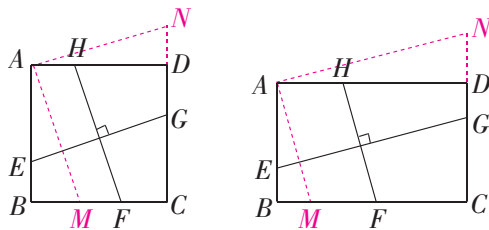


图 1

图 2

(2) 如图 2, 过点 A 作 $AM \parallel HF$ 交 BC 于点 M , 作 $AN \parallel EG$ 交 CD 的延长线于点 N .

易知四边形 $AMFH$ 和四边形 $AEGN$ 均为平行四边形.

$\therefore AM = HF, AN = EG$.

在矩形 $ABCD$ 中, $BC = AD, \angle ABM = \angle BAD = \angle ADN = 90^\circ$.

$\therefore EG \perp FH, \therefore \angle NAM = 90^\circ$.

$\therefore \angle BAM = \angle DAN$.

$\therefore \triangle ABM \sim \triangle ADN. \therefore \frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AD}$.

$\therefore AB = m, BC = AD = n, \therefore \frac{EG}{FH} = \frac{n}{m}$.

故答案为 $\frac{n}{m}$.

(3) 如图 3, 过点 C 作 $CM \perp AB$ 于点 M .

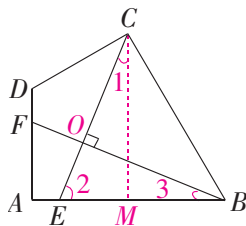


图 3

设 CE 交 BF 于点 O .

$\because CM \perp AB, \therefore \angle CME = 90^\circ. \therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$.

$\because CE \perp BF, \therefore \angle BOE = 90^\circ. \therefore \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$.

$\therefore \angle 1 = \angle 3. \therefore \triangle CME \sim \triangle BAF. \therefore \frac{CE}{BF} = \frac{CM}{AB}$.

$\because AB = BC, \angle ABC = 60^\circ$,

$\therefore \frac{CE}{BF} = \frac{CM}{BC} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

评价演练

1 实数的概念与运算

1. B 2. A 3. D

4. $-\pi$

5. 解: $\sqrt[3]{8} + \tan 45^\circ - 3^0 = 2 + 1 - 1 = 2$.

6. C

7. -1 8. $(-13) + (+23) = 10$

9. C

2 整式与因式分解

1. B 2. A

3. $-4mn^2$ 4. -6

5. (1) 解: 原式 $= (a+b)(a-b+2b) = (a+b)^2$.

(2) 解: 原式 $= m^2 + 2mn + n^2 - 2mn = m^2 + n^2$.

6. 解: $(2-a)(2+a) - 2a(a+3) + 3a^2 = 4 - a^2 - 2a^2 - 6a + 3a^2 = 4 - 6a$.

当 $a = -\frac{1}{3}$ 时,

原式 $= 4 - 6 \times (-\frac{1}{3}) = 4 + 2 = 6$.

7. $6n+6$ 8. 4 851

3 数的开方与二次根式

1. A 2. C

3. 10 4. 如 2 024 5. $\sqrt{2}$

6. 解: 由数轴可得 $a < 0, 1 < b < 2$,

则 $b-1 > 0, a-b < 0$,

故原式 $= b-1+a-b = a-1$.

7. 解: 原式 $= 3\sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2}$

$= 12\sqrt{2} - 6\sqrt{2}$

$= 6\sqrt{2}$.

8. A

9. $\sqrt{7}-2$

10. 解: 原式 $= m^2 - 3 - (m^2 - \sqrt{2}m)$

$= m^2 - 3 - m^2 + \sqrt{2}m$

$= \sqrt{2}m - 3$.

当 $m = \sqrt{14}$ 时,

原式 $= \sqrt{2} \times \sqrt{14} - 3 = 2\sqrt{7} - 3$.

11. B

12. $13 - 2\sqrt{42} = (\sqrt{7} - \sqrt{6})^2$

4 分 式

1. D 2. D 3. A

4. $2a^2$ 5. x 6. $\frac{20a}{a-20}$ 7. 8

8. 解: 原式 $= [\frac{x^2}{x(x-2)} - \frac{x}{(x-2)^2}] \cdot \frac{x-2}{x}$

$= \frac{x^2}{x(x-2)} \cdot \frac{x-2}{x} - \frac{x}{(x-2)^2} \cdot \frac{x-2}{x}$

$= 1 - \frac{1}{x-2}$.

$\therefore x = (2\,024 - \pi)^0 = 1$,

$\therefore$ 原式 $= 2$.

9. 解: (1) $\frac{4x+7}{x+2}$

(2) $P = \frac{6(x+3)}{9-x^2} = \frac{6}{3-x}$.

$\therefore P$ 的值为正整数, x 为正整数,

$\therefore 3-x=1$ 或 $3-x=2$, 解得 $x=2$ 或 1 .

当 $x=1$ 时, $P = \frac{6}{3-x} = 3$;

当 $x=2$ 时, $P = \frac{6}{3-x} = 6$.

5 一元一次方程、二元一次方程组及其应用

1. B 2. C

3. 1

4. A

5. 12 6. $\begin{cases} 5 \times 8 + 3x + \frac{1}{3}y = 100, \\ x + y + 8 = 100 \end{cases}$

7. 解: $\begin{cases} 4x - 3(y-1) = 14, \text{①} \\ 5x + 3(y-1) = 31. \text{②} \end{cases}$

①+②得 $9x=45$.

$\therefore x=5$.

把 $x=5$ 代入①, 解得 $y=3$.

$\therefore$ 原方程组的解为 $\begin{cases} x=5, \\ y=3. \end{cases}$

8. 8

9. 解: (1) 设一块长方形墙砖的长为 x m, 宽为 y m.

依题意得 $\begin{cases} x+y=1.5, \\ 2x=x+4y. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=1.2, \\ y=0.3. \end{cases}$

答: 一块长方形墙砖的长为 1.2 m, 宽为 0.3 m.

(2) 电视背景墙的面积为 $2 \times 1.2 \times 1.5 = 3.6(\text{m}^2)$.

答: 电视背景墙的面积为 3.6 m^2 .

10. 解: 设八年级有 x 人参加比赛, 则七年级有 $(92 - x)$ 人参加比赛.
 根据题意得 $60x + 50(92 - x) = 5\,000$,
 解得 $x = 40$.
 $\therefore 92 - x = 92 - 40 = 52$ (人).
 则八年级有 40 人、七年级有 52 人参加比赛.
 (2) 根据七年级有 10 名学生被抽调去参加绘画比赛, 可得七年级有 42 人、八年级有 40 人参加比赛.
 如果分别购买服装, 需花费: $42 \times 60 + 40 \times 60 = 4\,920$ (元).
 如果合在一起购买服装, 需花费: $82 \times 50 = 4\,100$ (元).
 如果买 91 套演出服, 需花费: $91 \times 40 = 3\,640$ (元).
 $\therefore 3\,640 < 4\,100 < 4\,920$,
 $\therefore$ 最省钱的购买服装的方案是直接买 91 套.

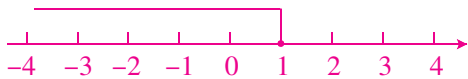
6 可化为一元一次方程的分式方程的解法及应用

1. A 2. B 3. B
 4. -2 5. $\frac{2\,400}{x+4} = 2 \times \frac{1\,000}{x}$
 6. 解: 方程两边同乘 $(x - 2)$, 得 $3 - x - x = x - 2$.
 解得 $x = \frac{5}{3}$.
 经检验, $x = \frac{5}{3}$ 是原方程的解.
 7. $-1, 5$ 或 $-\frac{1}{3}$
 8. 解: 设青年志愿者原计划每小时清除 x 吨垃圾.
 根据题意得 $\frac{75}{x} - \frac{75}{2x} = 3$.
 解得 $x = 12.5$.
 经检验, $x = 12.5$ 是原分式方程的解.
 答: 青年志愿者原计划每小时清除 12.5 吨垃圾.

7 一元一次不等式(组)的解法及应用

1. A 2. B
 3. $a > 1$ 4. $a \geq 2$
 5. $x \leq 3$
 $x - 1 < 3(x + 1)$
 $x > -2$
 $-2 < x \leq 3$
 6. 解: 去分母, 得 $2(x - 1) \geq 3(x - 3) + 6$.
 去括号, 得 $2x - 2 \geq 3x - 9 + 6$.
 移项, 得 $2x - 3x \geq -9 + 6 + 2$.
 合并同类项, 得 $-x \geq -1$.
 系数化为 1, 得 $x \leq 1$.

$\therefore$ 不等式的解集为 $x \leq 1$, 将解集在数轴上表示如下:



7. 解: $\begin{cases} x - 1 > 2x, & \text{①} \\ \frac{x - 1}{2} + x < -2. & \text{②} \end{cases}$

解不等式①, 得 $x < -1$.
 解不等式②, 得 $x < -1$.
 $\therefore$ 原不等式组的解集为 $x < -1$.
 将不等式组的解集在数轴上表示如下:



8. 解: 设小韦买 x 本笔记本可以享受打折优惠.
 依题意, 得 $15 \times 6 + 8x \geq 200$.
 解得 $x \geq 13\frac{3}{4}$.
 $\therefore x$ 为整数,
 $\therefore x$ 的最小值为 14.
 答: 小韦至少要买 14 本笔记本才能享受打折优惠.
 9. $5 \leq a < 6$ 10. $3 < y < 8$
 11. 解: (1) 设 A 型机器人模型的单价是 x 元, 则 B 型机器人模型的单价是 $(x - 200)$ 元.
 根据题意得 $\frac{2\,000}{x} = \frac{1\,200}{x - 200}$.
 解得 $x = 500$.
 经检验, $x = 500$ 是原方程的根.
 $\therefore x - 200 = 300$.
 答: A 型机器人模型的单价是 500 元, B 型机器人模型的单价是 300 元.
 (2) 设购买 A 型机器人模型 m 台, 则购买 B 型机器人模型 $(40 - m)$ 台.
 设购买 A 型和 B 型机器人模型共花费 w 元.
 由题意得 $40 - m \leq 3m$.
 解得 $m \geq 10$.
 $w = 500 \times 0.8m + 300 \times 0.8(40 - m)$,
 即 $w = 160m + 9\,600$.
 $\therefore 160 > 0$,
 $\therefore w$ 随 m 的减小而减小.
 $\therefore$ 当 $m = 10$ 时, w 取得最小值, 为 11 200.
 $\therefore 40 - m = 30$.
 答: 购买 A 型机器人模型 10 台和 B 型机器人模型 30 台时花费最少, 最少花费是 11 200 元.

8 一元二次方程及其应用

1. D 2. B 3. D
 4. 2 029 5. 3 或 -2

6. 解: (1) $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = 1$.

(2) $x_1 = -3, x_2 = -6$.

7. 2 或 3

8. 解: (1) ① $x_1 = 1, x_2 = 2$

② $x_1 = 2, x_2 = 3$

③ $x_1 = 3, x_2 = 4$

(2) $x^2 - (2n+1)x + n(n+1) = 0$

$x_1 = n, x_2 = n+1$

(3) 9 或 11.

9. 解: (1) $\because$ 篱笆的总长为 34 m, 菜地的前端各设计了两个宽 1 m 的小门, 且菜地的宽 AB 为 x m,

$\therefore$ 长 BC 为 $34 + 2 - 3x = (36 - 3x)$ m.

故答案为: $(36 - 3x)$.

(2) 根据题意得 $x(36 - 3x) = 96$.

整理得 $x^2 - 12x + 32 = 0$.

解得 $x_1 = 4, x_2 = 8$.

当 $x = 4$ 时, $36 - 3x = 36 - 3 \times 4 = 24 > 22$, 不符合题意, 舍去;

当 $x = 8$ 时, $36 - 3x = 36 - 3 \times 8 = 12 < 22$, 符合题意.

答: 当围成的菜地面积为 96 m^2 时, 宽 AB 为 8 m.

10. 解: (1) 设该品牌头盔销售量的月增长率为 x .

依题意, 得 $150(1+x)^2 = 216$. 解得 $x_1 = 0.2 = 20\%$, $x_2 = -2.2$ (不合题意, 舍去).

答: 该品牌头盔销售量的月增长率为 20% .

(2) 设该品牌头盔的实际售价为 y 元.

依题意, 得

$(y - 30)[600 - 10(y - 40)] = 10\ 000$.

整理, 得 $y^2 - 130y + 4\ 000 = 0$.

解得 $y_1 = 80$ (不合题意, 舍去), $y_2 = 50$.

答: 该品牌头盔的实际售价应定为 50 元/个.

9 一元二次方程根的判别式及根与系数的关系

1. C 2. D 3. B

4. ± 20 5. -2

6. A

7. (1) 证明: $\because a = 1, b = -2, c = -3m^2$,

$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3m^2) = 4 + 12m^2 > 0$.

$\therefore$ 方程总有两个不相等的实数根.

(2) 解: 由题意得

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2, \\ \alpha + 2\beta = 5, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} \alpha = -1, \\ \beta = 3. \end{cases}$$

$\therefore \alpha\beta = -3m^2, \therefore -3m^2 = -3. \therefore m = \pm 1$.

$\therefore m$ 的值为 ± 1 .

10 平面直角坐标系的认识与函数意义

1. B 2. A

3. $x \geq -2$ 且 $x \neq 1$

4. (1) $a < -2$

(2) A

(3) -2

5. A 6. D 7. A

8. 解: (1) $A(2, 3), B(-2, 3), C(-4, 0), D(-3, -3), E(2, -3), F(3, 0)$.

(2) 34.5

9. 解: 令点 P 第 n 次运动到点 P_n (n 为自然数) 处.

观察, 发现规律: $P_0(0, 0), P_1(1, 1), P_2(2, 0), P_3(3, -1), P_4(4, 0), P_5(5, 1), \dots$,

$\therefore P_{4n}(4n, 0), P_{4n+1}(4n+1, 1), P_{4n+2}(4n+2, 0), P_{4n+3}(4n+3, -1)$.

$\therefore 2\ 024 = 4 \times 506$,

$\therefore$ 点 P 第 2 024 次运动到点 $(2\ 024, 0)$ 处.

11 一次函数

1. D 2. D 3. A 4. D 5. C

6. 解: (1) $\because y - 2$ 与 $x + 1$ 成正比例,

$\therefore$ 设 $y - 2 = k(x + 1)$ (k 为常数, $k \neq 0$).

把 $x = 2, y = 8$ 代入, 得 $8 - 2 = k(2 + 1)$,

解得 $k = 2$.

$\therefore y - 2 = 2(x + 1)$, 即 $y = 2x + 4$.

(2) 当 $x = -4$ 时, $y = 2 \times (-4) + 4 = -4$.

7. 解: (1) 设直线 AB 的解析式是 $y = kx + b$.

根据题意得 $\begin{cases} 4k + b = 2, \\ 6k + b = 0. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} k = -1, \\ b = 6. \end{cases}$

$\therefore$ 直线 AB 的解析式是 $y = -x + 6$.

(2) 在 $y = -x + 6$ 中, 令 $x = 0$, 解得 $y = 6$.

$\therefore S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$.

(3) 设直线 OA 的解析式是 $y = mx$, 则 $4m = 2$,

解得 $m = \frac{1}{2}$. $\therefore$ 直线 OA 的解析式是 $y = \frac{1}{2}x$.

当 $\triangle OMC$ 的面积是 $\triangle OAC$ 面积的 $\frac{1}{4}$ 时,

点 M 的横坐标是 $\frac{1}{4} \times 4 = 1$.

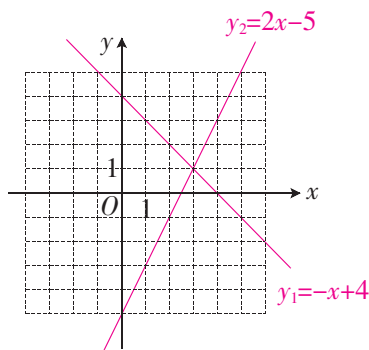
在 $y = \frac{1}{2}x$ 中, 当 $x = 1$ 时, $y = \frac{1}{2}$, 则点 M 的坐标是

$(1, \frac{1}{2})$;

在 $y = -x + 6$ 中, 当 $x = 1$ 时, $y = 5$, 则点 M 的坐标是 $(1, 5)$.

综上所述, 点 M 的坐标是 $(1, \frac{1}{2})$ 或 $(1, 5)$.

8. 解: 如图所示.



(1) $\because$ 一次函数 $y_1 = -x + 4$ 和 $y_2 = 2x - 5$ 的图象相交于点 $(3, 1)$,

$\therefore$ 方程组 $\begin{cases} y = -x + 4, \\ y = 2x - 5 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x = 3, \\ y = 1. \end{cases}$

(2) 由图可知, 当 $x < 3$ 时, $y_1 > y_2$;

当 $x < 2.5$ 时, $y_1 > 0$ 且 $y_2 < 0$.

9. 解: (1) 把点 A, B 的坐标代入 $y = kx + b (k \neq 0)$,

得 $\begin{cases} b = 1, \\ k + b = 2. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = 1, \\ b = 1. \end{cases}$

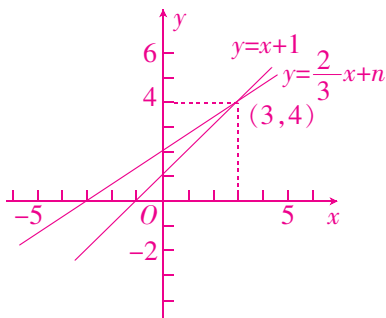
$\therefore$ 该函数的解析式为 $y = x + 1$.

由题意知点 C 的纵坐标为 4.

当 $y = x + 1 = 4$ 时, $x = 3, \therefore C(3, 4)$.

(2) $\because$ 当 $x < 3$ 时, 函数 $y = \frac{2}{3}x + n$ 的值大于函数 $y = x + 1$ 的值且小于 4,

$\therefore$ 如图所示, 当直线 $y = \frac{2}{3}x + n$ 过点 $(3, 4)$ 时满足题意.



代入 $(3, 4)$, 得 $4 = \frac{2}{3} \times 3 + n$, 解得 $n = 2$.

12 反比例函数

1. C 2. A 3. D 4. C 5. B 6. A

7. 3 8. $20 - \frac{20}{n+1}$

9. $(\frac{1}{2}, 1)$ 或 $(3, \frac{1}{6})$

10. 解: (1) 由题意, 将点 B 的坐标代入双曲线解析式 y

$$= \frac{m}{x}, \text{ 得 } 2 = \frac{m}{-1}.$$

解得 $m = -2$.

$\therefore$ 双曲线的解析式为 $y = -\frac{2}{x}$.

又 $\because$ 点 $A(2, a)$ 在双曲线上,

$\therefore a = -1, \therefore A(2, -1)$.

$\because$ 直线 $y = kx + b$ 经过 A, B 两点,

$\therefore \begin{cases} 2k + b = -1, \\ -k + b = 2. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = -1, \\ b = 1. \end{cases}$

$\therefore$ 直线 $y = kx + b$ 的解析式为 $y = -x + 1$.

(2) 由题意, 可分成两种情形.

① 当 M, N 在双曲线的同一支上时, 由双曲线 $y = -\frac{2}{x}$ 的增减性可知,

当 $x_1 < x_2$ 时, $y_1 < y_2$.

② 当 M, N 在双曲线的不同支上时,

$\because x_1 < x_2, \therefore x_1 < 0 < x_2$.

$\therefore$ 此时由图象可得 $y_1 > 0 > y_2$, 即当 $x_1 < x_2$ 时, $y_1 > y_2$.

(3) $x < -1$ 或 $0 < x < 2$.

13 生活中的一次函数与反比例函数

1. A 2. B 3. B

4. 解: (1) 设 h 关于 ρ 的函数解析式为 $h = \frac{k}{\rho}$.

把 $\rho = 1, h = 20$ 代入解析式, 得 $k = 1 \times 20 = 20$.

$\therefore h$ 关于 ρ 的函数解析式为 $h = \frac{20}{\rho}$.

(2) 把 $h = 25$ 代入 $h = \frac{20}{\rho}$, 得 $25 = \frac{20}{\rho}$, 解得 $\rho = 0.8$.

答: 该液体的密度 ρ 为 0.8 g/cm^3 .

5. 解: (1) 设每台 A 型电脑的销售利润为 a 元, 每台 B 型电脑的销售利润为 b 元,

则 $\begin{cases} 10a + 20b = 4000, \\ 20a + 10b = 3500. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 100, \\ b = 150. \end{cases}$

答: 每台 A 型电脑的销售利润为 100 元, 每台 B 型电脑的销售利润为 150 元.

(2) 根据题意得 $y = 100x + 150(100 - x)$,

即 $y = -50x + 15000$.

依题意有 $100 - x \leq 2x$,

解得 $x \geq 33 \frac{1}{3}$.

$\because y = -50x + 15000, -50 < 0$,

$\therefore y$ 随 x 的增大而减小.

$\because x$ 为正整数,

$\therefore$ 当 $x = 34$ 时, y 取得最大值,

此时 $100 - x = 66$.

答:该商店购进 A 型电脑 34 台、B 型电脑 66 台,才能使销售总利润最大.

6. 解:(1)如图,由图象可猜测 y 与 x 之间成反比例函数关系,

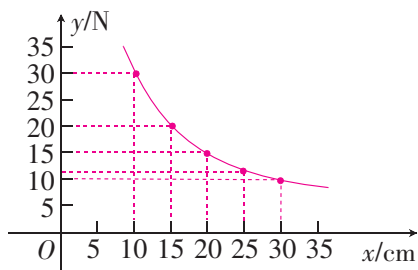


图 2

$\therefore$ 设 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$.

把 $x = 10, y = 30$ 代入,得 $k = 300$.

$\therefore y = \frac{300}{x}$,将其余各点的坐标代入验证均适合.

$\therefore y$ 与 x 的函数关系式为 $y = \frac{300}{x} (x > 0)$.

(2)把 $y = 24$ 代入 $y = \frac{300}{x}$,得 $x = 12.5$.

$\therefore$ 当弹簧秤的示数为 24 N 时,弹簧秤与点 O 的距离是 12.5 cm.

随着弹簧秤与点 O 的距离不断减小,弹簧秤上的示数将不断增大.

14 二次函数(1)

1. C 2. C 3. B

4. 解:设二次函数的解析式为 $y = a(x-3)(x+1)$.

把 $(0, -6)$ 代入,得 $-3a = -6$,解得 $a = 2$.

所以此函数的解析式为 $y = 2(x-3)(x+1)$,

即 $y = 2x^2 - 4x - 6$.

5. C

6. 解:(1) $\because$ 图象经过 $A(2,0), B(0, -6)$ 两点,

$$\therefore \begin{cases} -2 + 2b + c = 0, \\ c = -6. \end{cases} \text{解得} \begin{cases} b = 4, \\ c = -6. \end{cases}$$

$\therefore$ 这个二次函数的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$.

$$(2)y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6 = -\frac{1}{2}(x^2 - 8x + 16) + 8 - 6$$

$$= -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 2,$$

$\therefore$ 该二次函数图象的顶点坐标为 $(4,2)$,对称轴为直线 $x = 4$.

$$\text{图象与 } x \text{ 轴相交时}, 0 = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 2,$$

解得 $x = 6$ 或 2 .

$\therefore$ 图象与 x 轴的另一个交点为 $(6,0)$.

(3)作图略.

7. 解:(1)令 $-\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = 0$,

解得 $x_1 = 2, x_2 = -4$.

$\therefore A(2,0), B(-4,0)$.

令 $x = 0$,得 $y = 4$. $\therefore C(0,4)$.

(2)设点 P 的坐标为 $(m,0)$.

$\therefore B(-4,0), C(0,4)$,

$$\therefore BC = 4\sqrt{2}, BP^2 = (m+4)^2, CP^2 = m^2 + 16.$$

当 $\triangle PBC$ 是等腰三角形时,分三种情况:

①当 $BP = CP$ 时,有 $(m+4)^2 = m^2 + 16$,解得 $m = 0$.

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(0,0)$.

②当 $BP = BC$ 时,有 $(m+4)^2 = (4\sqrt{2})^2$,解得 $m = -4 + 4\sqrt{2}$ 或 $m = -4 - 4\sqrt{2}$.

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-4 + 4\sqrt{2}, 0)$ 或 $(-4 - 4\sqrt{2}, 0)$.

③当 $CP = CB$ 时,有 $m^2 + 16 = (4\sqrt{2})^2$,解得 $m = 4$ 或 $m = -4$ (不合题意,舍去).

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(4,0)$.

综上所述,点 P 的坐标为 $(0,0)$ 或 $(4,0)$ 或 $(-4 + 4\sqrt{2}, 0)$ 或 $(-4 - 4\sqrt{2}, 0)$.

8. 解:(1)1

(2)当 $a > 0$ 时, $\therefore$ 图象的对称轴为直线 $x = 1$,

$\therefore$ 当 $x = 1$ 时, y 有最小值 $-a$,当 $x = 3$ 时, y 有最大值 $3a$,

$$\therefore 3a - (-a) = 4. \therefore a = 1.$$

$\therefore$ 二次函数的解析式为 $y = x^2 - 2x$.

当 $a < 0$ 时,同理可得 y 的最大值为 $-a$, y 的最小值为 $3a$,

$$\therefore -a - 3a = 4. \therefore a = -1.$$

$\therefore$ 二次函数的解析式为 $y = -x^2 + 2x$.

综上所述,二次函数的解析式为 $y = x^2 - 2x$ 或 $y = -x^2 + 2x$.

(3) $\because a < 0$,对称轴为直线 $x = 1$,

$\therefore x \leq 1$ 时, y 随 x 的增大而增大, $x > 1$ 时, y 随 x 的增大而减小, $x = -1$ 和 $x = 3$ 时的函数值相等.

$\therefore t \leq x_1 \leq t+1, x_2 \geq 3$ 时,均满足 $y_1 \geq y_2$,

$$\therefore t \geq -1, t+1 \leq 3. \therefore -1 \leq t \leq 2.$$

15 二次函数(2)

1. D 2. B 3. C 4. B

5. 解:(1) $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过 $A(-2,0), B(2,2), C(0,2)$ 三点,

$$\therefore \begin{cases} 4a - 2b + c = 0, \\ 4a + 2b + c = 2, \\ c = 2, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -\frac{1}{4}, \\ b = \frac{1}{2}, \\ c = 2. \end{cases} \quad \text{画图略.}$$

$$(2) \textcircled{1} x_1 = -2, x_2 = 4$$

$$\textcircled{2} -2 < x < 0 \text{ 或 } 2 < x < 4$$

$$6. \text{解: (1)} \because y = ax^2 + 2ax - 3a = a(x^2 + 2x - 3) = a(x + 3)(x - 1),$$

$\therefore$ 该二次函数的图象经过点 $(-3, 0), (1, 0)$.

$\therefore$ 点 A, C 不在抛物线上.

$\therefore$ 把点 B 的坐标代入 $y = ax^2 + 2ax - 3a$, 得 $a - 2a - 3a = 4$, 解得 $a = -1$.

故函数解析式为 $y = -x^2 - 2x + 3$.

(2) 由已知得抛物线的对称轴为直线 $x = -1$,

$\therefore$ 当 $x = -1$ 时, $y = -4$.

$\therefore a - 2a - 3a = -4$.

$\therefore a = 1$.

$\therefore y = x^2 + 2x - 3$, 且经过点 $(0, -3)$.

$\therefore$ 抛物线向右平移 $k (k > 1)$ 个单位后的对称轴在 y 轴右侧, 又函数 y' 在 $-3 \leq x \leq 0$ 的范围内有最小值 -3 ,

$\therefore$ 平移后的图象也经过点 $(0, -3)$.

$\therefore$ 由对称性可得平移前的对应点为 $(-2, -3)$.

$\therefore k = 2$.

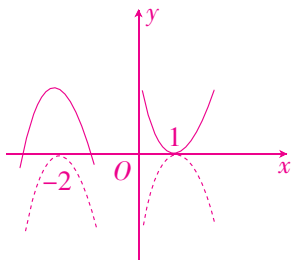
$$7. \text{解: (1) 对于一元二次方程 } x^2 - (m + 1)x + \frac{1}{2}(m^2 + 1) = 0,$$

$$\Delta = (m + 1)^2 - 2(m^2 + 1) = -m^2 + 2m - 1 = -(m - 1)^2.$$

$\therefore$ 方程有实数根, $\therefore -(m - 1)^2 \geq 0, \therefore m = 1$.

(2) 由(1)可知 $y = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$,

根据题意画出示意图如图:



平移后图象的解析式为 $y = -(x + 2)^2 + 2 = -x^2 - 4x - 2$.

$$(3) \text{由} \begin{cases} y = 2x + n, \\ y = -x^2 - 4x - 2 \end{cases} \text{消去 } y \text{ 得}$$

$$x^2 + 6x + n + 2 = 0.$$

由题意知 $\Delta \geq 0, \therefore 36 - 4n - 8 \geq 0, \therefore n \leq 7$.

$\therefore n \geq m, m = 1, \therefore 1 \leq n \leq 7$.

$$\text{令 } y' = n^2 - 4n = (n - 2)^2 - 4,$$

$\therefore n = 2$ 时, y' 的值最小, 最小值为 -4 ;

$n = 7$ 时, y' 的值最大, 最大值为 21 .

$\therefore n^2 - 4n$ 的最大值为 21 , 最小值为 -4 .

16 二次函数(3)

1. C

2. 解: (1) 由题意, 得 $A(-3, 0), B(3, 0), C(0, 3)$,

$\therefore$ 可设 $y = a(x + 3)(x - 3)$.

将 $(0, 3)$ 代入 $y = a(x + 3)(x - 3)$,

$$\text{得 } a = -\frac{1}{3}.$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{3}x^2 + 3$.

(2) 小船可以通过.

理由: 当 $x = 2$ 时, $y = -\frac{1}{3} \times 2^2 + 3 = \frac{5}{3}$.

$$\therefore \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3} > 0.5,$$

$\therefore$ 暴雨后这艘小船能从这座拱桥下通过.

3. 19

4. 解: (1) 设今年这款消毒洗衣液每瓶的进价是 x 元, 则去年这款消毒洗衣液每瓶的进价是 $(x - 4)$ 元.

$$\text{根据题意得 } \frac{1440}{x} = \frac{1200}{x - 4}, \text{ 解得 } x = 24.$$

经检验, $x = 24$ 是方程的解.

答: 今年这款消毒洗衣液每瓶的进价是 24 元.

(2) 设这款消毒洗衣液每瓶的售价定为 m 元, 销售这款洗衣液每周获得的利润为 w 元.

$$\text{根据题意得 } w = (m - 24)[100(36 - m) + 600] = -100m^2 + 6600m - 100800.$$

$$\therefore -100 < 0,$$

$$\therefore \text{当 } m = -\frac{6600}{2 \times (-100)} = 33 \text{ 时, 利润最大,}$$

最大利润为 8100 元.

5. 解: (1) $\because$ 抛物线 $C_1: y = a(x - 3)^2 + 2$,

$\therefore$ 抛物线 C_1 的最高点的坐标为 $(3, 2)$.

$\therefore$ 点 $A(6, 1)$ 在抛物线 $C_1: y = a(x - 3)^2 + 2$ 上,

$$\therefore 1 = a(6 - 3)^2 + 2. \therefore a = -\frac{1}{9}.$$

$$\therefore y = -\frac{1}{9}(x - 3)^2 + 2.$$

把 $x = 0$ 代入, 得 $c = 1$.

(2) $\because$ 嘉嘉在 x 轴上方 1 m 的高度上, 且到点 A 水平距离不超过 1 m 的范围内可以接到沙包, $\therefore$ 嘉嘉在点 $(5, 1)$ 和点 $(7, 1)$ 之间能接到沙包.

当抛物线 C_2 经过点 $(5, 1)$ 时, $1 = -\frac{1}{8} \times 25 + \frac{n}{8} \times 5 + 1 + 1$, 解得 $n = \frac{17}{5}$.

当抛物线 C_2 经过点 $(7, 1)$ 时, $1 = -\frac{1}{8} \times 49 + \frac{n}{8} \times 7 + 1 + 1$, 解得 $n = \frac{41}{7}$.

$$\therefore \frac{17}{5} \leq n \leq \frac{41}{7}.$$

$\therefore$ 符合条件的 n 的整数值为 4 或 5.

17 线段、角、相交线与平行线

1. B 2. C 3. A 4. A 5. B

6. 144° 7. 2

8. (1) 55°

(2) 70°

9. B 10. C

11. 32°

12. 解: (1) AE 与 FC 平行.

理由: $\because \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ, \angle 2 + \angle CDB = 180^\circ,$

$$\therefore \angle CDB = \angle 1.$$

$$\therefore AE \parallel FC.$$

(2) AD 与 BC 平行.

理由: $\because AE \parallel FC, \therefore \angle C + \angle ABC = 180^\circ.$

$$\because \angle A = \angle C, \therefore \angle A + \angle ABC = 180^\circ. \therefore AD \parallel BC.$$

(3) DA 平分 $\angle BDF$. 理由: 如图所示,

$$\because BC \text{ 平分 } \angle EBD, \therefore \angle CBE = \angle CBD.$$

$$\because AD \parallel BC, AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle CBE = \angle C = \angle ADF, \angle CBD = \angle ADB,$$

$$\therefore \angle ADF = \angle ADB. \therefore DA \text{ 平分 } \angle BDF.$$

13. $45^\circ, 60^\circ, 105^\circ$ 或 135°

18 三角形与全等三角形

1. C 2. B 3. C 4. B

5. 证明: $\because AB = AC,$

$$\therefore \angle B = \angle C.$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中,

$$\begin{cases} AB = AC, \\ \angle B = \angle C, \\ BD = CE, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE (\text{SAS}).$$

$$\therefore AD = AE.$$

6. C

7. 3

8. (1) 证明: $\because DM \perp AB, DN \perp BC,$

$$\therefore \angle DMA = \angle DNC = 90^\circ.$$

$\because D$ 为 AC 的中点,

$$\therefore DA = DC. \because DM = DN,$$

$$\therefore \text{Rt} \triangle ADM \cong \text{Rt} \triangle CDN (\text{HL}).$$

(2) 解: 如图, 连接 BD .

在 $\text{Rt} \triangle BDM$ 和 $\text{Rt} \triangle BDN$ 中,

$$\begin{cases} BD = BD, \\ DM = DN, \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt} \triangle BDM \cong \text{Rt} \triangle BDN (\text{HL}).$$

$$\therefore BM = BN.$$

由 (1) 知 $\triangle ADM \cong \triangle CDN,$

$$\therefore AM = CN.$$

$$\therefore BM + AM = BN + CN, \text{ 则 } AB = BC.$$

$$\text{又} \because AB = AC, \therefore AB = AC = BC.$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形. $\because D$ 是 AC 的中点,

$$\therefore BD \perp AC, BD \text{ 平分 } \angle ABC, \angle A = \angle ABC = \angle C = 60^\circ, \therefore \angle ADM = 30^\circ.$$

$$\text{又} \because AM = 2, \therefore AD = 2AM = 4.$$

$$\therefore DM = \sqrt{AD^2 - AM^2} = 2\sqrt{3}.$$

$$\therefore AC = 2AD = 8 = AB.$$

$$\therefore BM = AB - AM = 8 - 2 = 6 = BN.$$

$$\therefore \text{四边形 } DMBN \text{ 的周长} = BM + BN + DM + DN = 6 + 6 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 12 + 4\sqrt{3}.$$

9. (1) 证明: 如图所示,

$$\because \angle BAC = 90^\circ, AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABC = 45^\circ.$$

$$\because BD \perp AB,$$

$$\therefore \angle DBC = 45^\circ.$$

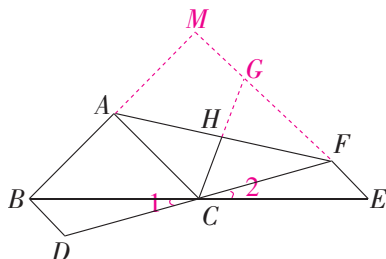
$$\because CE = BC, \angle 1 = \angle 2, CF = DC.$$

$$\therefore \triangle CBD \cong \triangle CEF.$$

$$\therefore \angle E = \angle DBC = 45^\circ.$$

$$\therefore EF \parallel BD.$$

$$\therefore AB \perp EF.$$



(2) 证明: 如图, 延长 BA, EF 交于点 M , 延长 CH 交 ME 于点 G .

$$\because EF \perp AB, AC \perp AB,$$

$$\therefore ME \parallel AC. \therefore \angle CGE = \angle ACG.$$

$\because CH$ 是 $\angle ACE$ 的平分线,

$$\therefore \angle ACG = \angle ECG.$$

$$\begin{aligned}\therefore \angle CGE &= \angle ECG. \\ \therefore EG &= EC. \\ \therefore \triangle CBD &\cong \triangle CEF, \\ \therefore EF &= BD. \because CE = CB, \\ \therefore EG &= CB.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{又} \because BC &= AB + BD, \\ \therefore EG &= AB + BD = AC + EF, \\ \text{即 } FG + EF &= AC + EF.\end{aligned}$$

$$\therefore AC = FG.$$

在 $\triangle AHC$ 和 $\triangle FHG$ 中,

$$\begin{cases} \angle AHC = \angle FHG, \\ \angle ACH = \angle FGH, \\ AC = FG, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AHC \cong \triangle FHG (\text{AAS}). \therefore AH = FH.$$

19 等腰三角形

1. B 2. C 3. D 4. B 5. D 6. D

7. 解: $\because AB = AC$, 点 D 是 BC 的中点,

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD.$$

$$\because \angle BAD = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = 50^\circ.$$

$$\because AD = AE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AED = (180^\circ - 50^\circ) \div 2 = 65^\circ.$$

$$\therefore \angle CED = 180^\circ - \angle AED = 115^\circ.$$

8. C

9. 解: 如图所示.

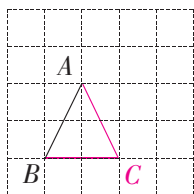


图 1

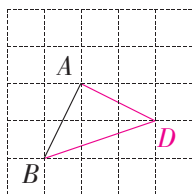


图 2

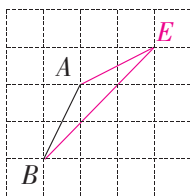


图 3

10. (1) 证明: $\because$ 直线 $a \parallel AB$, 且 $\triangle ABC$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle ACE = \angle BAC = \angle ABD = 60^\circ, AB = AC.$$

$$\because \angle DAE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE.$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中,

$$\begin{cases} \angle B = \angle ACE, \\ AB = AC, \\ \angle BAD = \angle CAE, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE (\text{ASA}).$$

$$\therefore AD = AE. \text{ 又} \because \angle DAE = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle ADE \text{ 是等边三角形.}$$

$$(2) AC = CD + CE$$

$$11. 2, 4 - 2\sqrt{3} \text{ 或 } 4 + 2\sqrt{3}$$

20 直角三角形与勾股定理

1. B 2. B 3. B 4. C 5. D

6. (1) 证明: 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 和 $\text{Rt} \triangle DCB$ 中,

$$\begin{cases} BC = CB, \\ AC = DB, \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt} \triangle ABC \cong \text{Rt} \triangle DCB (\text{HL}).$$

$$(2) \text{解: } \because \text{Rt} \triangle ABC \cong \text{Rt} \triangle DCB,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle ACB = 30^\circ.$$

$$\therefore OB = OC = 2.$$

$$\because \angle A = 90^\circ, \angle ACB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 60^\circ.$$

$$\therefore \angle ABO = 30^\circ.$$

$$\therefore OA = \frac{1}{2} OB = 1.$$

$$\therefore AB = \sqrt{OB^2 - OA^2} = \sqrt{3}.$$

$$\therefore S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} OC \cdot AB = \sqrt{3}.$$

7. 解: (1) $\because$ 点 C 的坐标为 $(3, \sqrt{3})$, $BC \perp x$ 轴,

$$\therefore OB = 3, BC = \sqrt{3}.$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1,$$

$$OC = \sqrt{OB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}.$$

(2) 解: $\triangle OAC$ 是直角三角形. 理由如下:

$$\text{由 (1) 得 } AB = 1, OC = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore OA = OB + AB = 4.$$

$$\therefore OA^2 = 16, AC^2 = 4, OC^2 = 12,$$

$$\therefore OA^2 = AC^2 + OC^2.$$

$$\therefore \triangle OAC \text{ 是直角三角形.}$$

8. C

9. 解: (1) 如图 1, 线段 AD 即为所求;

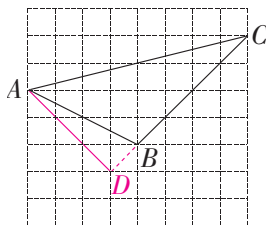


图 1

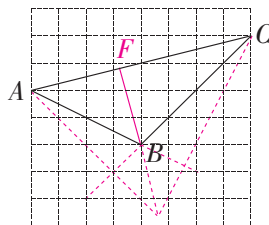


图 2

(2) 如图 2, 线段 BF 即为所求.

10. 解: (1) 在 $\triangle ACD$ 中,

$$\because AC^2 = 25, CD^2 = 1, AD^2 = 26, \therefore AC^2 + CD^2 = AD^2.$$

$\therefore \triangle ACD$ 是直角三角形, 且 $\angle C = 90^\circ$.

$$\because BD = 4, \therefore BC = 4 + 1 = 5.$$

$$\therefore \text{在 Rt} \triangle ACB \text{ 中}, AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5\sqrt{2}.$$

$$(2) \because AC = BC = 5, \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 45^\circ.$$

$\therefore$ 当 $\triangle BDE$ 是直角三角形时需分两种情况分析:

$$\textcircled{1} \text{ 当 } \angle BDE = 90^\circ \text{ 时}, BD = DE = 4,$$

$$\therefore \text{在 Rt} \triangle BDE \text{ 中}, BE = \sqrt{BD^2 + DE^2} = 4\sqrt{2}.$$

$$\therefore AE = AB - BE = 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } \angle BED = 90^\circ \text{ 时},$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DE = \frac{1}{2} BD \cdot AC,$$

$$\text{即 } 5\sqrt{2} DE = 4 \times 5,$$

$$\text{解得 } DE = 2\sqrt{2}. \therefore BE = DE = 2\sqrt{2}.$$

$$\therefore AE = AB - BE = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

综上所述, AE 的长为 $\sqrt{2}$ 或 $3\sqrt{2}$.

21 锐角三角函数及其应用

1. C 2. C

$$3. \frac{1}{2} \quad 4. 1$$

5. 解: (1) 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$.

$$\because \angle A = 60^\circ, \tan A = \frac{BC}{AC},$$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \sqrt{3}.$$

$$\because AC = 3,$$

$$\therefore BC = 3\sqrt{3}.$$

$$(2) \text{ 在 } \text{Rt} \triangle ABC \text{ 中}, \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{7},$$

$$\therefore BC = \frac{4}{7} AB.$$

$$\because AC^2 = AB^2 - BC^2, AC = 3,$$

$$\therefore AB^2 - \left(\frac{4}{7} AB\right)^2 = 3^2.$$

$$\therefore AB = \frac{7}{11} \sqrt{33}.$$

6. 10

7. 解: (1) $\because \sin \angle BCD = \frac{3}{5}, DE \perp BC, \therefore \frac{DE}{CD} = \frac{3}{5}.$

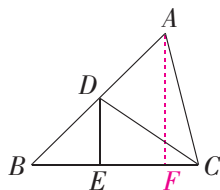
$$\because CD = 5,$$

$$\therefore DE = 3, CE = 4.$$

$$\because \angle B = 45^\circ, \therefore DE = BE = 3.$$

$$\therefore BC = BE + CE = 7.$$

(2) 如图, 过点 A 作 $AF \perp BC$ 于点 F ,



$$\therefore DE \parallel AF.$$

$\because$ 点 D 是 AB 的中点,

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABF$ 的中位线.

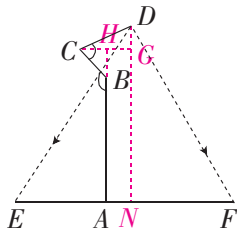
$$\therefore AF = 2DE, BF = 2BE.$$

由(1)知 $DE = BE = 3, \therefore AF = 6, BF = 6.$

$$\therefore CF = BC - BF = 1.$$

$$\therefore \tan \angle ACB = \frac{AF}{CF} = 6.$$

8. 解: (1) 如图, 过点 D 作 $DN \perp EF$ 于点 N , 过点 C 作 $CG \perp DN$ 于点 G , 延长 AB 交 CG 于点 H , 由题意可得 $AH \perp CG$.



$$\because \angle ABC = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle HBC = 45^\circ.$$

$$\therefore CH = BH = \frac{\sqrt{2}}{5}, \angle HCB = 45^\circ.$$

$$\because \angle DCB = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle DCG = 30^\circ.$$

$$\therefore DG = \frac{1}{2} CD = 0.3.$$

$$\therefore DN = DG + BH + AB = 0.3 + \frac{\sqrt{2}}{5} + 1.2 = 1.5 + \frac{\sqrt{2}}{5} \approx$$

1.78.

$\therefore$ 光源 D 离地面的高度约为 1.78 m.

(2) 如图,

$$\text{由题意得 } EN = FN = \frac{1}{2} EF = 2.492 \times \frac{1}{2} = 1.246.$$

$$\therefore \tan \angle FDN = \frac{NF}{DN} \approx \frac{1.246}{1.78} = 0.7.$$

$$\therefore \angle FDN \approx 35^\circ.$$

$$\therefore \angle EDF = 2 \angle FDN \approx 70^\circ.$$

$$\therefore \angle EDF \text{ 的度数约为 } 70^\circ.$$

22 多边形与平行四边形

1. B 2. A 3. A

4. 5 5. 540 6. 30° 7. 45

8. 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
 $\therefore AD = BC, AD \parallel BC$.
 $\therefore DE = BF$,
 $\therefore AE = CF$.
 又 $\because AE \parallel CF$,
 $\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.
 $\therefore AF = CE$.

9. A

10. 证明: (1) $\because D, E$ 分别为 AB, AC 的中点,
 $\therefore AE = CE, DE \parallel BC$.

$$\text{在 } \triangle AED \text{ 与 } \triangle CEF \text{ 中, } \begin{cases} DE = FE, \\ \angle AED = \angle CEF, \\ AE = CE, \end{cases}$$

$\therefore \triangle CEF \cong \triangle AED$ (SAS).

(2) 由 (1) 得 $\triangle CEF \cong \triangle AED$,

$\therefore \angle A = \angle FCE$.

$\therefore BD \parallel CF$.

由 (1) 知 $DF \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $DBCF$ 是平行四边形.

11. (1) 证明: $\because D, G$ 分别是 AB, AC 的中点,

$\therefore DG \parallel BC, DG = \frac{1}{2}BC$.

$\because E, F$ 分别是 OB, OC 的中点,

$\therefore EF \parallel BC, EF = \frac{1}{2}BC$.

$\therefore DG = EF, DG \parallel EF$.

$\therefore$ 四边形 $DEFG$ 是平行四边形.

(2) 解: ① $\because \angle OBC$ 和 $\angle OCB$ 互余,

$\therefore \angle OBC + \angle OCB = 90^\circ$.

$\therefore \angle BOC = 90^\circ$.

$\because M$ 为 EF 的中点, $OM = 3$,

$\therefore EF = 2OM = 6$.

由 (1) 知四边形 $DEFG$ 是平行四边形,

$\therefore DG = EF = 6$.

② $\because OC, AC$ 的中点分别是 F, G ,

$\therefore GF = \frac{1}{2}AO = 4$.

$\therefore$ 四边形 $DEFG$ 的周长是 $2 \times (4 + 6) = 20$.

12. (1, 4), (6, 4) 或 (0, 4)

23 矩形与菱形

1. B 2. A 3. D 4. C

5. 5

6. (1) 证明: $\because DE \parallel BC, DF \parallel AC$,

$\therefore$ 四边形 $ECFD$ 为平行四边形.

$\because \angle C = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ECFD$ 是矩形.

(2) 解: $\because \angle C = 90^\circ, CF = 2, CE = 4$,

$\therefore EF = \sqrt{CF^2 + CE^2} = 2\sqrt{5}$.

设点 C 到 EF 的距离为 h .

$\therefore S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2}CE \cdot CF = \frac{1}{2}EF \cdot h$,

$\therefore 2 \times 4 = 2\sqrt{5}h$.

$\therefore h = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore$ 点 C 到 EF 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

7. $\frac{84}{25}$

8. 解: (1) 如图 1, 点 M 即为所求;

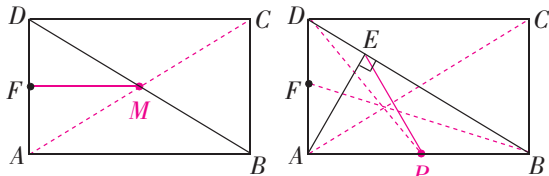


图 1

(2) 如图 2, 点 P 即为所求.

9. (1) ①或②或③

(2) 证明: 添加①.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

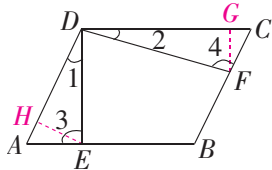
$\therefore \angle A = \angle C$.

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CDF$ 中,

$\therefore \angle 1 = \angle 2, AE = CF$,

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDF$ (AAS).

$\therefore AD = CD$. $\therefore \square ABCD$ 为菱形.



添加②.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore \angle A = \angle C$.

分别过点 E, F 作 $EH \perp AD, FG \perp DC$, 垂足分别为 H, G .

$\therefore AE = CF$,

$\therefore \triangle AEH \cong \triangle CFG$ (AAS).

$\therefore EH = FG, AH = CG$.

$\therefore DE = DF$,

$\therefore \text{Rt} \triangle DEH \cong \text{Rt} \triangle DFG$ (HL).

$\therefore DH = DG$.

$\therefore DH + AH = DG + CG$, 即 $AD = DC$.

∴ $\square ABCD$ 为菱形.

添加③.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $\angle A = \angle C$.

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CDF$ 中,

∵ $\angle 3 = \angle 4, AE = CF$,

∴ $\triangle ADE \cong \triangle CDF (ASA)$.

∴ $AD = CD$. ∴ $\square ABCD$ 为菱形.

24 正方形

1. A 2. B 3. C 4. C 5. D

6. $\sqrt{2}$

7. (1) 证明: ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

∴ $\angle ABC = 90^\circ$.

∵ $\angle OAB = 45^\circ$,

∴ $\angle ACB = 90^\circ - \angle OAB = 45^\circ = \angle CAB$.

∴ $AB = BC$.

∴ 矩形 $ABCD$ 是正方形.

(2) 解: 答案不唯一, 添加的条件可以是 $AB = AD$.

8. (1) 证明: ∵ $DE \perp BC$,

∴ $\angle DFB = 90^\circ$.

∵ $\angle ACB = 90^\circ$,

∴ $\angle ACB = \angle DFB$.

∴ $AC \parallel DE$.

∵ $MN \parallel AB$, 即 $CE \parallel AD$,

∴ 四边形 $ADEC$ 是平行四边形.

∴ $CE = AD$.

(2) 解: 四边形 $BECD$ 是菱形.

理由: ∵ D 为 AB 的中点,

∴ $AD = BD$.

∵ $CE = AD$,

∴ $BD = CE$.

∵ $BD \parallel CE$,

∴ 四边形 $BECD$ 是平行四边形.

∵ $DE \perp BC$,

∴ 四边形 $BECD$ 是菱形.

(3) 解: 当 $\angle A = 45^\circ$ 时, 四边形 $BECD$ 是正方形.

9. A

25 图形的轴对称与中心对称

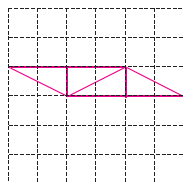
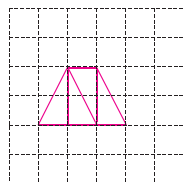
1. B 2. C

3. $(-5, -4)$ 4. $21\sqrt{2}$

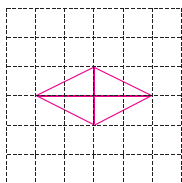
5. 解: 答案不唯一, 如图.



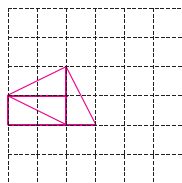
是轴对称图形
不是中心对称图形



是中心对称图形
不是轴对称图形



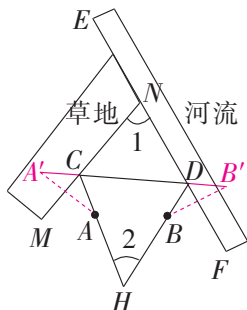
即是轴对称图形
又是中心对称图形



即不是轴对称图形
又不是中心对称图形

6. C

7. 解: 如图, 作点 A 关于 MN 的对称点 A' , 点 B 关于 EF 的对称点 B' , 依题意有点 A', B' 在直线 CD 上.



∵ $\angle 2 = 180^\circ - (\angle ACD + \angle BDC)$, $\angle ACD = 180^\circ - 2\angle NCD$, $\angle BDC = 180^\circ - 2\angle NDC$,
∴ $\angle 2 = 180^\circ - [360^\circ - 2(\angle NCD + \angle NDC)]$
= $180^\circ - [360^\circ - 2(180^\circ - \angle 1)]$
= $180^\circ - 2\angle 1 = 180^\circ - 2\alpha$.

8. (1) 证明: ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

∴ $AB \parallel CD$. ∴ $\angle BAP = \angle E$, $\angle B = \angle BCE$.

∵ 点 P 是 BC 的中点, ∴ $BP = CP$.

∴ $\triangle ABP \cong \triangle ECP (AAS)$.

(2) 解: ① ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形, ∴ $AD \parallel BC$.

∴ $\angle APB = \angle FAP$.

由折叠得 $\angle APB = \angle APF$, ∴ $\angle FAP = \angle APF$.

∴ $FA = FP$.

矩形 $ABCD$ 中, $AB = 6, AD = 8$, ∴ $BC = AD = 8$.

∵ 点 P 是 BC 的中点, ∴ $BP = CP = 4$.

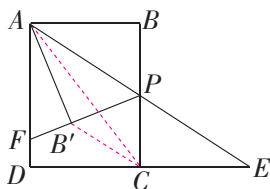
由折叠得 $AB' = AB = 6, PB' = PB = 4, \angle B = \angle AB'P = \angle AB'F = 90^\circ$.

设 $FA = x$, 则 $FP = x$, ∴ $FB' = x - 4$.

在 $\text{Rt}\triangle AB'F$ 中, $AF^2 = B'F^2 + B'A'^2$,

∴ $x^2 = (x - 4)^2 + 6^2$. 解得 $x = \frac{13}{2}$, 即 $AF = \frac{13}{2}$.

②如图,连接 $B'C, AC$.



由折叠得 $AB' = AB = 6, PB' = PB$,

$\therefore \triangle PCB'$ 的周长 $= CP + PB' + CB' = CB + CB' = 8 + CB'$.

$\therefore AB' + B'C > AC$,

$\therefore$ 当点 B' 恰好位于对角线 AC 上时, $CB' + AB'$ 最小.

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB = 6, BC = 8$,

$\therefore AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

$\therefore CB'$ 的最小值 $= AC - AB' = 4$.

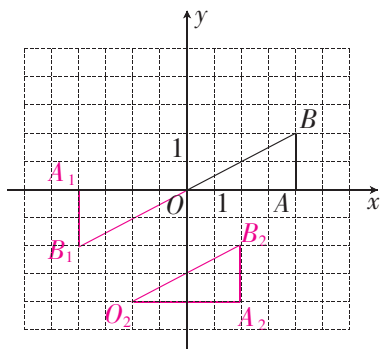
$\therefore \triangle PCB'$ 周长的最小值 $= 8 + CB' = 8 + 4 = 12$.

26 图形的平移与旋转

1. A 2. D 3. A

4. $(-3, -4)$ 5. $3\sqrt{2}$ 6. 20 7. $(2, 4)$ 8. A

9. 解: (1) $\triangle OA_1B_1$ 如图所示; $B_1(-4, -2)$.



(2) $\triangle OA_2B_2$ 如图所示; $B_2(2, -2)$.

(3) $\triangle OA_1B_1$ 与 $\triangle O_2A_2B_2$ 成中心对称, 对称中心的坐标是 $(-1, -2)$.

10. 解: (1) ① 30

② $CA + CF = \sqrt{2}CE$.

理由: 如图 1, 过点 E 作 $ME \perp EC$ 交 CA 的延长线于点 M .

$\therefore \angle ABC = 90^\circ, AB = BC, \therefore \angle ACB = 45^\circ$.

$\therefore \angle M = 45^\circ. \therefore \angle M = \angle ECM. \therefore ME = EC$.

$\therefore$ 将线段 AE 绕点 E 顺时针旋转 90° 得到 EF ,

$\therefore AE = EF, \angle AEF = 90^\circ$.

$\therefore \angle AEM = \angle CEF$.

$\therefore \triangle FEC \cong \triangle AEM (\text{SAS}). \therefore CF = AM$.

$\therefore CA + AM = CA + CF = CM$.

$\therefore \triangle CME$ 为等腰直角三角形,

$\therefore CM = \sqrt{2}CE. \therefore CA + CF = \sqrt{2}CE$.

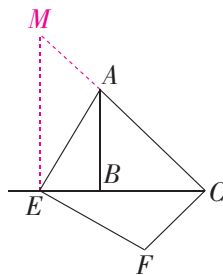


图 1

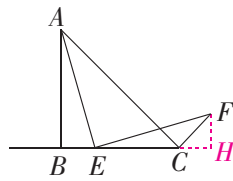


图 2

(2) 不成立.

如图 2, 过点 F 作 $FH \perp BC$, 交 BC 的延长线于点 H , 则 $\angle H = \angle ABE = 90^\circ$.

由题意得 $\angle AEF = 90^\circ, AE = EF$.

$\therefore \angle BAE + \angle AEB = \angle AEB + \angle FEH = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAE = \angle FEH$.

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle EHF (\text{AAS})$.

$\therefore FH = BE, EH = AB = BC. \therefore CH = BE = FH$.

$\therefore \triangle FHC$ 为等腰直角三角形.

$\therefore CH = BE = \frac{\sqrt{2}}{2}FC$.

$\therefore EC = BC - BE = \frac{\sqrt{2}}{2}AC - \frac{\sqrt{2}}{2}FC$, 即 $CA - CF = \sqrt{2}CE$.

27 图形的相似与位似

1. B 2. C 3. B

4. 6

5. (1) 证明: $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$, 即 $AD \parallel BE$.

$\therefore \angle DAF = \angle CEF, \angle ADF = \angle ECF$.

$\therefore \triangle ADF \sim \triangle ECF$.

(2) 解: $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

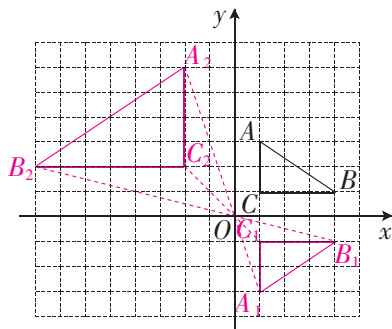
$\therefore AD = BC, AB = CD = 8$.

$\therefore CE = \frac{1}{3}AD$, 即 $\frac{AD}{CE} = 3$.

$\therefore \triangle ADF \sim \triangle ECF$,

$\therefore \frac{AD}{CE} = \frac{DF}{CF}$, 即 $\frac{DF}{CF} = 3. \therefore DF = \frac{3}{4}CD = 6$.

6. 解: (1) 如图, $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求, $B_1(4, -1)$.



(2) 如图, $\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求, $A_2(-2, 6)$.

7. 证明: (1) $\because AD \parallel BC, \therefore \angle ACF = \angle DAC$.

$$\because \angle FAC = \angle ADE, AC = AD,$$

$$\therefore \triangle ACF \cong \triangle DAE (ASA).$$

$$\therefore DE = AF.$$

$$(2) \because \triangle ACF \cong \triangle DAE, \therefore \angle AFC = \angle DEA.$$

$$\therefore \angle AFB = \angle DEC.$$

$$\because \angle ABC = \angle CDE, \therefore \triangle ABF \sim \triangle CDE.$$

$$\therefore \frac{AF}{CE} = \frac{BF}{DE}, \therefore AF \cdot DE = BF \cdot CE.$$

$$\because AF = DE, \therefore AF^2 = BF \cdot CE.$$

8. 解: (1) $\because CD = 2BD, CE = 2AE,$

$$\therefore \frac{CD}{BD} = \frac{CE}{AE} = 2.$$

$$\therefore \frac{CE}{AC} = \frac{CD}{BC} = \frac{2}{3}.$$

$$\because \angle C = \angle C, \therefore \triangle CDE \sim \triangle CBA.$$

$$\therefore DE:AB = CD:BC = 2:3.$$

$$(2) \because \triangle CDE \sim \triangle CBA, \therefore \angle CED = \angle CAB.$$

$$\therefore DE \parallel AB, \therefore \triangle FED \sim \triangle FBA.$$

$$\therefore \frac{DF}{AF} = \frac{DE}{BA} = \frac{2}{3}.$$

$$\because DE \parallel AB, \therefore S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ABD}, \therefore S_{\triangle AEF} = S_{\triangle BDF}.$$

$$\therefore S_{\triangle AEF} = S_{\triangle BDF} = \frac{2}{5} S_{\triangle ABD}.$$

$$\because BD = \frac{1}{3} BC = \frac{5}{3}, S_{\triangle ABD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC},$$

$\therefore$ 当 $AB \perp BD$, 即 $\angle ABC = 90^\circ$ 时, $\triangle ABC$ 的边 BC 上的高取得最大值 4, $\triangle ABC$ 的最大面积为 10.

$$\therefore \triangle ABD \text{ 的面积的最大值为 } \frac{10}{3}.$$

$$\therefore \triangle AEF \text{ 的面积的最大值为 } \frac{2}{5} \times \frac{10}{3} = \frac{4}{3}.$$

28 视图与投影

1. B 2. D

3. 4 4. 9

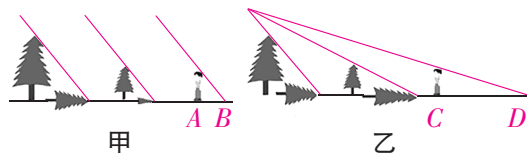
5. 解: (1) 10 $2\sqrt{3}$

$$(2) (4 + 4 + 4) \times 10 = 120 (\text{cm}^2),$$

即这个几何体的侧面积为 120 cm^2 .

6. 解: (1) 图甲反映了阳光下的情形, 图乙反映了路灯下的情形.

(2) 如图所示, AB, CD 即表示小明的影子.



(3) $\because$ 阳光下小明的影子长为 1.20 m, 树的影子长为 2.40 m, 小明的身高为 1.88 m, 设树高为 x m,

$$\therefore \frac{1.20}{1.88} = \frac{2.40}{x}, \text{ 解得 } x = 3.76.$$

答: 树的高度为 3.76 m.

29 圆的有关性质

1. B 2. C 3. B

4. 55° 5. 80°

6. 解: (1) 如图 1, AE 即为所求.

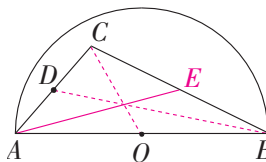


图 1

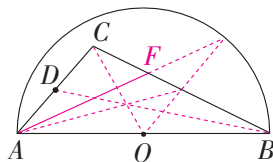


图 2

(2) 如图 2, AF 即为所求.

7. (1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形,

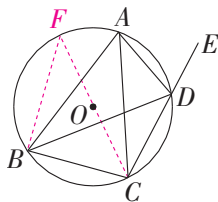
$$\therefore \angle ADE = \angle ABC.$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB.$$

$$\therefore \angle ACB = \angle ADB, \therefore \angle ADB = \angle ADE.$$

(2) 解: 如图, 连接 CO 并延长, 交 $\odot O$ 于点 F , 连接 BF , 则 $\angle FBC = 90^\circ$.



在 $\text{Rt}\triangle BCF$ 中, $CF = 4, BC = 3,$

$$\therefore \sin F = \frac{BC}{CF} = \frac{3}{4}.$$

$$\because \angle F = \angle BAC, \therefore \sin \angle BAC = \frac{3}{4}.$$

8. $50^\circ, 80^\circ$ 或 65°

30 与圆有关的位置关系

1. A 2. C 3. C

4. 6. 9

5. (1) 证明: $\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle CAB + \angle ABC = 90^\circ.$$

$$\because \angle PAC = \angle ABC,$$

$$\therefore \angle PAC + \angle CAB = 90^\circ, \text{ 即 } \angle PAB = 90^\circ.$$

$$\therefore AP \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线.}$$

(2) 解: $\because E$ 为 AF 的中点, $\therefore OC \perp AF.$

设 $CE = x$, 可得 $AE = 2x$.

$$\therefore AE^2 + CE^2 = AC^2, \text{ 即 } (2x)^2 + x^2 = (2\sqrt{5})^2.$$

解得 $x = 2$ (负值已舍去), 即 $CE = 2, AE = 4$.

$$\text{又 } AE^2 + OE^2 = OA^2, \text{ 即 } 4^2 + (OA - 2)^2 = OA^2.$$

解得 $OA = 5$, 即 $\odot O$ 的半径为 5.

6. A 7. D

8. (1) 证明: $\because PA$ 与 $\odot O$ 相切于点 A , 且 OA 是 $\odot O$ 的半径,

$$\therefore PA \perp OA.$$

$\because PO$ 平分 $\angle APD, OB \perp PD$ 于点 $B, OA \perp PA$ 于点 A ,

$$\therefore OB = OA.$$

$\therefore$ 点 B 在 $\odot O$ 上.

$$\because PB \perp OB,$$

$\therefore PB$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 解: $\because OA = OB = 4, OC = 5$,

$$\therefore AC = OA + OC = 4 + 5 = 9.$$

$$\because \angle OBC = 90^\circ,$$

$$\therefore BC = \sqrt{OC^2 - OB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

$$\because \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \frac{PA}{AC} = \frac{OB}{BC} = \tan \angle ACP = \frac{4}{3}.$$

$$\therefore PA = \frac{4}{3}AC = \frac{4}{3} \times 9 = 12.$$

$\therefore PA$ 的长是 12.

9. (1) 证明: $\because$ 点 D 是弦 AC 的中点, $\therefore OD \perp AC$.

$\therefore PD$ 是 AC 的中垂线.

$$\therefore PA = PC.$$

$$\therefore \angle PAC = \angle PCA.$$

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle CAB + \angle CBA = 90^\circ.$$

$$\text{又 } \because \angle PCA = \angle ABC,$$

$$\therefore \angle PCA + \angle CAB = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle CAB + \angle PAC = 90^\circ, \text{ 即 } AB \perp PA.$$

$\therefore PA$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 证明: 由 (1) 知 $\angle ODA = \angle OAP = 90^\circ$,

$$\therefore \text{Rt} \triangle AOD \sim \text{Rt} \triangle POA.$$

$$\therefore \frac{AO}{PO} = \frac{DO}{AO}.$$

$$\therefore OA^2 = OP \cdot OD.$$

$$\text{又 } \because OA = \frac{1}{2}EF,$$

$$\therefore \frac{1}{4}EF^2 = OP \cdot OD, \text{ 即 } EF^2 = 4OP \cdot OD.$$

(3) 解: 在 $\text{Rt} \triangle ADF$ 中, 设 $AD = 2a$, 则 $DF = \frac{AD}{\tan \angle AFP} = 3a$.

$\therefore O, D$ 分别为 AB, AC 的中点,

$$\therefore OD = \frac{1}{2}BC = 4. \therefore OE = AO = OF = 3a - 4.$$

$$\because OD^2 + AD^2 = AO^2, \text{ 即 } 4^2 + 4a^2 = (3a - 4)^2, \text{ 解得 } a = \frac{24}{5} \text{ 或 } a = 0 \text{ (舍去)}.$$

$$\therefore DE = OE - OD = 3a - 8 = \frac{32}{5}.$$

31 圆的有关计算

1. C 2. C 3. B

$$4. 90 \quad 5. \frac{9\pi}{4}$$

6. 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AB = CD.$$

$$\therefore \widehat{AB} = \widehat{CD}.$$

$$\therefore \widehat{AM} = \widehat{DM},$$

$$\therefore \widehat{AB} + \widehat{AM} = \widehat{CD} + \widehat{DM}, \text{ 即 } \widehat{BM} = \widehat{CM}.$$

$$\therefore BM = CM.$$

7. D 8. C

$$9. \frac{9}{4}\pi \quad 10. 4$$

11. (1) 证明: $\because AO = AC$,

$$\therefore \angle ACO = \angle AOC.$$

$$\because \angle D = \angle OCB, \angle BOD = \angle AOC,$$

$$\therefore \angle ACO + \angle OCB = \angle BOD + \angle D.$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \therefore \angle BOD + \angle D = 90^\circ.$$

$$\therefore OB \perp DE. \therefore BD = BE.$$

(2) 解: ①在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ, AC = 1 \text{ cm}$,

$$BC = \sqrt{3} \text{ cm}.$$

$$\therefore \tan \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \therefore \angle ABC = 30^\circ.$$

$$\therefore AB = 2AC = 2, \angle A = 60^\circ.$$

$\because OA = AC, \therefore \triangle AOC$ 为等边三角形.

$$\therefore OC = OA = AC = 1, \angle AOC = 60^\circ.$$

$$\therefore \angle D = \angle OCB = 30^\circ, OB = AB - OA = 1.$$

$$\therefore OD = 2OB = 2.$$

$$\therefore CD = OD + OC = 3.$$

$$\because \angle D = \angle OCB, \therefore BD = BC.$$

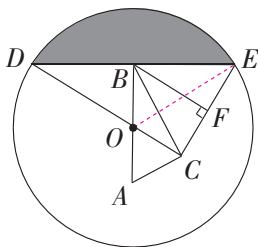
$$\because BD = BE, \therefore BC = BE. \therefore \angle BCE = \angle BEC.$$

$$\therefore \angle D + \angle BEC = \angle DCE = 90^\circ.$$

$$\therefore BF \perp CE, \therefore BF \parallel CD.$$

$$\because BD = BE, \therefore BF = \frac{1}{2}CD = \frac{3}{2} \text{ cm}.$$

②如图, 连接 OE .



$\because OD = OE, \therefore \angle D = \angle DEO = 30^\circ$.

$\therefore \angle DOE = 120^\circ$. 易得 $DE = 2\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} \therefore S_{\text{阴影}} &= S_{\text{扇形}ODE} - S_{\triangle ODE} = \frac{120\pi \times 2^2}{360} - \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 1 \\ &= \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

32 数据的收集、整理与描述

1. D 2. C 3. C

4. 1 500 吨

5. 解: (1) 由条形统计图和扇形统计图就可以看出: 坐姿不良的学生有 100 人, 占总人数的百分比为 20%, 总人数 $= 100 \div 20\% = 500$ (名), 故答案为: 100, 20%, 500.

(2) 三姿良好 $= 500 - 100 - 150 - 175 = 75$ (人), 补图略.

(3) $70\,000 \times (1 - 20\% - 30\% - 35\%) = 10\,500$ (人). 答: 全市初中生中, 三姿良好的学生约有 10 500 人. 建议: 应该多培养孩子的走姿、坐姿、站姿. (言之有理即可)

6. 解: (1) 68 23%

(2) 320

(3) ①小胡的说法正确. 理由如下:

初中生视力的中位数是 1.0, 高中生视力的中位数是 0.9 (或初中生视力的众数是 1.0, 高中生视力的众数是 0.9),

$\therefore$ 初中学生的视力水平比高中学生的好.

$$\textcircled{2} (1 - \frac{68 + 46 + 65 + 55}{200 + 320}) \times 26\,000 = 14\,300 \text{ (名)}.$$

$\therefore$ 估计该区有 14 300 名中学生视力不良.

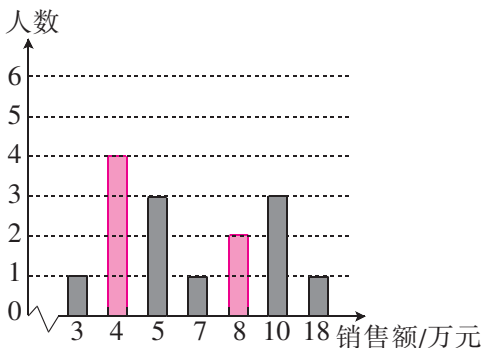
对视力保护提出的建议: 坚持做眼保健操, 加强户外运动, 养成正确的阅读习惯, 保护个人视力. (言之有理即可)

33 数据的分析(1)

1. C 2. B 3. D

4. 7 5. 89.3

6. 解: (1) 根据数据可得: 销售额为 4 万元的人数为 4, 销售额为 8 万元的人数为 2, 补全统计图如图所示.



(2) 由条形统计图可得: 月销售额在 4 万元的人数最多;

将数据按照从小到大排序后, 中间的月销售额为 5 万元;

平均月销售额为

$$\frac{3 \times 1 + 4 \times 4 + 5 \times 3 + 7 \times 1 + 8 \times 2 + 10 \times 3 + 18 \times 1}{15} = 7 \text{ (万元)}.$$

(3) 月销售额定为 7 万元合适.

7. 解: (1) 8 分人数为 $40 \times 35\% = 14$, 故 7 分人数为 $40 - 2 - 8 - 13 - 14 = 3$, 补全统计图如图.

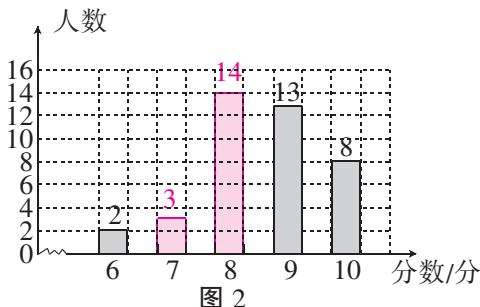


图 2

$a = 8$;

$$\text{平均数 } b = \frac{1}{40} \times (2 \times 6 + 3 \times 7 + 14 \times 8 + 13 \times 9 + 8 \times 10) = 8.55;$$

$$\text{合格率 } c = \frac{40 - 2 - 3}{40} \times 100\% = 87.5\%.$$

(2) $1\,200 \times 87.5\% = 1\,050$.

因此, 估计专项安全教育活动后达到合格水平的学生人数为 1 050.

(3) 专项安全教育活动的效果良好. 理由如下: 专项安全教育活动后, 学生测试成绩的平均数、中位数以及合格率都比开展前高得多, 所以专项安全教育活动的效果良好. (言之有理即可)

34 数据的分析(2)

1. B 2. A

3. 乙

4. 解: (1) $b\% = 1 - (10\% + 20\% + 25\% + 15\%) = 30\%$, 即 $b = 30$,
 八年级学生每日体育运动时间的众数 $a = 50$, 故答案为: 50, 30.

(2) 估计该校七、八年级学生中运动时间不少于 60 min 的人数为

$$1\ 600 \times \frac{20 \times (15\% + 25\%) + 7}{40} = 600.$$

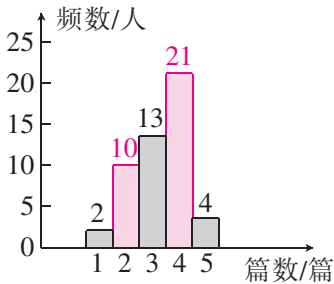
(3) 根据中位数的意义可知, 八年级学生中至少一半学生的运动时间不少于 50 min, 七年级学生中至少一半学生的运动时间不少于 45 min, 八年级学生整体运动情况比七年级好.

根据方差的意义可知, 八年级学生的运动时间的方差比七年级小, 八年级学生整体运动情况的稳定性比七年级好.

5. 解: (1) $\alpha = 360^\circ \times (1 - 14\% - 30\% - 24\% - 12\%) = 72^\circ$;

补全频数分布直方图如图.

八年级样本学生投稿篇数频数直方图



(2) $\because$ 八年级投稿篇数数据由小到大排列后第 25, 26 个数据分别为 3, 4,

$$\therefore m = \frac{3+4}{2} = 3.5.$$

$\because$ 八年级投稿篇数中, 4 篇是出现最多的, $\therefore n = 4$.
 七年级投稿篇数的平均数

$$\bar{x} = \frac{7 \times 1 + 10 \times 2 + 15 \times 3 + 12 \times 4 + 6 \times 5}{7 + 10 + 15 + 12 + 6} = 3.$$

故表格中 $m = 3.5, n = 4, \bar{x} = 3$.

(3) 从中位数看, 八年级的投稿篇数高于七年级; 从众数看, 八年级的投稿篇数高于七年级; 从平均数看, 八年级的投稿篇数高于七年级; 从方差看, 八年

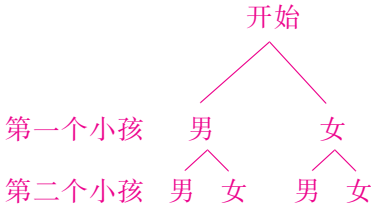
级的方差小于七年级的方差, $\therefore$ 八年级的投稿情况好于七年级.

35 随机事件与概率

1. B 2. B 3. B 4. D

5. 解: (1) 随机 $\frac{1}{2}$

(2) 依题意可画树状图如下:



由树状图可知, 共有 4 种等可能的结果, 其中一男一女的结果有 2 种,

$$\therefore P(\text{两个小孩恰好是一男一女}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

6. 解: (1) 列表如下.

$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$	1	2	3	4
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)

从表中可以看出, (a, b) 所有可能出现的结果数有 8 种.

(2) 我认为这种确定方式合理. 理由:

由表格知, 和为奇数与和为偶数的结果各有 4 种, 且每种结果出现的可能性相同,

$$\therefore P(\text{和为奇数}) = P(\text{和为偶数}).$$

$\therefore$ 两首乐曲被选中的概率相等.

$\therefore$ 这种确定方式合理.

7. 解: (1) 50 20

(2) 12 23

(3) 从所有献血者中任抽取一人, 估计其血型是 O 型的概率为 0.46,

$$\text{估计这 } 4\ 000 \text{ 人中 O 型血的人数是 } 4\ 000 \times 46\% = 1\ 840.$$