

2016 年湖南省长沙市中考数学试卷

一、(在下列各题的四个选项中, 只有一个符合题意的, 请在答题卡中填涂符合题意的选项. 本大题共 12 小题, 每小题 3 分, 满分 36 分)

1. 下列四个数中, 最大的数是 ()

- A. -2 B. $\frac{1}{3}$ C. 0 D. 6

2. 大家翘首以盼的长株潭城际铁路将于 2016 年年底通车, 通车后, 从长沙到株洲只需 24 分钟, 从长沙到湘潭只需 25 分钟, 这条铁路全长 99500 米, 则数据 99500 用科学记数法表示为 ()

- A. 0.995×10^5 B. 9.95×10^5 C. 9.95×10^4 D. 9.5×10^4

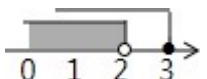
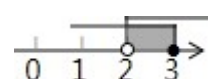
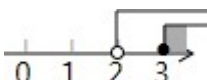
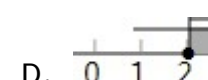
3. 下列计算正确的是 ()

- A. $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$ B. $x^8 \div x^2 = x^4$ C. $(2a)^3 = 6a^3$ D. $3a^5 \cdot 2a^3 = 6a^6$

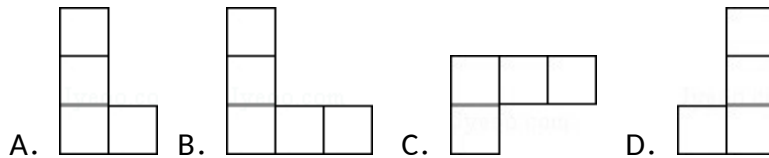
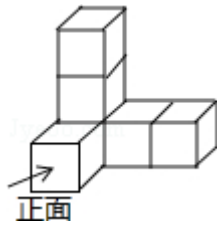
4. 六边形的内角和是 ()

- A. 540° B. 720° C. 900° D. 360°

5. 不等式组 $\begin{cases} 2x-1 \geq 5 \\ 8-4x < 0 \end{cases}$ 的解集在数轴上表示为 ()

- A.  B. 
C.  D. 

6. 如图是由六个相同的小正方体搭成的几何体, 这个几何体的主视图是 ()



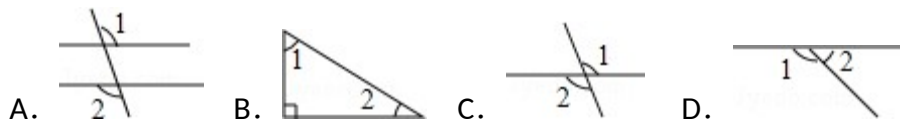
7. 若一个三角形的两边长分别为 3 和 7, 则第三边长可能是 ()

- A. 6 B. 3 C. 2 D. 11

8. 若将点 A (1, 3) 向左平移 2 个单位, 再向下平移 4 个单位得到点 B, 则点 B 的坐标为 ()

- A. (-2, -1) B. (-1, 0) C. (-1, -1) D. (-2, 0)

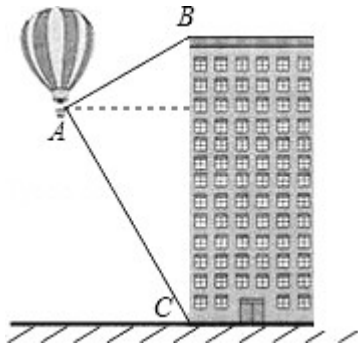
9. 下列各图中, $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互为余角的是 ()



10. 已知一组数据 75, 80, 80, 85, 90, 则它的众数和中位数分别为 ()

- A. 75, 80 B. 80, 85 C. 80, 90 D. 80, 80

11. 如图, 热气球的探测器显示, 从热气球 A 处看一栋楼顶部 B 处的仰角为 30° , 看这栋楼底部 C 处的俯角为 60° , 热气球 A 处与楼的水平距离为 120m, 则这栋楼的高度为 ()



- A. $160\sqrt{3}m$ B. $120\sqrt{3}m$ C. $300m$ D. $160\sqrt{2}m$

12. 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($b>a>0$) 与 x 轴最多有一个交点, 现有以下四个结论:

- ① 该抛物线的对称轴在 y 轴左侧;
- ② 关于 x 的方程 $ax^2+bx+c+2=0$ 无实数根;
- ③ $a-b+c\geq 0$;
- ④ $\frac{a+b+c}{b-a}$ 的最小值为 3.

其中, 正确结论的个数为 ()

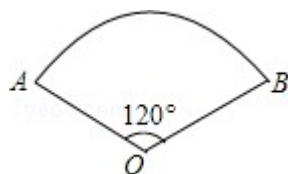
- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

二、填空题 (共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分)

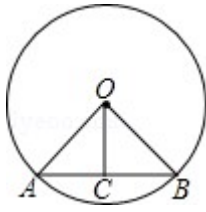
13. 分解因式: $x^2y - 4y = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 4x - m = 0$ 有两个不相等的实数根, 则实数 m 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

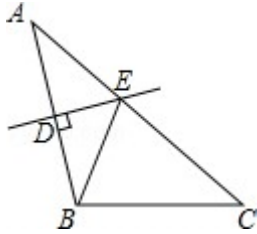
15. 如图, 扇形 OAB 的圆心角为 120° , 半径为 3, 则该扇形的弧长为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
(结果保留 π)



16. 如图, 在 $\odot O$ 中, 弦 $AB=6$, 圆心 O 到 AB 的距离 $OC=2$, 则 $\odot O$ 的半径长为



17. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AC=8$, $BC=5$, AB 的垂直平分线 DE 交 AB 于点 D , 交边 AC 于点 E , 则 $\triangle BCE$ 的周长为_____.



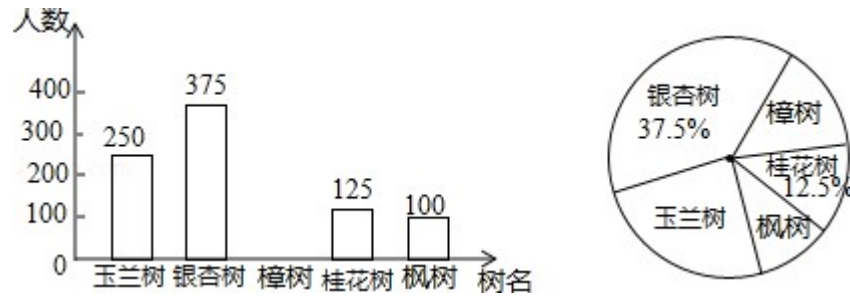
18. 若同时抛掷两枚质地均匀的骰子, 则事件“两枚骰子朝上的点数互不相同”的概率是_____.

三、解答题 (本大题共 8 个小题, 第 19、20 题每小题 6 分, 第 21、22 题每小题 6 分, 第 23、24 题每小题 6 分, 第 25、26 题每小题 6 分, 共 66 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

19. 计算: $4\sin 60^\circ - |-2| - \sqrt{12} + (-1)^{2016}$.

20. 先化简, 再求值: $\frac{a}{a-b} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) + \frac{a-1}{b}$, 其中 $a=2$, $b=\frac{1}{3}$.

21. 为积极响应市委市政府“加快建设天蓝·水碧·地绿的美丽长沙”的号召, 我市某街道决定从备选的五种树中选购一种进行栽种. 为了更好地了解社情民意, 工作人员在街道辖区范围内随机抽取了部分居民, 进行“我最喜欢的一种树”的调查活动 (每人限选其中一种树), 并将调查结果整理后, 绘制成如图两个不完整的统计图:

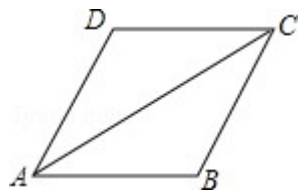


请根据所给信息解答以下问题:

- (1) 这次参与调查的居民人数为: _____;
- (2) 请将条形统计图补充完整;
- (3) 请计算扇形统计图中“枫树”所在扇形的圆心角度数;
- (4) 已知该街道辖区内现有居民 8 万人, 请你估计这 8 万人中最喜欢玉兰树的有多少人?

22. 如图, AC 是 $\square ABCD$ 的对角线, $\angle BAC = \angle DAC$.

- (1) 求证: $AB = BC$;
- (2) 若 $AB = 2$, $AC = 2\sqrt{3}$, 求 $\square ABCD$ 的面积.



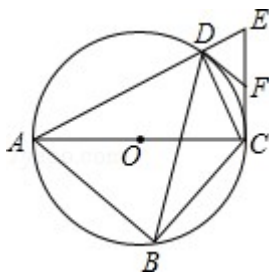
23. 2016 年 5 月 6 日, 中国第一条具有自主知识产权的长沙磁浮线正式开通运营, 该路线连接了长沙火车南站和黄花国际机场两大交通枢纽, 沿线生态绿化走廊的建设尚在进行中, 届时将给乘客带来美的享受. 星城渣土运输公司承包了某标段的土方运输任务, 拟派出大、小两种型号的渣土运输车运输土方, 已知 2 辆大型渣土运输车与 3 辆小型渣土运输车一次共运输土方 31 吨, 5 辆大型渣土运输车与 6 辆小型渣土运输车一次共运输土方 70 吨.

- (1) 一辆大型渣土运输车和一辆小型渣土运输车一次各运输土方多少吨?
- (2) 该渣土运输公司决定派出大、小两种型号的渣土运输车共 20 辆参与运输土

方, 若每次运输土方总量不少于 148 吨, 且小型渣土运输车至少派出 2 辆, 则有哪些派车方案?

24. 如图, 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, 对角线 AC 为 $\odot O$ 的直径, 过点 C 作 AC 的垂线交 AD 的延长线于点 E , 点 F 为 CE 的中点, 连接 DB , DC , DF .

- (1) 求 $\angle CDE$ 的度数;
- (2) 求证: DF 是 $\odot O$ 的切线;
- (3) 若 $AC=2\sqrt{5}DE$, 求 $\tan \angle ABD$ 的值.

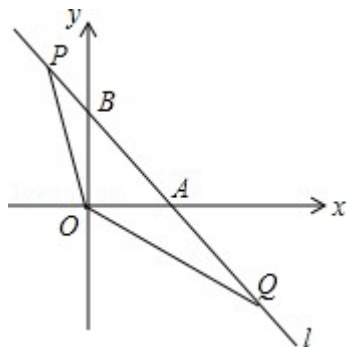


25. 若抛物线 $L: y=ax^2+bx+c$ (a, b, c 是常数, $abc \neq 0$) 与直线 l 都经过 y 轴上的一点 P , 且抛物线 L 的顶点 Q 在直线 l 上, 则称此直线 l 与该抛物线 L 具有“一带一路”关系. 此时, 直线 l 叫做抛物线 L 的“带线”, 抛物线 L 叫做直线 l 的“路线”.

- (1) 若直线 $y=mx+1$ 与抛物线 $y=x^2-2x+n$ 具有“一带一路”关系, 求 m, n 的值;
- (2) 若某“路线” L 的顶点在反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图象上, 它的“带线” l 的解析式为 $y=2x-4$, 求此“路线” L 的解析式;
- (3) 当常数 k 满足 $\frac{1}{2} \leq k \leq 2$ 时, 求抛物线 $L: y=ax^2+(3k^2-2k+1)x+k$ 的“带线” l 与 x 轴, y 轴所围成的三角形面积的取值范围.

26. 如图, 直线 $l: y=-x+1$ 与 x 轴, y 轴分别交于 A, B 两点, 点 P, Q 是直线 l 上的两个动点, 且点 P 在第二象限, 点 Q 在第四象限, $\angle POQ=135^\circ$.

- (1) 求 $\triangle AOB$ 的周长;
- (2) 设 $AQ=t>0$, 试用含 t 的代数式表示点 P 的坐标;
- (3) 当动点 P, Q 在直线 l 上运动到使得 $\triangle AOQ$ 与 $\triangle BPO$ 的周长相等时, 记 $\tan \angle AOQ=m$, 若过点 A 的二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 同时满足以下两个条件:
- ① $6a+3b+2c=0$;
- ② 当 $m \leq x \leq m+2$ 时, 函数 y 的最大值等于 $\frac{2}{m}$, 求二次项系数 a 的值.



参考答案

一、(在下列各题的四个选项中, 只有一个是符合题意的, 请在答题卡中填涂符合题意的选项. 本大题共 12 小题, 每小题 3 分, 满分 36 分)

1. D 2. C 3. A 4. B 5. C 6. B 7. A 8. C
9. B 10. D 11. A 12. D

二、填空题 (共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分)

13. $y(x+2)(x-2)$ 14. $m > -4$ 15. 2π
16. $\sqrt{13}$ 17. 13 18. $\frac{5}{6}$

三、解答题 (本大题共 8 个小题, 第 19、20 题每小题 6 分, 第 21、22 题每小题 6 分, 第 23、24 题每小题 6 分, 第 25、26 题每小题 6 分, 共 66 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

19. 解: $4\sin 60^\circ - |-2| - \sqrt{12} + (-1)^{2016}$

$$= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 - 2\sqrt{3} + 1$$

$$= 2\sqrt{3} - 2 - 2\sqrt{3} + 1$$

$$= -1.$$

20. 解: $\frac{a}{a-b} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) + \frac{a-1}{b}$

$$= \frac{a}{a-b} \cdot \frac{a-b}{ab} + \frac{a-1}{b}$$

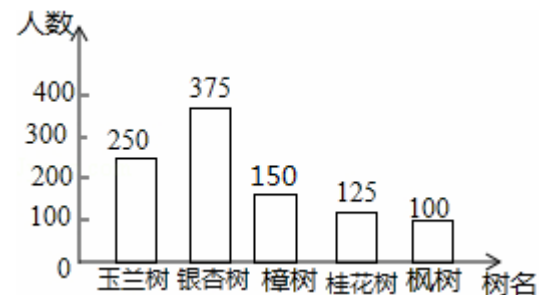
$$= \frac{1}{b} + \frac{a-1}{b}$$

$$= \frac{a}{b},$$

当 $a=2$, $b=\frac{1}{3}$ 时, 原式 $= \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6$.

21. 解: (1) 这次参与调查的居民人数有 $\frac{375}{37.5\%} = 1000$ (人);

(2) 选择“樟树”的有 $1000 - 250 - 375 - 125 - 100 = 150$ (人),
补全条形图如图:



(3) $360^\circ \times \frac{100}{1000} = 36^\circ$,

答: 扇形统计图中“枫树”所在扇形的圆心角度数为 36° ;

$$(4) 8 \times \frac{250}{1000} = 2 \text{ (万人)},$$

答: 估计这 8 万人中最喜欢玉兰树的约有 2 万人.

故答案为: (1) 1000.

22. (1) 证明: $\because$ 四边形 ABCD 是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle BCA,$$

$$\because \angle BAC = \angle DAC,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BCA,$$

$$\therefore AB = BC;$$

(2) 解: 连接 BD 交 AC 于 O, 如图所示:

$\because$ 四边形 ABCD 是平行四边形, $AB = BC$,

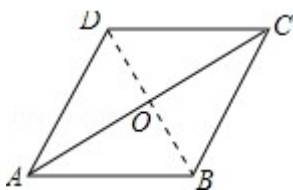
$\therefore$ 四边形 ABCD 是菱形,

$$\therefore AC \perp BD, OA = OC = \frac{1}{2}AC = \sqrt{3}, OB = OD = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1,$$

$$\therefore BD = 2OB = 2,$$

$$\therefore \square ABCD \text{ 的面积} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3}.$$



23. 解: (1) 设一辆大型渣土运输车一次运输 x 吨, 一辆小型渣土运输车一次运输 y 吨,

$$\begin{cases} 2x + 3y = 31 \\ 5x + 6y = 70 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 8 \\ y = 5 \end{cases}.$$

即一辆大型渣土运输车一次运输 8 吨, 一辆小型渣土运输车一次运输 5 吨;

(2) 由题意可得,

设该渣土运输公司决定派出大、小两种型号的渣土运输车分别为 x 辆、 y 辆,

$$\begin{cases} x+y=20 \\ 8x+5y \geq 148 \\ y \geq 2 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=18 \\ y=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=17 \\ y=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=16 \\ y=4 \end{cases}$,

故有三种派车方案,

第一种方案: 大型运输车 18 辆, 小型运输车 2 辆;

第二种方案: 大型运输车 17 辆, 小型运输车 3 辆;

第三种方案: 大型运输车 16 辆, 小型运输车 4 辆.

24. (1) 解: $\because$ 对角线 AC 为 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EDC = 90^\circ;$$

(2) 证明: 连接 DO ,

$\because \angle EDC = 90^\circ$, F 是 EC 的中点,

$$\therefore DF = FC,$$

$$\therefore \angle FDC = \angle FCD,$$

$$\because OD = OC,$$

$$\therefore \angle OCD = \angle ODC,$$

$$\because \angle OCF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ODF = \angle ODC + \angle FDC = \angle OCD + \angle DCF = 90^\circ,$$

$\therefore DF$ 是 $\odot O$ 的切线;

(3) 解: 方法一: 设 $DE = 1$, 则 $AC = 2\sqrt{5}$,

$$\text{由 } AC^2 = AD \times AE$$

$$\therefore 20 = AD(AD + 1)$$

$$\therefore AD = 4 \text{ 或 } -5 \text{ (舍去)}$$

$$\because DC^2 = AC^2 - AD^2$$

$$\therefore DC = 2,$$

$$\therefore \tan \angle ABD = \tan \angle ACD = \frac{AD}{DC} = 2;$$

方法二: 如图所示: 可得 $\angle ABD = \angle ACD$,

$$\because \angle E + \angle DCE = 90^\circ, \quad \angle DCA + \angle DCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DCA = \angle E,$$

$$\text{又} \because \angle ADC = \angle CDE = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle CDE \sim \triangle ADC,$$

$$\therefore \frac{DC}{AD} = \frac{DE}{DC},$$

$$\therefore DC^2 = AD \cdot DE$$

$$\because AC = 2\sqrt{5}DE,$$

$$\therefore \text{设 } DE = x, \text{ 则 } AC = 2\sqrt{5}x,$$

$$\text{则 } AC^2 - AD^2 = AD \cdot DE,$$

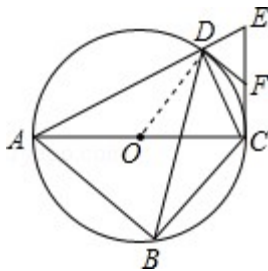
$$\text{即 } (2\sqrt{5}x)^2 - AD^2 = AD \cdot x,$$

$$\text{整理得: } AD^2 + AD \cdot x - 20x^2 = 0,$$

$$\text{解得: } AD = 4x \text{ 或 } -5x \text{ (负数舍去)},$$

$$\text{则 } DC = \sqrt{(2\sqrt{5}x)^2 - (4x)^2} = 2x,$$

$$\text{故 } \tan \angle ABD = \tan \angle ACD = \frac{AD}{DC} = \frac{4x}{2x} = 2.$$



25. 解: (1) 令直线 $y = mx + 1$ 中 $x = 0$, 则 $y = 1$,

即直线与 y 轴的交点为 $(0, 1)$;

将 $(0, 1)$ 代入抛物线 $y = x^2 - 2x + n$ 中,

得 $n = 1$.

$$\because \text{抛物线的解析式为 } y = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2,$$

$$\therefore \text{抛物线的顶点坐标为 } (1, 0).$$

将点 (1, 0) 代入到直线 $y=mx+1$ 中,

得: $0=m+1$, 解得: $m=-1$.

答: m 的值为 -1 , n 的值为 1 .

(2) 将 $y=2x-4$ 代入到 $y=\frac{6}{x}$ 中有,

$$2x-4=\frac{6}{x}, \text{ 即 } 2x^2-4x-6=0,$$

解得: $x_1=-1, x_2=3$.

$\therefore$ 该“路线” L 的顶点坐标为 $(-1, -6)$ 或 $(3, 2)$.

令“带线” l : $y=2x-4$ 中 $x=0$, 则 $y=-4$,

$\therefore$ “路线” L 的图象过点 $(0, -4)$.

设该“路线” L 的解析式为 $y=m(x+1)^2-6$ 或 $y=n(x-3)^2+2$,

由题意得: $-4=m(0+1)^2-6$ 或 $-4=n(0-3)^2+2$,

解得: $m=2, n=-\frac{2}{3}$.

$\therefore$ 此“路线” L 的解析式为 $y=2(x+1)^2-6$ 或 $y=-\frac{2}{3}(x-3)^2+2$.

(3) 令抛物线 $L: y=ax^2+(3k^2-2k+1)x+k$ 中 $x=0$, 则 $y=k$,

即该抛物线与 y 轴的交点为 $(0, k)$.

抛物线 $L: y=ax^2+(3k^2-2k+1)x+k$ 的顶点坐标为 $(-\frac{3k^2-2k+1}{2a},$

$$\frac{4ak-(3k^2-2k+1)^2}{4a}),$$

设“带线” l 的解析式为 $y=px+k$,

$\therefore$ 点 $(-\frac{3k^2-2k+1}{2a}, \frac{4ak-(3k^2-2k+1)^2}{4a})$ 在 $y=px+k$ 上,

$$\therefore \frac{4ak-(3k^2-2k+1)^2}{4a} = -p\frac{3k^2-2k+1}{2a} + k,$$

解得: $p=\frac{3k^2-2k+1}{2}$.

$\therefore$ “带线” l 的解析式为 $y=\frac{3k^2-2k+1}{2}x+k$.

令“带线”l: $y = \frac{3k^2 - 2k + 1}{2}x + k$ 中 $y=0$, 则 $0 = \frac{3k^2 - 2k + 1}{2}x + k$,

解得: $x = -\frac{2k}{3k^2 - 2k + 1}$.

即“带线”l与x轴的交点为 $(-\frac{2k}{3k^2 - 2k + 1}, 0)$, 与y轴的交点为 $(0, k)$.

∴“带线”l与x轴, y轴所围成的三角形面积 $S = \frac{1}{2} | -\frac{2k}{3k^2 - 2k + 1} | \times |k|$,

∴ $\frac{1}{2} \leq k \leq 2$,

∴ $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{k} \leq 2$,

∴ $S = \frac{k^2}{3k^2 - 2k + 1} = \frac{1}{3 - \frac{2}{k} + (\frac{1}{k})^2} = \frac{1}{(\frac{1}{k} - 1)^2 + 2}$,

当 $\frac{1}{k} = 1$ 时, S有最大值, 最大值为 $\frac{1}{2}$;

当 $\frac{1}{k} = 2$ 时, S有最小值, 最小值为 $\frac{1}{3}$.

故抛物线 L: $y = ax^2 + (3k^2 - 2k + 1)x + k$ 的“带线”l与x轴, y轴所围成的三角形

面积的取值范围为 $\frac{1}{3} \leq S \leq \frac{1}{2}$.

26. 解: (1) 在函数 $y = -x + 1$ 中, 令 $x=0$, 得 $y=1$,

∴ B (0, 1),

令 $y=0$, 得 $x=1$,

∴ A (1, 0),

则 $OA=OB=1$, $AB=\sqrt{2}$,

∴ $\triangle AOB$ 周长为 $1+1+\sqrt{2}=2+\sqrt{2}$.

(2) ∵ $OA=OB$,

∴ $\angle ABO = \angle BAO = 45^\circ$,

∴ $\angle PBO = \angle QAO = 135^\circ$,

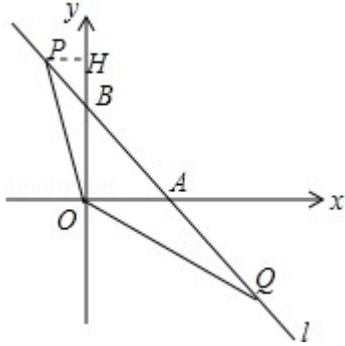
设 $\angle POB = x$, 则 $\angle OPB = \angle AOQ = 135^\circ - x - 90^\circ = 45^\circ - x$,

∴ $\triangle PBO \sim \triangle OAQ$,

$$\therefore \frac{PB}{OA} = \frac{OB}{AQ},$$

$$\therefore PB = \frac{OA \cdot OB}{AQ} = \frac{1}{t},$$

过点 P 作 $PH \perp OB$ 于 H 点,



则 $\triangle PHB$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore PB = \frac{1}{t},$$

$$\therefore PH = HB = \frac{\sqrt{2}}{2t},$$

$$\therefore P \left(-\frac{\sqrt{2}}{2t}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2t} \right).$$

(3) 由 (2) 可知 $\triangle PBO \sim \triangle OAQ$, 若它们的周长相等, 则相似比为 1, 即全等,

$$\therefore PB = OA,$$

$$\therefore \frac{1}{t} = 1,$$

$$\therefore t = 1,$$

$$\text{同理可得 } Q \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2t}, -\frac{\sqrt{2}}{2t} \right),$$

$$\therefore m = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2t}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2t}} = \sqrt{2} - 1,$$

$\therefore$ 抛物线经过点 A,

$$\therefore a + b + c = 0,$$

$$\text{又 } \therefore 6a + 3b + 2c = 0,$$

$$\therefore b = -4a, c = 3a,$$

对称轴 $x=2$, 取值范围 $\sqrt{2}-1 \leq x \leq \sqrt{2}+1$,

① 若 $a>0$, 则开口向上,

由题意 $x=\sqrt{2}-1$ 时取得最大值 $\frac{2}{m}=2\sqrt{2}+2$,

即 $(\sqrt{2}-1)^2 a + (\sqrt{2}-1)b + c = 2\sqrt{2}+2$,

解得 $a = \frac{11+8\sqrt{2}}{7}$.

② 若 $a<0$, 则开口向下,

由题意 $x=2$ 时取得最大值 $2\sqrt{2}+2$,

即 $4a+2b+c=2\sqrt{2}+2$,

解得 $a = -2\sqrt{2}-2$.

综上所述所求 a 的值为 $\frac{11+8\sqrt{2}}{7}$ 或 $-2\sqrt{2}-2$.