

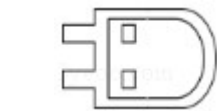
2019 年北京市中考数学试卷

一、选择题 (本题共 16 分, 每小题 2 分)

1. (2 分) (2019•北京) 4 月 24 日是中国航天日. 1970 年的这一天, 我国自行设计、制造的第一颗人造地球卫星“东方红一号”成功发射, 标志着中国从此进入了太空时代, 它的运行轨道, 距地球最近点 439000 米, 将 439000 用科学记数法表示应为 ()

A. 0.439×10^6 B. 4.39×10^6 C. 4.39×10^5 D. 439×10^3

2. (2 分) (2019•北京) 下列倡导节约的图案中, 是轴对称图形的是 ()



3. (2 分) (2019•北京) 正十边形的外角和为 ()

A. 180° B. 360° C. 720° D. 1440°

4. (2 分) (2019•北京) 在数轴上, 点 A, B 在原点 O 的两侧, 分别表示数 $a, 2$, 将点 A 向右平移 1 个单位长度, 得到点 C , 若 $CO=BO$, 则 a 的值为 ()

A. -3 B. -2 C. -1 D. 1

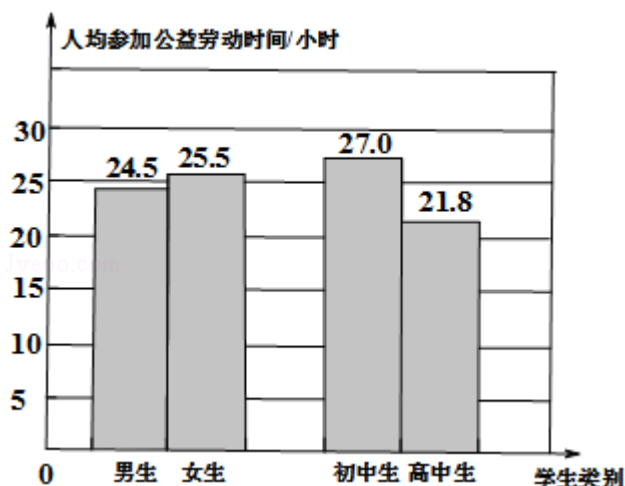
5. (2 分) (2019•北京) 已知锐角 $\angle AOB$, 如图,

(1) 在射线 OA 上取一点 C , 以点 O 为圆心, OC 长为半径作 $\widehat{PQ}$, 交射线 OB 于点 D , 连接 CD ;

(2) 分别以点 C, D 为圆心, CD 长为半径作弧, 交 $\widehat{PQ}$ 于点 M, N ;

(3) 连接 OM, MN .

根据以上作图过程及所作图形, 下列结论中错误的是 ()



下面有四个推断:

- ① 这 200 名学生参加公益劳动时间的平均数一定在 24.5 - 25.5 之间
- ② 这 200 名学生参加公益劳动时间的中位数在 20 - 30 之间
- ③ 这 200 名学生中的初中生参加公益劳动时间的中位数一定在 20~30 之间
- ④ 这 200 名学生中的高中生参加公益劳动时间的中位数可能在 20~30 之间

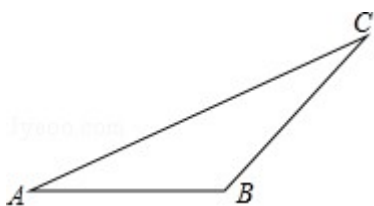
所有合理推断的序号是 ()

- A. ①③ B. ②④ C. ①②③ D. ①②③④

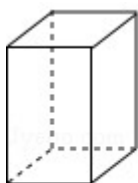
二、填空题 (本题共 16 分, 每小题 2 分)

9. (2 分) (2019•北京) 分式 $\frac{x-1}{x}$ 的值为 0, 则 x 的值是_____.

10. (2 分) (2019•北京) 如图, 已知 $\triangle ABC$, 通过测量、计算得 $\triangle ABC$ 的面积约为 cm^2 . (结果保留一位小数)



11. (2 分) (2019•北京) 在如图所示的几何体中, 其三视图中有矩形的是_____. (写出所有正确答案的序号)



①长方体

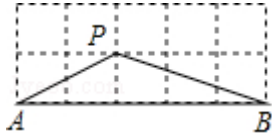


②圆柱



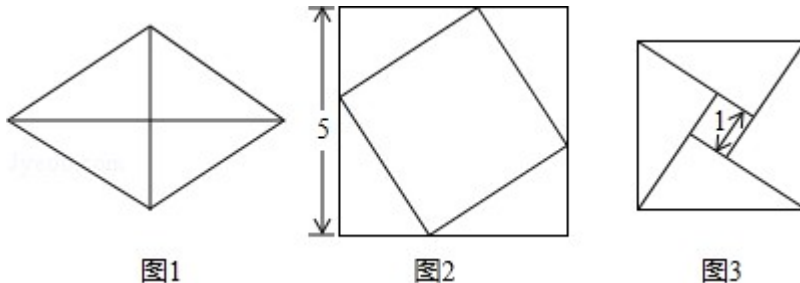
③圆锥

12. (2分) (2019•北京) 如图所示的网格是正方形网格, 则 $\angle PAB + \angle PBA = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ (点 A, B, P 是网格线交点).



13. (2分) (2019•北京) 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $A(a, b)$ ($a > 0, b > 0$) 在双曲线 $y = \frac{k_1}{x}$ 上, 点 A 关于 x 轴的对称点 B 在双曲线 $y = \frac{k_2}{x}$ 上, 则 $k_1 + k_2$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. (2分) (2019•北京) 把图1中的菱形沿对角线分成四个全等的直角三角形, 将这四个直角三角形分别拼成如图2, 图3所示的正方形, 则图1中菱形的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



15. (2分) (2019•北京) 小天想要计算一组数据 92, 90, 94, 86, 99, 85 的方差 s_0^2 , 在计算平均数的过程中, 将这组数据中的每一个数都减去 90, 得到一组新数据 2, 0, 4, -4, 9, -5, 记这组新数据的方差为 s_1^2 , 则 $s_1^2 \underline{\hspace{2cm}} s_0^2$ (填 “>”, “=” 或 “<”)

16. (2分) (2019•北京) 在矩形 $ABCD$ 中, M, N, P, Q 分别为边 AB, BC, CD, DA 上的点 (不与端点重合), 对于任意矩形 $ABCD$, 下面四个结论中,

- ① 存在无数个四边形 $MNPQ$ 是平行四边形;
- ② 存在无数个四边形 $MNPQ$ 是矩形;
- ③ 存在无数个四边形 $MNPQ$ 是菱形;
- ④ 至少存在一个四边形 $MNPQ$ 是正方形.

所有正确结论的序号是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二、解答题 (本题共 68 分, 第 17-21 题, 每小题 5 分, 第 22-24 题, 每小题 5 分, 第 25 题 5 分, 第 26 题 6 分, 第 27-28 题, 每小题 5 分) 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程,

17. (5分) (2019•北京) 计算: $|\sqrt{3}| - (4 - \pi)^0 + 2\sin 60^\circ + (\frac{1}{4})^{-1}$.

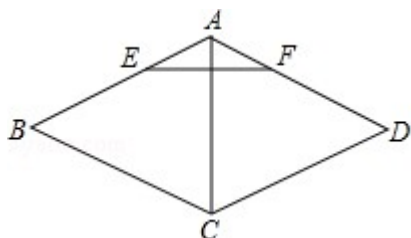
18. (5分) (2019•北京) 解不等式组:
$$\begin{cases} 4(x-1) < x+2 \\ \frac{x+7}{3} > x \end{cases}$$

19. (5分) (2019•北京) 关于 x 的方程 $x^2 - 2x + 2m - 1 = 0$ 有实数根, 且 m 为正整数, 求 m 的值及此时方程的根.

20. (5分) (2019•北京) 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, AC 为对角线, 点 E, F 分别在 AB, AD 上, $BE = DF$, 连接 EF .

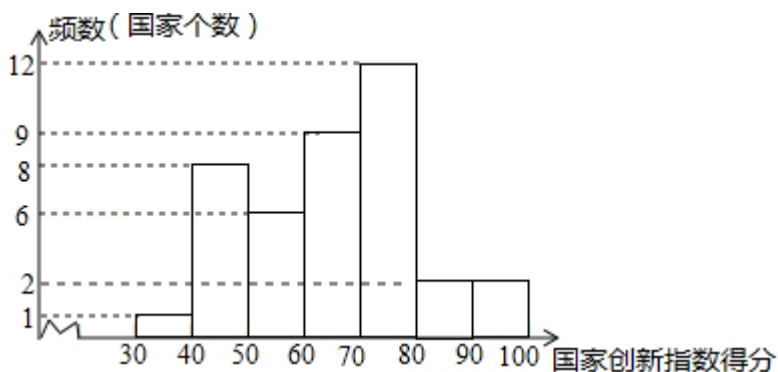
(1) 求证: $AC \perp EF$;

(2) 延长 EF 交 CD 的延长线于点 G , 连接 BD 交 AC 于点 O . 若 $BD = 4$, $\tan G = \frac{1}{2}$, 求 AO 的长.



21. (5分) (2019•北京) 国家创新指数是反映一个国家科学技术和创新竞争力的综合指数. 对国家创新指数得分排名前 40 的国家的有关数据进行收集、整理、描述和分析. 下面给出了部分信息:

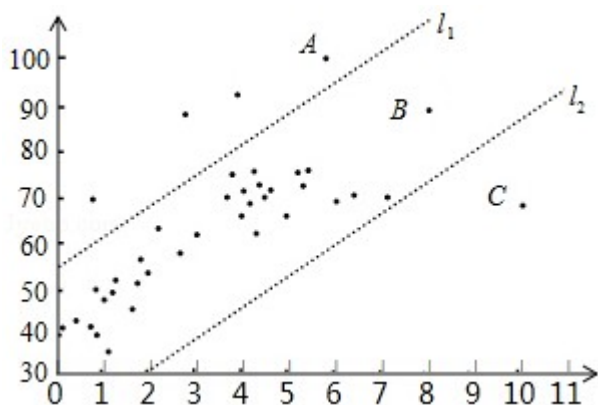
a. 国家创新指数得分的频数分布直方图 (数据分成 7 组: $30 \leq x < 40$, $40 \leq x < 50$, $50 \leq x < 60$, $60 \leq x < 70$, $70 \leq x < 80$, $80 \leq x < 90$, $90 \leq x \leq 100$);



b. 国家创新指数得分在 $60 \leq x < 70$ 这一组的是:

61.7 62.4 63.6 65.9 66.4 68.5 69.1 69.3 69.5

c. 40 个国家的人均国内生产总值和国家创新指数得分情况统计图:



d. 中国的国家创新指数得分为 69.5.

(以上数据来源于《国家创新指数报告(2018)》)

根据以上信息, 回答下列问题:

(1) 中国的国家创新指数得分排名世界第_____;

(2) 在 40 个国家的人均国内生产总值和国家创新指数得分情况统计图中, 包括中国在内的少数几个国家所对应的点位于虚线 l_1 的上方, 请在图中用 “○” 圈出代表中国的点;

(3) 在国家创新指数得分比中国高的国家中, 人均国内生产总值的最小值约为_____万美元; (结果保留一位小数)

(4) 下列推断合理的是_____.

- ① 相比于点 A , B 所代表的国家, 中国的国家创新指数得分还有一定差距, 中国提出“加快建设创新型国家”的战略任务, 进一步提高国家综合创新能力;
- ② 相比于点 B , C 所代表的国家, 中国的人均国内生产总值还有一定差距, 中国提出“决胜全面建成小康社会”的奋斗目标, 进一步提高人均国内生产总值.

22. (6 分) (2019•北京) 在平面内, 给定不在同一条直线上的点 A , B , C , 如图所示, 点 O 到点 A , B , C 的距离均等于 a (a 为常数), 到点 O 的距离等于 a 的所有点组成图形 G , $\angle ABC$ 的平分线交图形 G 于点 D , 连接 AD , CD .

(1) 求证: $AD=CD$;

(2) 过点 D 作 $DE \perp BA$, 垂足为 E , 作 $DF \perp BC$, 垂足为 F , 延长 DF 交图形 G 于点 M , 连接 CM . 若 $AD=CM$, 求直线 DE 与图形 G 的公共点个数.

A

B

C

23. (6分) (2019•北京) 小云想用7天的时间背诵若干首诗词, 背诵计划如下:

- ① 将诗词分成4组, 第 i 组有 x_i 首, $i=1, 2, 3, 4$;
 ② 对于第 i 组诗词, 第 i 天背诵第一遍, 第 $(i+1)$ 天背诵第二遍, 第 $(i+3)$ 天背诵第三遍, 三遍后完成背诵, 其它天无需背诵, $i=1, 2, 3, 4$;

	第1天	第2天	第3天	第4天	第5天	第6天	第7天
第1组	x_1	x_1		x_1			
第2组		x_2	x_2		x_2		
第3组							
第4组				x_4	x_4		x_4

- ③ 每天最多背诵14首, 最少背诵4首.

解答下列问题:

- (1) 填入 x_3 补全上表;
 (2) 若 $x_1=4$, $x_2=3$, $x_3=4$, 则 x_4 的所有可能取值为____;
 (3) 7天后, 小云背诵的诗词最多为____首.
24. (6分) (2019•北京) 如图, P 是 $\widehat{AB}$ 与弦 AB 所围成的图形的外部的一点, C 是 $\widehat{AB}$ 上一动点, 连接 PC 交弦 AB 于点 D .

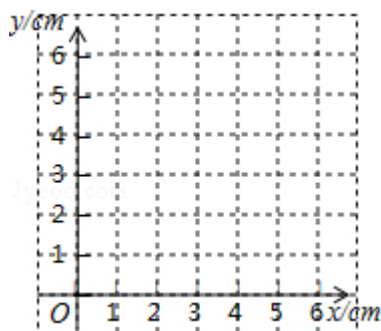
小腾根据学习函数的经验, 对线段 PC , PD , AD 的长度之间的关系进行了探究. 下面是小腾的探究过程, 请补充完整:

- (1) 对于点 C 在 $\widehat{AB}$ 上的不同位置, 画图、测量, 得到了线段 PC , PD , AD 的长度的几组值, 如下表:

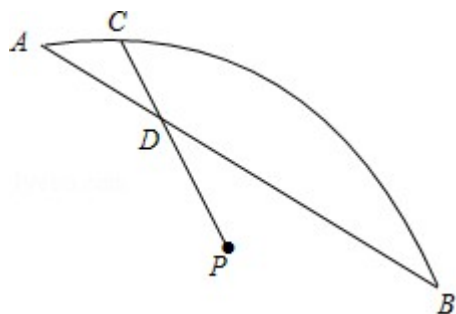
	位置1	位置2	位置3	位置4	位置5	位置6	位置7	位置8
PC/cm	3.44	3.30	3.07	2.70	2.25	2.25	2.64	2.83
PD/cm	3.44	2.69	2.00	1.36	0.96	1.13	2.00	2.83
AD/cm	0.00	0.78	1.54	2.30	3.01	4.00	5.11	6.00

在 PC , PD , AD 的长度这三个量中, 确定____的长度是自变量, ____的长度和____的长度都是这个自变量的函数;

- (2) 在同一平面直角坐标系 xOy 中, 画出(1)中所确定的函数的图象;



(3) 结合函数图象, 解决问题: 当 $PC=2PD$ 时, AD 的长度约为_____cm.



25. (5分) (2019•北京) 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $l: y=kx+1$ ($k \neq 0$) 与直线 $x=k$, 直线 $y=-k$ 分别交于点 A, B , 直线 $x=k$ 与直线 $y=-k$ 交于点 C .

(1) 求直线 l 与 y 轴的交点坐标;

(2) 横、纵坐标都是整数的点叫做整点, 记线段 AB, BC, CA 围成的区域 (不含边界) 为 W .

① 当 $k=2$ 时, 结合函数图象, 求区域 W 内的整点个数;

② 若区域 W 内没有整点, 直接写出 k 的取值范围.

26. (6分) (2019•北京) 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y=ax^2+bx-\frac{1}{a}$ 与 y 轴交于点

A , 将点 A 向右平移 2 个单位长度, 得到点 B , 点 B 在抛物线上.

(1) 求点 B 的坐标 (用含 a 的式子表示);

(2) 求抛物线的对称轴;

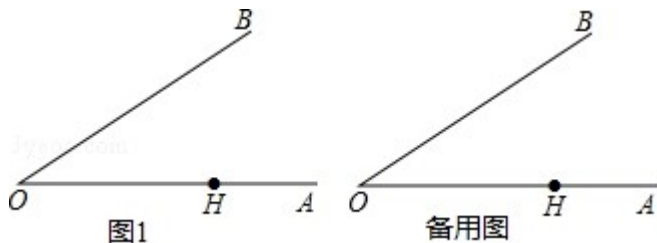
(3) 已知点 $P(\frac{1}{2}, -\frac{1}{a})$, $Q(2, 2)$. 若抛物线与线段 PQ 恰有一个公共点, 结合函数图象, 求 a 的取值范围.

27. (7分) (2019•北京) 已知 $\angle AOB=30^\circ$, H 为射线 OA 上一定点, $OH=\sqrt{3}+1$, P 为射线 OB 上一点, M 为线段 OH 上一动点, 连接 PM , 满足 $\angle OMP$ 为钝角, 以点 P 为中心, 将线段 PM 顺时针旋转 150° , 得到线段 PN , 连接 ON .

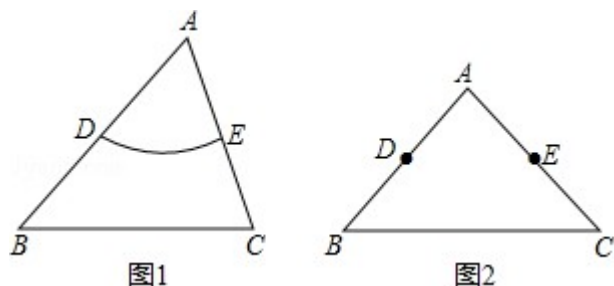
(1) 依题意补全图 1;

(2) 求证: $\angle OMP = \angle OPN$;

(3) 点 M 关于点 H 的对称点为 Q , 连接 QP . 写出一个 OP 的值, 使得对于任意的点 M 总有 $ON = QP$, 并证明.



28. (7分) (2019•北京) 在 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别是 $\triangle ABC$ 两边的中点, 如果 $\widehat{DE}$ 上的所有点都在 $\triangle ABC$ 的内部或边上, 则称 $\widehat{DE}$ 为 $\triangle ABC$ 的中内弧. 例如, 图 1 中 $\widehat{DE}$ 是 $\triangle ABC$ 的一条中内弧.



(1) 如图 2, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 2\sqrt{2}$, D, E 分别是 AB, AC 的中点, 画出 $\triangle ABC$ 的最长的中内弧 $\widehat{DE}$, 并直接写出此时 $\widehat{DE}$ 的长;

(2) 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(0, 2)$, $B(0, 0)$, $C(4t, 0)$ ($t > 0$), 在 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别是 AB, AC 的中点.

① 若 $t = \frac{1}{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的中内弧 $\widehat{DE}$ 所在圆的圆心 P 的纵坐标的取值范围;

② 若在 $\triangle ABC$ 中存在一条中内弧 $\widehat{DE}$, 使得 $\widehat{DE}$ 所在圆的圆心 P 在 $\triangle ABC$ 的内部或边上, 直接写出 t 的取值范围.

2019 年北京市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题 (本题共 16 分, 每小题 2 分)

1. (2 分) (2019•北京) 4 月 24 日是中国航天日. 1970 年的这一天, 我国自行设计、制造的第一颗人造地球卫星“东方红一号”成功发射, 标志着中国从此进入了太空时代, 它的运行轨道, 距地球最近点 439000 米, 将 439000 用科学记数法表示应为 ()

A. 0.439×10^6 B. 4.39×10^6 C. 4.39×10^5 D. 439×10^3

【考点】1I: 科学记数法—表示较大的数.

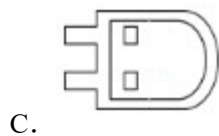
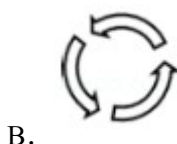
【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

【解答】解: 将 439000 用科学记数法表示为 4.39×10^5 .

故选: C.

【点评】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

2. (2 分) (2019•北京) 下列倡导节约的图案中, 是轴对称图形的是 ()



【考点】P3: 轴对称图形.

【专题】558: 平移、旋转与对称.

【分析】如果一个图形沿一条直线折叠, 直线两旁的部分能够互相重合, 这个图形叫做轴对称图形, 根据轴对称图形的概念求解.

【解答】解: A、不是轴对称图形, 故此选项错误;

B、不是轴对称图形, 故此选项错误;

C、是轴对称图形, 故此选项正确;

D、不是轴对称图形, 故此选项错误.

故选: C.

【点评】此题主要考查了轴对称图形的概念. 轴对称图形的关键是寻找对称轴, 图形两部分折叠后可重合.

3. (2分) (2019•北京) 正十边形的外角和为 ()

A. 180° B. 360° C. 720° D. 1440°

【考点】L3: 多边形内角与外角.

【专题】555: 多边形与平行四边形.

【分析】根据多边形的外角和定理进行选择.

【解答】解: 因为任意多边形的外角和都等于 360° ,

所以正十边形的外角和等于 360° .

故选: B.

【点评】本题考查了多边形外角和定理, 关键是熟记: 多边形的外角和等于 360° .

4. (2分) (2019•北京) 在数轴上, 点 A, B 在点 O 的两侧, 分别表示数 a, 2, 将点 A 向右平移 1 个单位长度, 得到点 C, 若 $CO=BO$, 则 a 的值为 ()

A. -3 B. -2 C. -1 D. 1

【考点】13: 数轴.

【专题】551: 线段、角、相交线与平行线.

【分析】根据 $CO=BO$ 可得点 C 表示的数为 -2, 据此可得 $a = -2 - 1 = -3$.

【解答】解: $\because$ 点 C 在原点的左侧, 且 $CO=BO$,

$\therefore$ 点 C 表示的数为 -2,

$\therefore a = -2 - 1 = -3$.

故选: A.

【点评】本题考查的是数轴, 熟知数轴上两点间的距离公式是解答此题的关键.

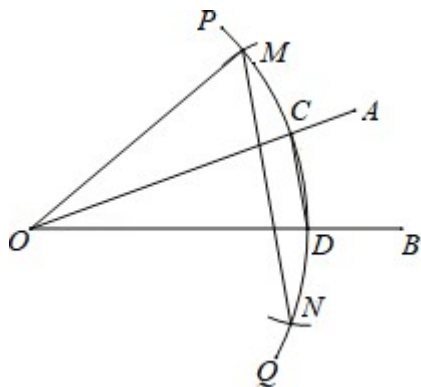
5. (2分) (2019•北京) 已知锐角 $\angle AOB$, 如图,

(1) 在射线 OA 上取一点 C, 以点 O 为圆心, OC 长为半径作 $\widehat{PQ}$, 交射线 OB 于点 D, 连接 CD;

(2) 分别以点 C, D 为圆心, CD 长为半径作弧, 交 $\widehat{PQ}$ 于点 M, N;

(3) 连接 OM, MN.

根据以上作图过程及所作图形, 下列结论中错误的是 ()



A. $\angle COM = \angle COD$

B. 若 $OM = MN$, 则 $\angle AOB = 20^\circ$

C. $MN \parallel CD$

D. $MN = 3CD$

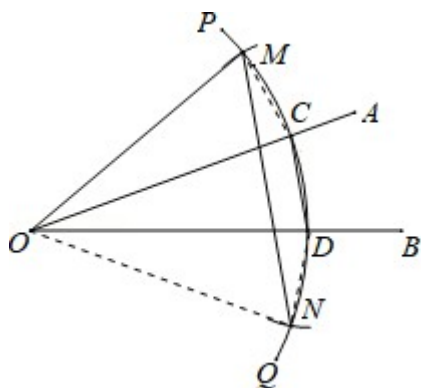
【考点】KD: 全等三角形的判定与性质; KH: 等腰三角形的性质; N3: 作图—复杂作图.

【专题】13: 作图题.

【分析】由作图知 $CM = CD = DN$, 再利用圆周角定理、圆心角定理逐一判断可得.

【解答】解: 由作图知 $CM = CD = DN$,

$\therefore \angle COM = \angle COD$, 故 A 选项正确;



$\because OM = ON = MN$,

$\therefore \triangle OMN$ 是等边三角形,

$\therefore \angle MON = 60^\circ$,

$\because CM = CD = DN$,

$\therefore \angle MOA = \angle AOB = \angle BON = \frac{1}{3} \angle MON = 20^\circ$, 故 B 选项正确;

$\because \angle MOA = \angle AOB = \angle BON = 20^\circ$,

$\therefore \angle OCD = \angle OCM = 80^\circ$,

$$\therefore \angle MCD = 160^\circ,$$

$$\text{又 } \angle CMN = \frac{1}{2} \angle AON = 20^\circ,$$

$$\therefore \angle MCD + \angle CMN = 180^\circ,$$

$\therefore MN \parallel CD$, 故 C 选项正确;

$\because MC + CD + DN > MN$, 且 $CM = CD = DN$,

$\therefore 3CD > MN$, 故 D 选项错误;

故选: D.

【点评】 本题主要考查作图 - 复杂作图, 解题的关键是掌握圆心角定理和圆周角定理等知识.

6. (2分) (2019•北京) 如果 $m+n=1$, 那么代数式 $(\frac{2m+n}{m^2-mn} + \frac{1}{m}) \cdot (m^2-n^2)$ 的值为 ()

A. -3 B. -1 C. 1 D. 3

【考点】 6D: 分式的化简求值.

【专题】 11: 计算题; 513: 分式.

【分析】 原式化简后, 约分得到最简结果, 把已知等式代入计算即可求出值.

【解答】 解: 原式 $= \frac{2m+n+m-n}{m(m-n)} \cdot (m+n)(m-n) = \frac{3m}{m(m-n)} \cdot (m+n)(m-n) =$

$$3(m+n),$$

当 $m+n=1$ 时, 原式 $= 3$.

故选: D.

【点评】 此题考查了分式的化简求值, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

7. (2分) (2019•北京) 用三个不等式 $a > b$, $ab > 0$, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 中的两个不等式作为题设,

余下的一个不等式作为结论组成一个命题, 组成真命题的个数为 ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【考点】 O1: 命题与定理.

【专题】 52: 方程与不等式.

【分析】 由题意得出 3 个命题, 由不等式的性质再判断真假即可.

【解答】 解: ①若 $a > b$, $ab > 0$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 真命题;

② 若 $ab > 0$, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 则 $a > b$, 真命题;

③ 若 $a > b$, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 则 $ab > 0$, 真命题;

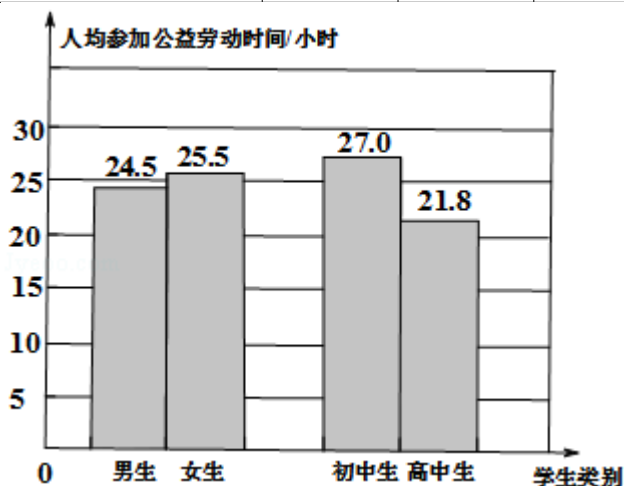
∴ 组成真命题的个数为 3 个;

故选: D.

【点评】 本题考查了命题与定理、不等式的性质、命题的组成、真命题和假命题的定义; 熟练掌握命题的组成和不等式的性质是解题的关键.

8. (2 分) (2019•北京) 某校共有 200 名学生, 为了解本学期学生参加公益劳动的情况, 收集了他们参加公益劳动时间 (单位: 小时) 等数据, 以下是根据数据绘制的统计图表的一部分

时间 t		$0 \leq t < 10$	$10 \leq t < 20$	$20 \leq t < 30$	$30 \leq t < 40$	$t \geq 40$
人数						
学生类型						
性别	男	7	31	25	30	4
	女	8	29	26	32	8
学段	初中		25	36	44	11
	高中					



下面有四个推断:

- ① 这 200 名学生参加公益劳动时间的平均数一定在 24.5 - 25.5 之间
- ② 这 200 名学生参加公益劳动时间的中位数在 20 - 30 之间
- ③ 这 200 名学生中的初中生参加公益劳动时间的中位数一定在 20~30 之间
- ④ 这 200 名学生中的高中生参加公益劳动时间的中位数可能在 20~30 之间

所有合理推断的序号是 ()

- A. ①③ B. ②④ C. ①②③ D. ①②③④

【考点】V7: 频数 (率) 分布表; V8: 频数 (率) 分布直方图; W1: 算术平均数; W4: 中位数.

【专题】542: 统计的应用.

【分析】平均数是指在一组数据中所有数据之和再除以数据的个数. 它是反映数据集中趋势的一项指标. 将一组数据按照从小到大 (或从大到小) 的顺序排列, 如果数据的个数是奇数, 则处于中间位置的数就是这组数据的中位数. 如果这组数据的个数是偶数, 则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数.

【解答】解: ① 解这 200 名学生参加公益劳动时间的平均数: ① $(24.5 \times 97 + 25.5 \times 103) \div 200 = 25.015$, 一定在 24.5 - 25.5 之间, 正确;
② 这 200 名学生参加公益劳动时间的中位数在 20 - 30 之间, 正确;
③ 这 200 名学生中的初中生参加公益劳动时间的中位数一定在 20~30 之间, 正确;
④ 这 200 名学生中的高中生参加公益劳动时间的中位数可能在 20~30 之间, 错误.
故选: C.

【点评】本题考查了中位数与平均数, 正确理解中位数与平均数的意义是解题的关键.

二、填空题 (本题共 16 分, 每小题 2 分)

9. (2 分) (2019•北京) 分式 $\frac{x-1}{x}$ 的值为 0, 则 x 的值是 1.

【考点】63: 分式的值为零的条件.

【专题】11: 计算题.

【分析】根据分式的值为零的条件得到 $x - 1 = 0$ 且 $x \neq 0$, 易得 $x = 1$.

【解答】解: $\because$ 分式 $\frac{x-1}{x}$ 的值为 0,

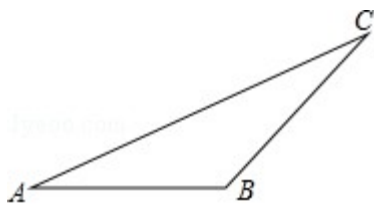
$$\therefore x - 1 = 0 \text{ 且 } x \neq 0,$$

$$\therefore x = 1.$$

故答案为 1.

【点评】本题考查了分式的值为零的条件: 当分式的分母不为零, 分子为零时, 分式的值为零.

10. (2 分) (2019•北京) 如图, 已知 $\triangle ABC$, 通过测量、计算得 $\triangle ABC$ 的面积约为 1.9 cm^2 . (结果保留一位小数)



【考点】K3: 三角形的面积.

【专题】552: 三角形.

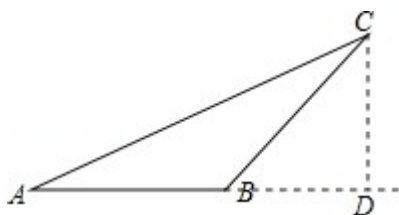
【分析】过点 C 作 $CD \perp AB$ 的延长线于点 D , 测量出 AB , CD 的长, 再利用三角形的面积公式即可求出 $\triangle ABC$ 的面积.

【解答】解: 过点 C 作 $CD \perp AB$ 的延长线于点 D , 如图所示.

经过测量, $AB = 2.2\text{cm}$, $CD = 1.7\text{cm}$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} \times 2.2 \times 1.7 \approx 1.9 (\text{cm}^2).$$

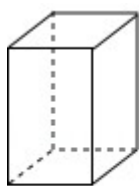
故答案为: 1.9.



【点评】本题考查了三角形的面积, 牢记三角形的面积等于底边长与高线乘积的一半是解题的关键.

11. (2分) (2019•北京) 在如图所示的几何体中, 其三视图中有矩形的是 ①②.

(写出所有正确答案的序号)



①长方体



②圆柱



③圆锥

【考点】U1: 简单几何体的三视图.

【专题】55F: 投影与视图.

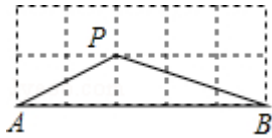
【分析】主视图、左视图、俯视图是分别从物体正面、左面和上面看, 所得到的图形, 据此作答.

【解答】解: 长方体主视图, 左视图, 俯视图都是矩形,

圆柱体的主视图是矩形, 左视图是矩形, 俯视图是圆,
圆锥的主视图、左视图是等腰三角形, 俯视图是带有圆心的圆,
故答案为: ①②.

【点评】本题主要考查三视图的知识, 熟练掌握常见几何体的三视图是解题的关键.

12. (2 分) (2019•北京) 如图所示的网格是正方形网格, 则 $\angle PAB + \angle PBA = \underline{45}^\circ$
(点 A, B, P 是网格线交点).



【考点】KQ: 勾股定理; KS: 勾股定理的逆定理.

【专题】554: 等腰三角形与直角三角形.

【分析】延长 AP 交格点于 D , 连接 BD , 根据勾股定理得到 $PD^2 = BD^2 = 1 + 2^2 = 5$, $PB^2 = 1^2 + 3^2 = 10$, 求得 $PD^2 + DB^2 = PB^2$, 于是得到 $\angle PDB = 90^\circ$, 根据三角形外角的性质即可得到结论.

【解答】解: 延长 AP 交格点于 D , 连接 BD ,

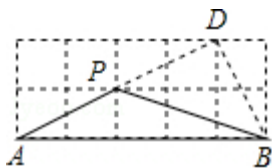
则 $PD^2 = BD^2 = 1 + 2^2 = 5$, $PB^2 = 1^2 + 3^2 = 10$,

$\therefore PD^2 + DB^2 = PB^2$,

$\therefore \angle PDB = 90^\circ$,

$\therefore \angle DPB = \angle PAB + \angle PBA = 45^\circ$,

故答案为: 45.



【点评】本题考查了勾股定理的逆定理, 勾股定理, 三角形的外角的性质, 等腰直角三角形的判定和性质, 正确的作出辅助线是解题的关键.

13. (2 分) (2019•北京) 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $A(a, b)$ ($a > 0, b > 0$) 在双

曲线 $y = \frac{k_1}{x}$ 上, 点 A 关于 x 轴的对称点 B 在双曲线 $y = \frac{k_2}{x}$ 上, 则 $k_1 + k_2$ 的值为 0.

【考点】G4: 反比例函数的性质; G6: 反比例函数图象上点的坐标特征; P5: 关于 x 轴、 y 轴对称的点的坐标.

【专题】33: 函数思想; 534: 反比例函数及其应用; 558: 平移、旋转与对称.

【分析】由点 $A(a, b)$ ($a > 0, b > 0$) 在双曲线 $y = \frac{k_1}{x}$ 上, 可得 $k_1 = ab$, 由点 A 与点 B

关于 x 轴的对称, 可得到点 B 的坐标, 进而表示出 k_2 , 然后得出答案.

【解答】解: $\because$ 点 $A(a, b)$ ($a > 0, b > 0$) 在双曲线 $y = \frac{k_1}{x}$ 上,

$$\therefore k_1 = ab;$$

又 $\because$ 点 A 与点 B 关于 x 轴的对称,

$$\therefore B(a, -b)$$

$\because$ 点 B 在双曲线 $y = \frac{k_2}{x}$ 上,

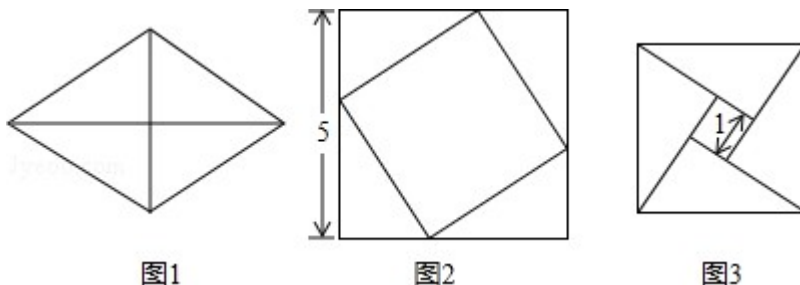
$$\therefore k_2 = -ab;$$

$$\therefore k_1 + k_2 = ab + (-ab) = 0;$$

故答案为: 0.

【点评】考查反比例函数图象上的点坐标的特征, 关于 x 轴对称的点的坐标的特征以及互为相反数的和为 0 的性质.

14. (2分) (2019•北京) 把图 1 中的菱形沿对角线分成四个全等的直角三角形, 将这四个直角三角形分别拼成如图 2, 图 3 所示的正方形, 则图 1 中菱形的面积为 12.



【考点】L8: 菱形的性质; LE: 正方形的性质.

【专题】521: 一次方程(组)及应用; 556: 矩形 菱形 正方形.

【分析】由菱形的性质得出 $OA = OC$, $OB = OD$, $AC \perp BD$, 设 $OA = x$, $OB = y$, 由题意得:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}, \text{得出 } AC=2OA=6, BD=2OB=4, \text{即可得出菱形的面积.}$$

【解答】解: 如图 1 所示:

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore OA = OC, OB = OD, AC \perp BD,$$

设 $OA=x$, $OB=y$,

由题意得:
$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases},$$

解得:
$$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases},$$

$\therefore AC=2OA=6$, $BD=2OB=4$,

$\therefore$ 菱形 $ABCD$ 的面积 $=\frac{1}{2}AC \times BD = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$;

故答案为: 12.

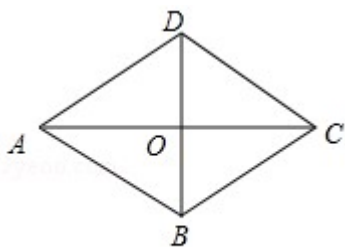


图1

【点评】本题考查了菱形的性质、正方形的性质、二元一次方程组的应用; 熟练掌握正方形和菱形的性质, 由题意列出方程组是解题的关键.

15. (2分) (2019•北京) 小天想要计算一组数据 92, 90, 94, 86, 99, 85 的方差 s_0^2 , 在计算平均数的过程中, 将这组数据中的每一个数都减去 90, 得到一组新数据 2, 0, 4, -4, 9, -5, 记这组新数据的方差为 s_1^2 , 则 s_1^2 s_0^2 (填 “>”, “=” 或 “<”)

【考点】W1: 算术平均数; W7: 方差.

【专题】542: 统计的应用.

【分析】根据一组数据中的每一个数据都加上或减去同一个非零常数, 那么这组数据的波动情况不变, 即方差不变, 即可得出答案.

【解答】解: $\because$ 一组数据中的每一个数据都加上 (或都减去) 同一个常数后, 它的平均数都加上 (或都减去) 这一个常数, 两数进行相减, 方差不变,

$\therefore$ 则 $s_1^2 = s_0^2$.

故答案为 =.

【点评】本题考查方差的意义: 一般地设 n 个数据, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数为 $\bar{x}$, 则方差

$$S^2 = \frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2],$$

它反映了一组数据的波动大小, 方差

越大, 波动性越大, 反之也成立, 关键是掌握一组数据都加上同一个非零常数, 方差不变.

16. (2 分) (2019•北京) 在矩形 $ABCD$ 中, M, N, P, Q 分别为边 AB, BC, CD, DA 上的点 (不与端点重合), 对于任意矩形 $ABCD$, 下面四个结论中,

- ① 存在无数个四边形 $MNPQ$ 是平行四边形;
- ② 存在无数个四边形 $MNPQ$ 是矩形;
- ③ 存在无数个四边形 $MNPQ$ 是菱形;
- ④ 至少存在一个四边形 $MNPQ$ 是正方形.

所有正确结论的序号是 ①②③.

【考点】L7: 平行四边形的判定与性质; LA: 菱形的判定与性质; LD: 矩形的判定与性质; LF: 正方形的判定.

【专题】556: 矩形 菱形 正方形.

【分析】根据矩形的判定和性质, 菱形的判定, 正方形的判定, 平行四边形的判定定理即可得到结论.

【解答】解: ①如图, $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, 连接 AC, BD 交于 O , 过点 O 直线 MP 和 QN , 分别交 AB, BC, CD, AD 于 M, N, P, Q , 则四边形 $MNPQ$ 是平行四边形,

故当 $MQ \parallel PN, PQ \parallel MN$, 四边形 $MNPQ$ 是平行四边形,

故存在无数个四边形 $MNPQ$ 是平行四边形; 故正确;

②如图, 当 $PM = QN$ 时, 四边形 $MNPQ$ 是菱形, 故存在无数个四边形 $MNPQ$ 是矩形; 故正确;

③如图, 当 $PM \perp QN$ 时, 存在无数个四边形 $MNPQ$ 是菱形; 故正确;

④当四边形 $MNPQ$ 是正方形时, $MQ = PQ$,

则 $\triangle AMQ \cong \triangle DQP$,

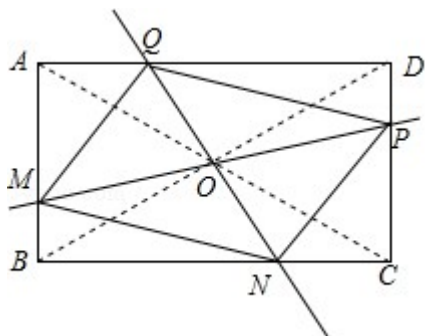
$\therefore AM = QD, AQ = PD$,

$\because PD = BM$,

$\therefore AB = AD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形与任意矩形 $ABCD$ 矛盾, 故错误;

故答案为: ①②③.



【点评】本题考查了矩形的判定和性质，菱形的判定，正方形的判定，平行四边形的判定定理，熟记各定理是解题的关键。

二、解答题（本题共 68 分，第 17-21 题，每小题 5 分，第 22-24 题，每小题 5 分，第 25 题 5 分，第 26 题 6 分，第 27-28 题，每小题 5 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程，

17. （5 分）（2019•北京）计算： $|- \sqrt{3}| - (4 - \pi)^0 + 2\sin 60^\circ + (\frac{1}{4})^{-1}$.

【考点】2C：实数的运算；6E：零指数幂；6F：负整数指数幂；T5：特殊角的三角函数值.

【专题】511：实数.

【分析】直接利用绝对值的性质以及零指数幂的性质、特殊角的三角函数值、负指数幂的性质分别化简得出答案

【解答】解：原式 $= \sqrt{3} - 1 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 = \sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} + 4 = 3 + 2\sqrt{3}$.

【点评】此题主要考查了实数运算，正确化简各数是解题关键.

18. （5 分）（2019•北京）解不等式组：
$$\begin{cases} 4(x-1) < x+2 \\ \frac{x+7}{3} > x \end{cases}$$

【考点】CB：解一元一次不等式组.

【专题】524：一元一次不等式(组)及应用.

【分析】首先解每个不等式，两个不等式的解集的公共部分就是不等式组的解集.

【解答】解：
$$\begin{cases} 4(x-1) < x+2 & \text{①} \\ \frac{x+7}{3} > x & \text{②} \end{cases},$$

解①得： $x < 2$,

解②得 $x < \frac{7}{2}$,

则不等式组的解集为 $2 < x < \frac{7}{2}$.

【点评】 本题考查的是解一元一次不等式组, 熟知“同大取大; 同小取小; 大小小大中间找; 大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

19. (5 分) (2019•北京) 关于 x 的方程 $x^2 - 2x + 2m - 1 = 0$ 有实数根, 且 m 为正整数, 求 m 的值及此时方程的根.

【考点】 AA: 根的判别式.

【专题】 523: 一元二次方程及应用.

【分析】 直接利用根的判别式得出 m 的取值范围进而解方程得出答案.

【解答】 解: $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 - 2x + 2m - 1 = 0$ 有实数根,

$$\therefore b^2 - 4ac = 4 - 4(2m - 1) \geq 0,$$

解得: $m \leq 1$,

$\because m$ 为正整数,

$$\therefore m = 1,$$

$$\therefore x^2 - 2x + 1 = 0,$$

则 $(x - 1)^2 = 0$,

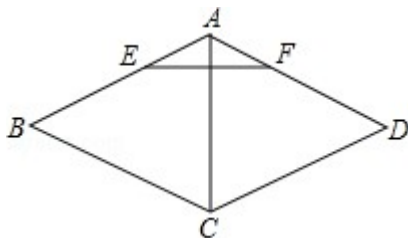
解得: $x_1 = x_2 = 1$.

【点评】 此题主要考查了根的判别式, 正确得出 m 的值是解题关键.

20. (5 分) (2019•北京) 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, AC 为对角线, 点 E, F 分别在 AB, AD 上, $BE = DF$, 连接 EF .

(1) 求证: $AC \perp EF$;

(2) 延长 EF 交 CD 的延长线于点 G , 连接 BD 交 AC 于点 O . 若 $BD = 4$, $\tan G = \frac{1}{2}$, 求 AO 的长.



【考点】 KD: 全等三角形的判定与性质; L8: 菱形的性质; T7: 解直角三角形.

【专题】 556: 矩形 菱形 正方形; 55E: 解直角三角形及其应用.

【分析】(1) 由菱形的性质得出 $AB=AD$, $AC \perp BD$, $OB=OD$, 得出 $AB:BE=AD:$

DF , 证出 $EF \parallel BD$ 即可得出结论;

(2) 由平行线的性质得出 $\angle G = \angle ADO$, 由三角函数得出 $\tan G = \tan \angle ADO = \frac{OA}{OD} = \frac{1}{2}$,

得出 $OA = \frac{1}{2}OD$, 由 $BD=4$, 得出 $OD=2$, 得出 $OA=1$.

【解答】(1) 证明: 连接 BD , 如图 1 所示:

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AB=AD$, $AC \perp BD$, $OB=OD$,

$\because BE=DF$,

$\therefore AB:BE=AD:DF$,

$\therefore EF \parallel BD$,

$\therefore AC \perp EF$;

(2) 解: 如图 2 所示:

$\because$ 由 (1) 得: $EF \parallel BD$,

$\therefore \angle G = \angle ADO$,

$\therefore \tan G = \tan \angle ADO = \frac{OA}{OD} = \frac{1}{2}$,

$\therefore OA = \frac{1}{2}OD$,

$\because BD=4$,

$\therefore OD=2$,

$\therefore OA=1$.

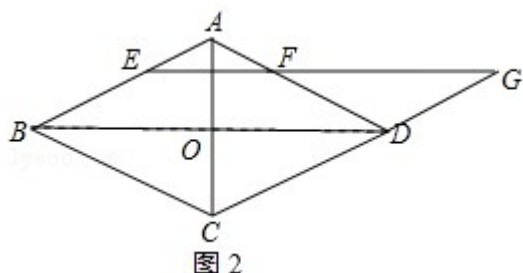


图 2

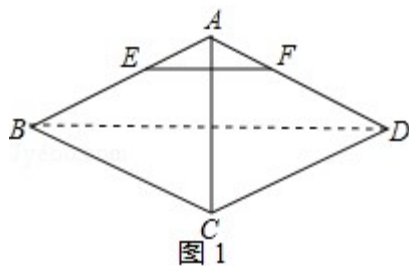
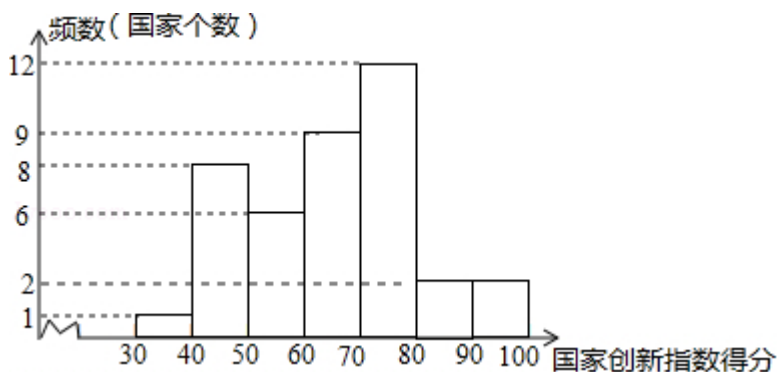


图 1

【点评】本题考查了菱形的性质、平行线的判定与性质、解直角三角形等知识；熟练掌握菱形的性质是解题的关键.

21. (5分) (2019•北京) 国家创新指数是反映一个国家科学技术和创新竞争力的综合指数. 对国家创新指数得分排名前40的国家的有关数据进行收集、整理、描述和分析. 下面给出了部分信息:

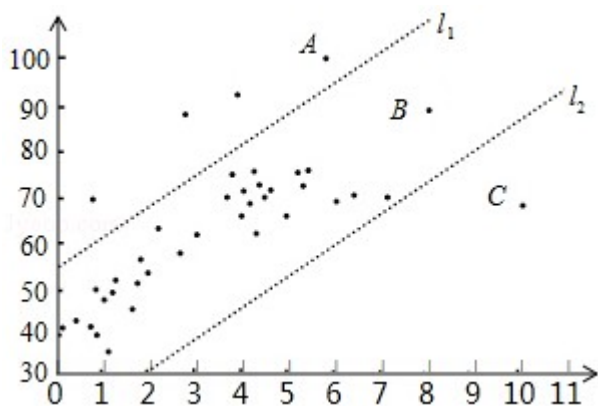
a. 国家创新指数得分的频数分布直方图 (数据分成7组: $30 \leq x < 40$, $40 \leq x < 50$, $50 \leq x < 60$, $60 \leq x < 70$, $70 \leq x < 80$, $80 \leq x < 90$, $90 \leq x \leq 100$);



b. 国家创新指数得分在 $60 \leq x < 70$ 这一组的是:

61.7 62.4 63.6 65.9 66.4 68.5 69.1 69.3 69.5

c. 40个国家的人均国内生产总值和国家创新指数得分情况统计图:



d. 中国的国家创新指数得分为69.5.

(以上数据来源于《国家创新指数报告(2018)》)

根据以上信息, 回答下列问题:

(1) 中国的国家创新指数得分排名世界第 17;

(2) 在 40 个国家的人均国内生产总值和国家创新指数得分情况统计图中, 包括中国在内的少数几个国家所对应的点位于虚线 l_1 的上方, 请在图中用 “○” 圈出代表中国的点;

(3) 在国家创新指数得分比中国高的国家中, 人均国内生产总值的最小值约为 2.8 万美元; (结果保留一位小数)

(4) 下列推断合理的是 ①②.

① 相比于点 A , B 所代表的国家, 中国的国家创新指数得分还有一定差距, 中国提出“加快建设创新型国家”的战略任务, 进一步提高国家综合创新能力;

② 相比于点 B , C 所代表的国家, 中国的人均国内生产总值还有一定差距, 中国提出“决胜全面建成小康社会”的奋斗目标, 进一步提高人均国内生产总值.

【考点】1H: 近似数和有效数字; V5: 用样本估计总体; V8: 频数(率)分布直方图.

【专题】542: 统计的应用.

【分析】(1) 由国家创新指数得分为 69.5 以上(含 69.5)的国家有 17 个, 即可得出结果;

(2) 根据中国在虚线 l_1 的上方, 中国的创新指数得分为 69.5, 找出该点即可;

(3) 根据 40 个国家的人均国内生产总值和国家创新指数得分情况统计图, 即可得出结果;

(4) 根据 40 个国家的人均国内生产总值和国家创新指数得分情况统计图, 即可判断 ① ② 的合理性.

【解答】解: (1) $\because$ 国家创新指数得分为 69.5 以上(含 69.5)的国家有 17 个, $\therefore$ 国家创新指数得分排名前 40 的国家中, 中国的国家创新指数得分排名世界第 17, 故答案为: 17;

(2) 如图所示:

(3) 由 40 个国家的人均国内生产总值和国家创新指数得分情况统计图可知, 在国家创新指数得分比中国高的国家中, 人均国内生产总值的最小值约为 2.8 万美元;

故答案为: 2.8;

(4) 由 40 个国家的人均国内生产总值和国家创新指数得分情况统计图可知,

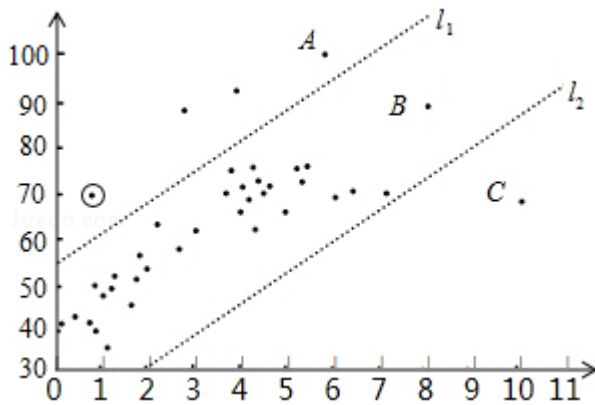
① 相比于点 A 、 B 所代表的国家, 中国的国家创新指数得分还有一定差距, 中国提出

“加快建设创新型国家”的战略任务, 进一步提高国家综合创新能力; 合理;

② 相比于点 B , C 所代表的国家, 中国的人均国内生产总值还有一定差距, 中国提出

“决胜全面建成小康社会”的奋斗目标, 进一步提高人均国内生产总值; 合理;

故答案为: ①②.



【点评】 本题考查了频数分布直方图、统计图、样本估计总体、近似数和有效数字等知识; 读懂频数分布直方图和统计图是解题的关键.

22. (6分) (2019•北京) 在平面内, 给定不在同一条直线上的点 A , B , C , 如图所示, 点 O 到点 A , B , C 的距离均等于 a (a 为常数), 到点 O 的距离等于 a 的所有点组成图形 G , $\angle ABC$ 的平分线交图形 G 于点 D , 连接 AD , CD .

(1) 求证: $AD=CD$;

(2) 过点 D 作 $DE \perp BA$, 垂足为 E , 作 $DF \perp BC$, 垂足为 F , 延长 DF 交图形 G 于点 M , 连接 CM . 若 $AD=CM$, 求直线 DE 与图形 G 的公共点个数.

A

B

C

【考点】 KF: 角平分线的性质; M5: 圆周角定理; MA: 三角形的外接圆与外心.

【专题】 55A: 与圆有关的位置关系.

【分析】 (1) 利用圆的定义得到图象 G 为 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$, 由 $\angle ABD = \angle CBD$ 得到 $\widehat{AD} = \widehat{CD}$, 从而圆周角、弧、弦的关系得到 $AD=CD$;

(2) 如图, 证明 $CD=CM$, 则可得到 BC 垂直平分 DM , 利用垂径定理得到 BC 为直径, 再证明 $OD \perp DE$, 从而可判断 DE 为 $\odot O$ 的切线, 于是得到直线 DE 与图形 G 的公共点个数.

- ① 将诗词分成 4 组, 第 i 组有 x_i 首, $i=1, 2, 3, 4$;
- ② 对于第 i 组诗词, 第 i 天背诵第一遍, 第 $(i+1)$ 天背诵第二遍, 第 $(i+3)$ 天背诵第三遍, 三遍后完成背诵, 其它天无需背诵, $i=1, 2, 3, 4$;

	第 1 天	第 2 天	第 3 天	第 4 天	第 5 天	第 6 天	第 7 天
第 1 组	x_1	x_1		x_1			
第 2 组		x_2	x_2		x_2		
第 3 组							
第 4 组				x_4	x_4		x_4

- ③ 每天最多背诵 14 首, 最少背诵 4 首.

解答下列问题:

- (1) 填入 x_3 补全上表;
- (2) 若 $x_1=4$, $x_2=3$, $x_3=4$, 则 x_4 的所有可能取值为 4, 5, 6;
- (3) 7 天后, 小云背诵的诗词最多为 23 首.

【考点】37: 规律型: 数字的变化类.

【专题】2A: 规律型.

【分析】(1) 根据表中的规律即可得到结论;

(2) 根据题意列不等式即可得到结论;

(3) 根据题意列不等式, 即可得到结论.

【解答】解: (1)

	第 1 天	第 2 天	第 3 天	第 4 天	第 5 天	第 6 天	第 7 天
第 1 组	x_1	x_1		x_1			
第 2 组		x_2	x_2		x_2		
第 3 组			x_3	x_3		x_3	
第 4 组				x_4	x_4		x_4

- (2) $\because$ 每天最多背诵 14 首, 最少背诵 4 首,

$$\therefore x_1 \geq 4, x_3 \geq 4, x_4 \geq 4,$$

$$\therefore x_1 + x_3 \geq 8 \text{ ①},$$

$$\therefore x_1 + x_3 + x_4 \leq 14 \text{ ②},$$

把①代入②得, $x_4 \leq 6$,

$$\therefore 4 \leq x_4 \leq 6,$$

$\therefore x_4$ 的所有可能取值为 4, 5, 6,

故答案为: 4, 5, 6;

(3) $\because$ 每天最多背诵 14 首, 最少背诵 4 首,

$\therefore$ 由第 2 天, 第 3 天, 第 4 天, 第 5 天得,

$$x_1 + x_2 \leq 14 \text{ ①}, \quad x_2 + x_3 \leq 14 \text{ ②}, \quad x_1 + x_3 + x_4 \leq 14 \text{ ③}, \quad x_2 + x_4 \leq 14 \text{ ④},$$

$$\text{①} + \text{②} + \text{④} - \text{③} \text{ 得, } 3x_2 \leq 28,$$

$$\therefore x_2 \leq \frac{28}{3},$$

$$\therefore x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq \frac{28}{3} + 14 = \frac{70}{3},$$

$$\therefore x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 23\frac{1}{3},$$

$\therefore$ 7 天后, 小云背诵的诗词最多为 23 首,

故答案为: 23.

【点评】 本题考查了规律型: 数字的变化类, 不等式的应用, 正确的理解题意是解题的关键.

24. (6 分) (2019•北京) 如图, P 是 $\widehat{AB}$ 与弦 AB 所围成的图形的外部的一定点, C 是 $\widehat{AB}$ 上一动点, 连接 PC 交弦 AB 于点 D .

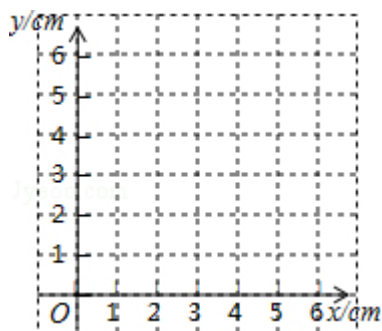
小腾根据学习函数的经验, 对线段 PC , PD , AD 的长度之间的关系进行了探究. 下面是小腾的探究过程, 请补充完整:

(1) 对于点 C 在 $\widehat{AB}$ 上的不同位置, 画图、测量, 得到了线段 PC , PD , AD 的长度的几组值, 如下表:

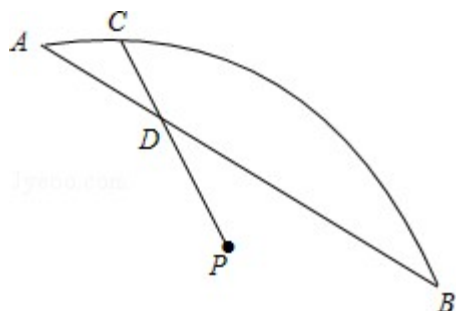
	位置 1	位置 2	位置 3	位置 4	位置 5	位置 6	位置 7	位置 8
PC/cm	3.44	3.30	3.07	2.70	2.25	2.25	2.64	2.83
PD/cm	3.44	2.69	2.00	1.36	0.96	1.13	2.00	2.83
AD/cm	0.00	0.78	1.54	2.30	3.01	4.00	5.11	6.00

在 PC , PD , AD 的长度这三个量中, 确定 PC 的长度是自变量, PD 的长度和 AD 的长度都是这个自变量的函数;

(2) 在同一平面直角坐标系 xOy 中, 画出 (1) 中所确定的函数的图象;



(3) 结合函数图象, 解决问题: 当 $PC=2PD$ 时, AD 的长度约为 1.59 (答案不唯一) cm.



【考点】E7: 动点问题的函数图象.

【专题】13: 作图题; 33: 函数思想.

【分析】(1) 按照变量的定义, PC 是自变量, 而 PD 、 AD 随 PC 的变化而变化, 故 PD 、 AD 都是因变量, 即可求解;

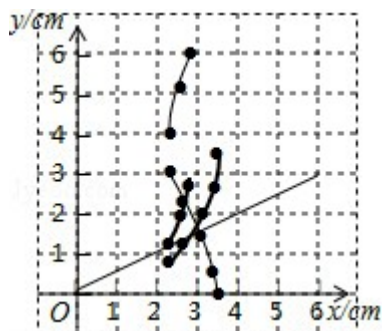
(2) 描点画出如图图象;

(3) $PC=2PD$, 即 $PD=\frac{1}{2}PC$, 画出 $y=\frac{1}{2}x$, 交曲线 AD 的值为所求, 即可求解.

【解答】解: (1) 按照变量的定义, PC 是自变量, 而 PD 、 AD 随 PC 的变化而变化, 故 PD 、 AD 都是因变量,

故答案为: PC 、 PD 、 AD ;

(2) 描点画出如图图象;



$$(3) PC=2PD, \text{ 即 } PD=\frac{1}{2}PC,$$

画出 $y=\frac{1}{2}x$, 交曲线 AD 的值约为 1.59,

故答案为 1.59 (答案不唯一) .

【点评】 本题考查的是动点的函数图象, 此类问题主要是通过描点画出函数图象, 根据函数关系, 在图象上查出相应的近似数值.

25. (5分) (2019•北京) 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $l: y=kx+1$ ($k \neq 0$) 与直线 $x=k$, 直线 $y=-k$ 分别交于点 A, B , 直线 $x=k$ 与直线 $y=-k$ 交于点 C .

(1) 求直线 l 与 y 轴的交点坐标;

(2) 横、纵坐标都是整数的点叫做整点, 记线段 AB, BC, CA 围成的区域 (不含边界) 为 W .

① 当 $k=2$ 时, 结合函数图象, 求区域 W 内的整点个数;

② 若区域 W 内没有整点, 直接写出 k 的取值范围.

【考点】 F8: 一次函数图象上点的坐标特征.

【专题】 533: 一次函数及其应用.

【分析】 (1) 令 $x=0, y=1$, 直线 l 与 y 轴的交点坐标 $(0, 1)$;

(2) ① 当 $k=2$ 时, $A(2, 5), B(-\frac{3}{2}, -2), C(2, -2)$, 在 W 区域内有 6

个整数点; ② 当 $x=k+1$ 时, $y=-k+1$, 则有 $k^2+2k=0, k=-2$, 当 $0 > k \geq -1$ 时, W 内没有整数点;

【解答】 解: (1) 令 $x=0, y=1$,

$\therefore$ 直线 l 与 y 轴的交点坐标 $(0, 1)$;

(2) 由题意, $A(k, k^2+1), B(-\frac{k-1}{k}, -k), C(k, -k)$,

① 当 $k=2$ 时, $A(2, 5), B(-\frac{3}{2}, -2), C(2, -2)$,

在 W 区域内有 6 个整数点: $(0, 0), (0, -1), (1, 0), (1, -1),$

$(1, 1), (1, 2)$;

② 直线 AB 的解析式为 $y=kx+1$,

当 $x=k+1$ 时, $y=-k+1$, 则有 $k^2+2k=0$,

$\therefore k=-2$,

当 $0 > k \geq -1$ 时, W 内没有整数点,

$\therefore$ 当 $0 > k \geq -1$ 或 $k = -2$ 时 W 内没有整数点;

【点评】 本题考查一次函数图象上点的特征; 能够数形结合解题, 根据 k 变化分析 W 区域内整数点的情况是解题的关键.

26. (6分) (2019•北京) 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx - \frac{1}{a}$ 与 y 轴交于点

A , 将点 A 向右平移 2 个单位长度, 得到点 B , 点 B 在抛物线上.

(1) 求点 B 的坐标 (用含 a 的式子表示);

(2) 求抛物线的对称轴;

(3) 已知点 $P(\frac{1}{2}, -\frac{1}{a})$, $Q(2, 2)$. 若抛物线与线段 PQ 恰有一个公共点, 结合函数图象, 求 a 的取值范围.

【考点】 H4: 二次函数图象与系数的关系; H5: 二次函数图象上点的坐标特征; Q3: 坐标与图形变化 - 平移.

【专题】 535: 二次函数图象及其性质.

【分析】 (1) $A(0, -\frac{1}{a})$ 向右平移 2 个单位长度, 得到点 $B(2, -\frac{1}{a})$;

(2) A 与 B 关于对称轴 $x=1$ 对称;

(3) ① $a > 0$ 时, 当 $x=2$ 时, $y = -\frac{1}{a} < 2$, 当 $y = -\frac{1}{a}$ 时, $x=0$ 或 $x=2$, 所以函数与 AB 无交点;

② $a < 0$ 时, 当 $y=2$ 时, $ax^2 - 2ax - \frac{1}{a} = 2$, $x = \frac{a+|a+1|}{a}$ 或 $x = \frac{a-|a+1|}{a}$ 当 $\frac{a+|a+1|}{a} \leq 2$ 时, $a \leq -\frac{1}{2}$;

≤ 2 时, $a \leq -\frac{1}{2}$;

【解答】 解: (1) $A(0, -\frac{1}{a})$

点 A 向右平移 2 个单位长度, 得到点 $B(2, -\frac{1}{a})$;

(2) A 与 B 关于对称轴 $x=1$ 对称,

$\therefore$ 抛物线对称轴 $x=1$;

(3) $\therefore$ 对称轴 $x=1$,

$$\therefore b - 2a,$$

$$\therefore y = ax^2 - 2ax - \frac{1}{a},$$

① $a > 0$ 时,

$$\text{当 } x=2 \text{ 时, } y = -\frac{1}{a} < 2,$$

$$\text{当 } y = -\frac{1}{a} \text{ 时, } x=0 \text{ 或 } x=2,$$

$\therefore$ 函数与 AB 无交点;

② $a < 0$ 时,

$$\text{当 } y=2 \text{ 时, } ax^2 - 2ax - \frac{1}{a} = 2,$$

$$x = \frac{a+|a+1|}{a} \text{ 或 } x = \frac{a-|a+1|}{a}$$

$$\text{当 } \frac{a+|a+1|}{a} \leq 2 \text{ 时, } a \leq -\frac{1}{2};$$

$\therefore$ 当 $a \leq -\frac{1}{2}$ 时, 抛物线与线段 PQ 恰有一个公共点;

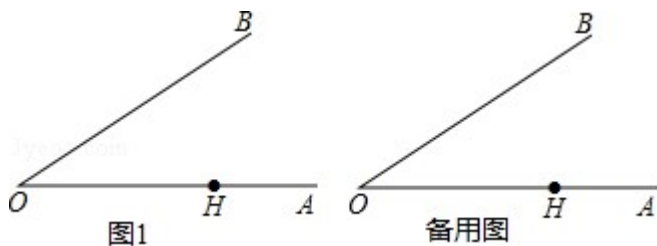
【点评】 本题考查二次函数的图象及性质; 熟练掌握二次函数图象上点的特征, 数形结合讨论交点是解题的关键.

27. (7分) (2019•北京) 已知 $\angle AOB = 30^\circ$, H 为射线 OA 上一定点, $OH = \sqrt{3} + 1$, P 为射线 OB 上一点, M 为线段 OH 上一动点, 连接 PM , 满足 $\angle OMP$ 为钝角, 以点 P 为中心, 将线段 PM 顺时针旋转 150° , 得到线段 PN , 连接 ON .

(1) 依题意补全图 1;

(2) 求证: $\angle OMP = \angle OPN$;

(3) 点 M 关于点 H 的对称点为 Q , 连接 QP . 写出一个 OP 的值, 使得对于任意的点 M 总有 $ON = QP$, 并证明.



【考点】 KY: 三角形综合题.

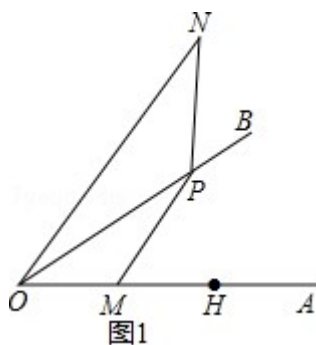
【专题】152: 几何综合题; 16: 压轴题; 48: 构造法; 551: 线段、角、相交线与平行线; 552: 三角形; 553: 图形的全等; 558: 平移、旋转与对称; 55E: 解直角三角形及其应用.

【分析】(1) 根据题意画出图形.

(2) 由旋转可得 $\angle MPN = 150^\circ$, 故 $\angle OPN = 150^\circ - \angle OPM$; 由 $\angle AOB = 30^\circ$ 和三角形内角和 180° 可得 $\angle OMP = 180^\circ - 30^\circ - \angle OPM = 150^\circ - \angle OPM$, 得证.

(3) 根据题意画出图形, 以 $ON = QP$ 为已知条件反推 OP 的长度. 由 (2) 的结论 $\angle OMP = \angle OPN$ 联想到其补角相等, 又因为旋转有 $PM = PN$, 已具备一边一角相等, 过点 N 作 $NC \perp OB$ 于点 C , 过点 P 作 $PD \perp OA$ 于点 D , 即可构造出 $\triangle PDM \cong \triangle NCP$, 进而得 $PD = NC$, $DM = CP$. 此时加上 $ON = QP$, 则易证得 $\triangle OCN \cong \triangle QDP$, 所以 $OC = QD$. 利用 $\angle AOB = 30^\circ$, 设 $PD = NC = a$, 则 $OP = 2a$, $OD = \sqrt{3}a$. 再设 $DM = CP = x$, 所以 $QD = OC = OP + PC = 2a + x$, $MQ = DM + QD = 2a + 2x$. 由于点 M 、 Q 关于点 H 对称, 即点 H 为 MQ 中点, 故 $MH = \frac{1}{2}MQ = a + x$, $DH = MH - DM = a$, 所以 $OH = OD + DH = \sqrt{3}a + a = \sqrt{3} + 1$, 求得 $a = 1$, 故 $OP = 2$. 证明过程则把推理过程反过来, 以 $OP = 2$ 为条件, 利用构造全等证得 $ON = QP$.

【解答】解: (1) 如图 1 所示为所求.



(2) 设 $\angle OPM = \alpha$,

$\because$ 线段 PM 绕点 P 顺时针旋转 150° 得到线段 PN

$\therefore \angle MPN = 150^\circ$, $PM = PN$

$\therefore \angle OPN = \angle MPN - \angle OPM = 150^\circ - \alpha$

$\because \angle AOB = 30^\circ$

$$\therefore \angle OMP = 180^\circ - \angle AOB - \angle OPM = 180^\circ - 30^\circ - \alpha = 150^\circ - \alpha$$

$$\therefore \angle OMP = \angle OPN$$

(3) $OP=2$ 时, 总有 $ON=QP$, 证明如下:

过点 N 作 $NC \perp OB$ 于点 C , 过点 P 作 $PD \perp OA$ 于点 D , 如图 2

$$\therefore \angle NCP = \angle PDM = \angle PDQ = 90^\circ$$

$$\because \angle AOB = 30^\circ, OP = 2$$

$$\therefore PD = \frac{1}{2}OP = 1$$

$$\therefore OD = \sqrt{OP^2 - PD^2} = \sqrt{3}$$

$$\because OH = \sqrt{3} + 1$$

$$\therefore DH = OH - OD = 1$$

$$\because \angle OMP = \angle OPN$$

$$\therefore 180^\circ - \angle OMP = 180^\circ - \angle OPN$$

$$\text{即 } \angle PMD = \angle NPC$$

在 $\triangle PDM$ 与 $\triangle NCP$ 中

$$\begin{cases} \angle PDM = \angle NCP \\ \angle PMD = \angle NPC \\ PM = NP \end{cases}$$

$$\therefore \triangle PDM \cong \triangle NCP \text{ (AAS)}$$

$$\therefore PD = NC, DM = CP$$

$$\text{设 } DM = CP = x, \text{ 则 } OC = OP + PC = 2 + x, MH = MD + DH = x + 1$$

$$\because \text{点 } M \text{ 关于点 } H \text{ 的对称点为 } Q$$

$$\therefore HQ = MH = x + 1$$

$$\therefore DQ = DH + HQ = 1 + x + 1 = 2 + x$$

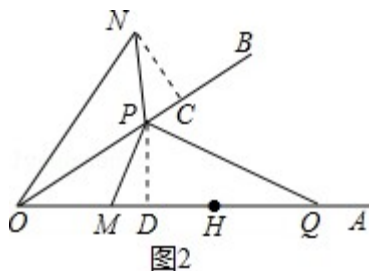
$$\therefore OC = DQ$$

在 $\triangle OCN$ 与 $\triangle QDP$ 中

$$\begin{cases} OC = QD \\ \angle OCN = \angle QDP = 90^\circ \\ NC = PD \end{cases}$$

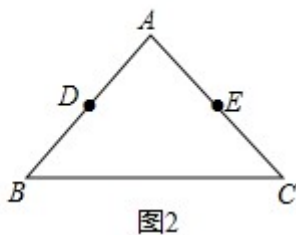
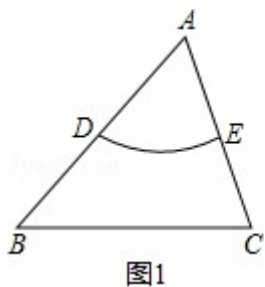
$$\therefore \triangle OCN \cong \triangle QDP \text{ (SAS)}$$

$$\therefore ON = QP$$



【点评】 本题考查了根据题意画图, 旋转的性质, 三角形内角和 180° , 勾股定理, 全等三角形的判定和性质, 中心对称的性质. 第(3)题的解题思路是以 $ON=QP$ 为条件反推 OP 的长度, 并结合(2)的结论构造全等三角形; 而证明过程则以 $OP=2$ 为条件构造全等证明 $ON=QP$.

28. (7分) (2019•北京) 在 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别是 $\triangle ABC$ 两边的中点, 如果 $\widehat{DE}$ 上的所有点都在 $\triangle ABC$ 的内部或边上, 则称 $\widehat{DE}$ 为 $\triangle ABC$ 的中内弧. 例如, 图1中 $\widehat{DE}$ 是 $\triangle ABC$ 的一条中内弧.



(1) 如图2, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB=AC=2\sqrt{2}$, D, E 分别是 AB, AC 的中点, 画出 $\triangle ABC$ 的最长的中内弧 $\widehat{DE}$, 并直接写出此时 $\widehat{DE}$ 的长;

(2) 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(0, 2)$, $B(0, 0)$, $C(4t, 0)$ ($t>0$), 在 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别是 AB, AC 的中点.

- ① 若 $t=\frac{1}{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的中内弧 $\widehat{DE}$ 所在圆的圆心 P 的纵坐标的取值范围;
- ② 若在 $\triangle ABC$ 中存在一条中内弧 $\widehat{DE}$, 使得 $\widehat{DE}$ 所在圆的圆心 P 在 $\triangle ABC$ 的内部或边上, 直接写出 t 的取值范围.

【考点】 MR: 圆的综合题.

【专题】 152: 几何综合题; 23: 新定义.

【分析】 (1) 由三角函数值及等腰直角三角形性质可求得 $DE=2$, 最长中内弧即以 DE 为直径的半圆, $\widehat{DE}$ 的长即以 DE 为直径的圆周长的一半;

(2) 根据三角形中内弧定义可知, 圆心一定在 DE 的中垂线上, ①当 $t = \frac{1}{2}$ 时, 要注意圆心 P 在 DE 上方的中垂线上均符合要求, 在 DE 下方时必须 AC 与半径 PE 的夹角 $\angle AEP$ 满足 $90^\circ \leq \angle AEP < 135^\circ$; ②根据题意, t 的最大值即圆心 P 在 AC 上时求得的 t 值.

【解答】解: (1) 如图 2, 以 DE 为直径的半圆弧 $\widehat{DE}$, 就是 $\triangle ABC$ 的最长的中内弧 $\widehat{DE}$, 连接 DE , $\because \angle A = 90^\circ$, $AB = AC = 2\sqrt{2}$, D, E 分别是 AB, AC 的中点,

$$\therefore BC = \frac{AC}{\sin B} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = 4, DE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 4 = 2,$$

$$\therefore \text{弧 } \widehat{DE} = \frac{1}{2} \times 2\pi = \pi;$$

(2) 如图 3, 由垂径定理可知, 圆心一定在线段 DE 的垂直平分线上, 连接 DE , 作 DE 垂直平分线 FP , 作 $EG \perp AC$ 交 FP 于 G ,

$$\text{① 当 } t = \frac{1}{2} \text{ 时, } C(2, 0), \therefore D(0, 1), E(1, 1), F\left(\frac{1}{2}, 1\right),$$

设 $P\left(\frac{1}{2}, m\right)$ 由三角形中内弧定义可知, 圆心线段 DE 上方射线 FP 上均可, $\therefore m \geq 1$,

$$\because OA = OC, \angle AOC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ACO = 45^\circ,$$

$$\because DE \parallel OC$$

$$\therefore \angle AED = \angle ACO = 45^\circ$$

$$\text{作 } EG \perp AC \text{ 交直线 } FP \text{ 于 } G, FG = EF = \frac{1}{2}$$

根据三角形中内弧的定义可知, 圆心在点 G 的下方 (含点 G) 直线 FP 上也符合要求;

$$\therefore m \leq \frac{1}{2}$$

综上所述, $m \leq \frac{1}{2}$ 或 $m \geq 1$.

② 如图 4, 设圆心 P 在 AC 上,

$\because P$ 在 DE 中垂线上,

$$\therefore P \text{ 为 } AE \text{ 中点, 作 } PM \perp OC \text{ 于 } M, \text{ 则 } PM = \frac{3}{2},$$

$$\therefore P\left(t, \frac{3}{2}\right),$$

$$\because DE \parallel BC$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AOB = 90^\circ$$

$$\therefore AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{1^2 + (2t)^2} = \sqrt{4t^2 + 1},$$

$$\because PD = PE,$$

$$\therefore \angle AED = \angle PDE$$

$$\because \angle AED + \angle DAE = \angle PDE + \angle ADP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle ADP$$

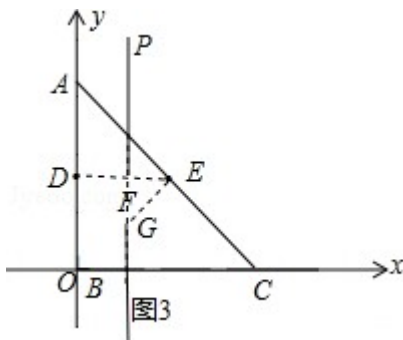
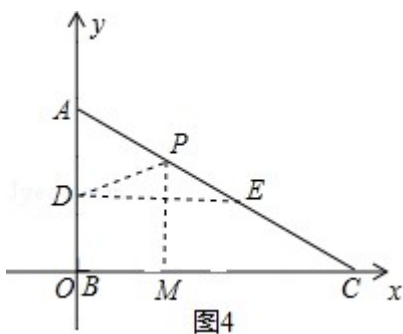
$$\therefore AP = PD = PE = \frac{1}{2}AE$$

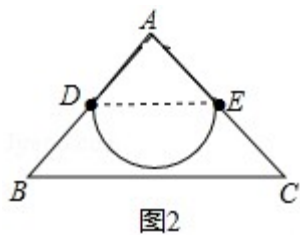
由三角形中内弧定义知, $PD \leq PM$

$$\therefore \frac{1}{2}AE \leq \frac{3}{2}, AE \leq 3, \text{ 即 } \sqrt{4t^2 + 1} \leq 3, \text{ 解得: } t \leq \sqrt{2},$$

$$\because t > 0$$

$$\therefore 0 < t \leq \sqrt{2}.$$





【点评】此题是一道圆的综合题，考查了圆的性质，弧长计算，直角三角形性质等，给出了“三角形中内弧”新定义，要求学生能够正确理解新概念，并应用新概念解题.

考点卡片

1. 数轴

(1) 数轴的概念: 规定了原点、正方向、单位长度的直线叫做数轴.

数轴的三要素: 原点, 单位长度, 正方向.

(2) 数轴上的点: 所有的有理数都可以用数轴上的点表示, 但数轴上的点不都表示有理数.

(一般取右方向为正方向, 数轴上的点对应任意实数, 包括无理数.)

(3) 用数轴比较大小: 一般来说, 当数轴方向朝右时, 右边的数总比左边的数大.

2. 近似数和有效数字

(1) 有效数字: 从一个数的左边第一个不是 0 的数字起到末位数字止, 所有的数字都是这个数的有效数字.

(2) 近似数与精确数的接近程度, 可以用精确度表示. 一般有, 精确到哪一位, 保留几个有效数字等说法.

(3) 规律方法总结:

“精确到第几位”和“有几个有效数字”是精确度的两种常用的表示形式, 它们实际意义是不一样的, 前者可以体现出误差值绝对数的大小, 而后者往往可以比较几个近似数中哪个相对更精确一些.

3. 科学记数法—表示较大的数

(1) 科学记数法: 把一个大于 10 的数记成 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 a 是整数数位只有一位的数, n 是正整数, 这种记数法叫做科学记数法. 【科学记数法形式: $a \times 10^n$, 其中 $1 \leq a < 10$, n 为正整数.】

(2) 规律方法总结:

① 科学记数法中 a 的要求和 10 的指数 n 的表示规律为关键, 由于 10 的指数比原来的整数位数少 1; 按此规律, 先数一下原数的整数位数, 即可求出 10 的指数 n .

② 记数法要求是大于 10 的数可用科学记数法表示, 实质上绝对值大于 10 的负数同样可用此法表示, 只是前面多一个负号.

4. 实数的运算

(1) 实数的运算和在有理数范围内一样, 值得一提的是, 实数既可以进行加、减、乘、除、乘方运算, 又可以进行开方运算, 其中正实数可以开平方.

(2) 在进行实数运算时, 和有理数运算一样, 要从高级到低级, 即先算乘方、开方, 再算

乘除, 最后算加减, 有括号的要先算括号里面的, 同级运算要按照从左到右的顺序进行.
另外, 有理数的运算律在实数范围内仍然适用.

【规律方法】实数运算的“三个关键”

1. 运算法则: 乘方和开方运算、幂的运算、指数 (特别是负整数指数, 0 指数) 运算、根式运算、特殊三角函数值的计算以及绝对值的化简等.
2. 运算顺序: 先乘方, 再乘除, 后加减, 有括号的先算括号里面的, 在同一级运算中要从左到右依次运算, 无论何种运算, 都要注意先定符号后运算.
3. 运算律的使用: 使用运算律可以简化运算, 提高运算速度和准确度.

5. 规律型: 数字的变化类

探究题是近几年中考命题的亮点, 尤其是与数列有关的命题更是层出不穷, 形式多样, 它要求在已有知识的基础上去探究, 观察思考发现规律.

- (1) 探寻数列规律: 认真观察、仔细思考, 善用联想是解决这类问题的方法.
- (2) 利用方程解决问题. 当问题中有多个未知数时, 可先设出其中一个为 x , 再利用它们之间的关系, 设出其他未知数, 然后列方程.

6. 分式的值为零的条件

分式值为零的条件是分子等于零且分母不等于零.

注意: “分母不为零” 这个条件不能少.

7. 分式的化简求值

先把分式化简后, 再把分式中未知数对应的值代入求出分式的值.

在化简的过程中要注意运算顺序和分式的化简. 化简的最后结果分子、分母要进行约分, 注意运算的结果要化成最简分式或整式.

【规律方法】分式化简求值时需注意的问题

1. 化简求值, 一般是先化简为最简分式或整式, 再代入求值. 化简时不能跨度太大, 而缺少必要的步骤, 代入求值的模式一般为 “当...时, 原式=...”.
2. 代入求值时, 有直接代入法, 整体代入法等常用方法. 解题时可根据题目的具体条件选择合适的方法. 当未知数的值没有明确给出时, 所选取的未知数的值必须使原式中的各分式都有意义, 且除数不能为 0.

8. 零指数幂

零指数幂: $a^0 = 1$ ($a \neq 0$)

由 $a^m \div a^m = 1$, $a^m \div a^m = a^{m-m} = a^0$ 可推出 $a^0 = 1$ ($a \neq 0$)

注意: $0^0 \neq 1$.

9. 负整数指数幂

负整数指数幂: $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ ($a \neq 0$, p 为正整数)

注意: ① $a \neq 0$;

② 计算负整数指数幂时, 一定要根据负整数指数幂的意义计算, 避免出现 $(-3)^{-2} = (-3) \times (-2)$ 的错误.

③ 当底数是分数时, 只要把分子、分母颠倒, 负指数就可变为正指数.

④ 在混合运算中, 始终要注意运算的顺序.

10. 根的判别式

利用一元二次方程根的判别式 ($\Delta = b^2 - 4ac$) 判断方程的根的情况.

一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系:

① 当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的两个实数根;

② 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的两个实数根;

③ 当 $\Delta < 0$ 时, 方程无实数根.

上面的结论反过来也成立.

11. 解一元一次不等式组

(1) 一元一次不等式组的解集: 几个一元一次不等式的解集的公共部分, 叫做由它们所组成的不等式组的解集.

(2) 解不等式组: 求不等式组的解集的过程叫解不等式组.

(3) 一元一次不等式组的解法: 解一元一次不等式组时, 一般先求出其中各不等式的解集, 再求出这些解集的公共部分, 利用数轴可以直观地表示不等式组的解集.

方法与步骤: ① 求不等式组中每个不等式的解集; ② 利用数轴求公共部分.

解集的规律: 同大取大; 同小取小; 大小小大中间找; 大大小小找不到.

12. 动点问题的函数图象

函数图象是典型的数形结合, 图象应用信息广泛, 通过看图获取信息, 不仅可以解决生活中的实际问题, 还可以提高分析问题、解决问题的能力.

用图象解决问题时, 要理清图象的含义即会识图.

13. 一次函数图象上点的坐标特征

一次函数 $y = kx + b$, ($k \neq 0$, 且 k, b 为常数) 的图象是一条直线. 它与 x 轴的交点坐标是

$(-\frac{b}{k}, 0)$; 与 y 轴的交点坐标是 $(0, b)$.

直线上任意一点的坐标都满足函数关系式 $y=kx+b$.

14. 反比例函数的性质

反比例函数的性质

- (1) 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象是双曲线;
- (2) 当 $k > 0$, 双曲线的两支分别位于第一、第三象限, 在每一象限内 y 随 x 的增大而减小;
- (3) 当 $k < 0$, 双曲线的两支分别位于第二、第四象限, 在每一象限内 y 随 x 的增大而增大.

注意: 反比例函数的图象与坐标轴没有交点.

15. 反比例函数图象上点的坐标特征

反比例函数 $y=k/x$ (k 为常数, $k \neq 0$) 的图象是双曲线,

- ① 图象上的点 (x, y) 的横纵坐标的积是定值 k , 即 $xy=k$;
- ② 双曲线是关于原点对称的, 两个分支上的点也是关于原点对称;
- ③ 在 $y=k/x$ 图象中任取一点, 过这一点向 x 轴和 y 轴分别作垂线, 与坐标轴围成的矩形的面积是定值 $|k|$.

16. 二次函数图象与系数的关系

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$)

- ① 二次项系数 a 决定抛物线的开口方向和大小.
当 $a > 0$ 时, 抛物线向上开口; 当 $a < 0$ 时, 抛物线向下开口; $|a|$ 还可以决定开口大小, $|a|$ 越大开口就越小.
- ② 一次项系数 b 和二次项系数 a 共同决定对称轴的位置.
当 a 与 b 同号时 (即 $ab > 0$), 对称轴在 y 轴左; 当 a 与 b 异号时 (即 $ab < 0$), 对称轴在 y 轴右. (简称: 左同右异)
- ③. 常数项 c 决定抛物线与 y 轴交点. 抛物线与 y 轴交于 $(0, c)$.
- ④ 抛物线与 x 轴交点个数.
 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 时, 抛物线与 x 轴有 2 个交点; $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ 时, 抛物线与 x 轴有 1 个交点; $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 时, 抛物线与 x 轴没有交点.

17. 二次函数图象上点的坐标特征

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的图象是抛物线, 顶点坐标是 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$.

- ① 抛物线是关于对称轴 $x = -\frac{b}{2a}$ 成轴对称, 所以抛物线上的点关于对称轴对称, 且都满足

函数关系式. 顶点是抛物线的最高点或最低点.

② 抛物线与 y 轴交点的纵坐标是函数解析中的 c 值.

③ 抛物线与 x 轴的两个交点关于对称轴对称, 设两个交点分别是 $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$,

则其对称轴为 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

18. 三角形的面积

(1) 三角形的面积等于底边长与高线乘积的一半, 即 $S_{\triangle} = \frac{1}{2} \times \text{底} \times \text{高}$.

(2) 三角形的中线将三角形分成面积相等的两部分.

19. 全等三角形的判定与性质

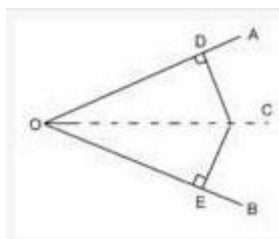
(1) 全等三角形的判定是结合全等三角形的性质证明线段和角相等的重要工具. 在判定三角形全等时, 关键是选择恰当的判定条件.

(2) 在应用全等三角形的判定时, 要注意三角形间的公共边和公共角, 必要时添加适当辅助线构造三角形.

20. 角平分线的性质

角平分线的性质: 角的平分线上的点到角的两边的距离相等.

注意: ① 这里的距离是指点到角的两边垂线段的长; ② 该性质可以独立作为证明两条线段相等的依据, 有时不必证明全等; ③ 使用该结论的前提条件是图中有角平分线, 有垂直角平分线的性质语言: 如图, $\because C$ 在 $\angle AOB$ 的平分线上, $CD \perp OA$, $CE \perp OB \therefore CD = CE$



21. 等腰三角形的性质

(1) 等腰三角形的概念

有两条边相等的三角形叫做等腰三角形.

(2) 等腰三角形的性质

① 等腰三角形的两腰相等

② 等腰三角形的两个底角相等. 【简称: 等边对等角】

③ 等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高相互重合. 【三线合一】

(3) 在①等腰; ②底边上的高; ③底边上的中线; ④顶角平分线. 以上四个元素中, 从中任意取出两个元素当成条件, 就可以得到另外两个元素为结论.

22. 勾股定理

(1) 勾股定理: 在任何一个直角三角形中, 两条直角边长的平方之和一定等于斜边长的平方.

如果直角三角形的两条直角边长分别是 a , b , 斜边长为 c , 那么 $a^2+b^2=c^2$.

(2) 勾股定理应用的前提条件是在直角三角形中.

(3) 勾股定理公式 $a^2+b^2=c^2$ 的变形有: $a=\sqrt{c^2-b^2}$, $b=\sqrt{c^2-a^2}$ 及 $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

(4) 由于 $a^2+b^2=c^2>a^2$, 所以 $c>a$, 同理 $c>b$, 即直角三角形的斜边大于该直角三角形中的每一条直角边.

23. 勾股定理的逆定理

(1) 勾股定理的逆定理: 如果三角形的三边长 a , b , c 满足 $a^2+b^2=c^2$, 那么这个三角形就是直角三角形.

说明:

① 勾股定理的逆定理验证利用了三角形的全等.

② 勾股定理的逆定理将数转化为形, 作用是判断一个三角形是不是直角三角形. 必须满足较小两边平方的和等于最大边的平方才能做出判断.

(2) 运用勾股定理的逆定理解决问题的实质就是判断一个角是不是直角. 然后进一步结合其他已知条件来解决问题.

注意: 要判断一个角是不是直角, 先要构造出三角形, 然后知道三条边的大小, 用较小的两条边的平方和与最大的边的平方比较, 如果相等, 则三角形为直角三角形; 否则不是.

24. 三角形综合题

三角形综合题.

25. 多边形内角与外角

(1) 多边形内角和定理: $(n-2) \cdot 180$ ($n \geq 3$) 且 n 为整数)

此公式推导的基本方法是从 n 边形的一个顶点出发引出 $(n-3)$ 条对角线, 将 n 边形分割为 $(n-2)$ 个三角形, 这 $(n-2)$ 个三角形的所有内角之和正好是 n 边形的内角和. 除此方法之和还有其他几种方法, 但这些方法的基本思想是一样的. 即将多边形转化为三角形这也是研究多边形问题常用的方法.

(2) 多边形的外角和等于 360 度.

① 多边形的外角和指每个顶点处取一个外角, 则 n 边形取 n 个外角, 无论边数是几, 其外角和永远为 360° .

② 借助内角和和邻补角概念共同推出以下结论: 外角和 $= 180^\circ n - (n - 2) \cdot 180^\circ = 360^\circ$.

26. 平行四边形的判定与性质

平行四边形的判定与性质的作用

平行四边形对应边相等, 对应角相等, 对角线互相平分及它的判定, 是我们证明直线的平行、线段相等、角相等的重要方法, 若要证明两直线平行和两线段相等、两角相等, 可考虑将要证的直线、线段、角、分别置于一个四边形的对边或对角的位置上, 通过证明四边形是平行四边形达到上述目的.

运用定义, 也可以判定某个图形是平行四边形, 这是常用的方法, 不要忘记平行四边形的定义, 有时用定义判定比用其他判定定理还简单.

凡是可以利用平行四边形知识证明的问题, 不要再回到用三角形全等证明, 应直接运用平行四边形的性质和判定去解决问题.

27. 菱形的性质

(1) 菱形的定义: 有一组邻边相等的平行四边形叫做菱形.

(2) 菱形的性质

① 菱形具有平行四边形的一切性质;

② 菱形的四条边都相等;

③ 菱形的两条对角线互相垂直, 并且每一条对角线平分一组对角;

④ 菱形是轴对称图形, 它有 2 条对称轴, 分别是两条对角线所在直线.

(3) 菱形的面积计算

① 利用平行四边形的面积公式.

② 菱形面积 $= \frac{1}{2}ab$. (a 、 b 是两条对角线的长度)

28. 菱形的判定与性质

(1) 依次连接四边形各边中点所得的四边形称为中点四边形. 不管原四边形的形状怎样改变, 中点四边形的形状始终是平行四边形.

(2) 菱形的中点四边形是矩形 (对角线互相垂直的四边形的中点四边形定为矩形, 对角线相等的四边形的中点四边形定为菱形.) ____ (3) 菱形是在平行四边形的前提下定义的, 首先它是平行四边形, 但它是特殊的平行四边形, 特殊之处就是 “有一组邻边相等”, 因而就增加了一些特殊的性质和不同于平行四边形的判定方法.

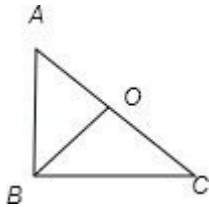
(4) 正方形是特殊的菱形, 菱形不一定是正方形, 所以, 在同一平面上四边相等的图形不只是正方形.

29. 矩形的判定与性质

(1) 关于矩形, 应从平行四边形的内角的变化上认识其特殊性: 一个内角是直角的平行四边形, 进一步研究其特有的性质: 是轴对称图形、内角都是直角、对角线相等. 同时平行四边形的性质矩形也都具有.

在处理许多几何问题中, 若能灵活运用矩形的这些性质, 则可以简捷地解决与角、线段等有关的问题.

(2) 下面的结论对于证题也是有用的: ① $\triangle OAB$ 、 $\triangle OBC$ 都是等腰三角形; ② $\angle OAB = \angle OBA$, $\angle OCB = \angle OBC$; ③ 点 O 到三个顶点的距离都相等.



30. 正方形的性质

(1) 正方形的定义: 有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形叫做正方形.

(2) 正方形的性质

- ① 正方形的四条边都相等, 四个角都是直角;
- ② 正方形的两条对角线相等, 互相垂直平分, 并且每条对角线平分一组对角;
- ③ 正方形具有四边形、平行四边形、矩形、菱形的一切性质.
- ④ 两条对角线将正方形分成四个全等的等腰直角三角形, 同时, 正方形又是轴对称图形, 有四条对称轴.

31. 正方形的判定

正方形的判定方法:

- ① 先判定四边形是矩形, 再判定这个矩形有一组邻边相等;
- ② 先判定四边形是菱形, 再判定这个菱形有一个角为直角.
- ③ 还可以先判定四边形是平行四边形, 再用 1 或 2 进行判定.

32. 圆周角定理

(1) 圆周角的定义: 顶点在圆上, 并且两边都与圆相交的角叫做圆周角.

注意: 圆周角必须满足两个条件: ① 顶点在圆上. ② 角的两条边都与圆相交, 二者缺一不可.

(2) 圆周角定理: 在同圆或等圆中, 同弧或等弧所对的圆周角相等, 都等于这条弧所对的圆心角的一半.

推论: 半圆 (或直径) 所对的圆周角是直角, 90° 的圆周角所对的弦是直径.

(3) 在解圆的有关问题时, 常常需要添加辅助线, 构成直径所对的圆周角, 这种基本技能技巧一定要掌握.

(4) 注意: ①圆周角和圆心角的转化可通过作圆的半径构造等腰三角形. 利用等腰三角形的顶点和底角的关系进行转化. ②圆周角和圆周的转化可利用其“桥梁”——圆心角转化. ③定理成立的条件是“同一条弧所对的”两种角, 在运用定理时不要忽略了这个条件, 把不同弧所对的圆周角与圆心角错当成同一条弧所对的圆周角和圆心角.

33. 三角形的外接圆与外心

(1) 外接圆: 经过三角形的三个顶点的圆, 叫做三角形的外接圆.

(2) 外心: 三角形外接圆的圆心是三角形三条边垂直平分线的交点, 叫做三角形的外心.

(3) 概念说明:

①“接”是说明三角形的顶点在圆上, 或者经过三角形的三个顶点.

②锐角三角形的外心在三角形的内部; 直角三角形的外心为直角三角形斜边的中点; 钝角三角形的外心在三角形的外部.

③找一个三角形的外心, 就是找一个三角形的三条边的垂直平分线的交点, 三角形的外接圆只有一个, 而一个圆的内接三角形却有无数个.

34. 圆的综合题

圆的综合题.

35. 作图—复杂作图

复杂作图是在五种基本作图的基础上进行作图, 一般是结合了几何图形的性质和基本作图方法.

解决此类题目的关键是熟悉基本几何图形的性质, 结合几何图形的基本性质把复杂作图拆解成基本作图, 逐步操作.

36. 命题与定理

1、判断一件事情的语句, 叫做命题. 许多命题都是由题设和结论两部分组成, 题设是已知事项, 结论是由已知事项推出的事项, 一个命题可以写成“如果…那么…”形式.

2、有些命题的正确性是用推理证实的, 这样的真命题叫做定理.

3、定理是真命题, 但真命题不一定是定理.

4、命题写成“如果…，那么…”的形式，这时，“如果”后面接的部分是题设，“那么”后面解的部分是结论。

5、命题的“真”“假”是就命题的内容而言。任何一个命题非真即假。要说明一个命题的正确性，一般需要推理、论证，而判断一个命题是假命题，只需举出一个反例即可。

37. 轴对称图形

(1) 轴对称图形的概念：

如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形叫做轴对称图形。这条直线叫做对称轴，这时，我们也可以说这个图形关于这条直线（成轴）对称。

(2) 轴对称图形是针对一个图形而言的，是一种具有特殊性质图形，被一条直线分割成的两部分沿着对称轴折叠时，互相重合；轴对称图形的对称轴可以是一条，也可以是多条甚至无数条。

(3) 常见的轴对称图形：

等腰三角形，矩形，正方形，等腰梯形，圆等等。

38. 关于 x 轴、y 轴对称的点的坐标

(1) 关于 x 轴的对称点的坐标特点：

横坐标不变，纵坐标互为相反数。

即点 $P(x, y)$ 关于 x 轴的对称点 P' 的坐标是 $(x, -y)$ 。

(2) 关于 y 轴的对称点的坐标特点：

横坐标互为相反数，纵坐标不变。

即点 $P(x, y)$ 关于 y 轴的对称点 P' 的坐标是 $(-x, y)$ 。

39. 坐标与图形变化-平移

(1) 平移变换与坐标变化

① 向右平移 a 个单位，坐标 $P(x, y) \Rightarrow P(x+a, y)$

① 向左平移 a 个单位，坐标 $P(x, y) \Rightarrow P(x-a, y)$

① 向上平移 b 个单位，坐标 $P(x, y) \Rightarrow P(x, y+b)$

① 向下平移 b 个单位，坐标 $P(x, y) \Rightarrow P(x, y-b)$

(2) 在平面直角坐标系内，把一个图形各个点的横坐标都加上（或减去）一个整数 a ，相应的新图形就是把原图形向右（或向左）平移 a 个单位长度；如果把它各个点的纵坐标都加（或减去）一个整数 a ，相应的新图形就是把原图形向上（或向下）平移 a 个单位长度。

（即：横坐标，右移加，左移减；纵坐标，上移加，下移减。）

40. 特殊角的三角函数值

(1) 特指 30° 、 45° 、 60° 角的各种三角函数值.

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \tan 45^\circ = 1;$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}; \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3};$$

(2) 应用中要熟记特殊角的三角函数值, 一是按值的变化规律去记, 正弦逐渐增大, 余弦逐渐减小, 正切逐渐增大; 二是按特殊直角三角形中各边特殊值规律去记.

(3) 特殊角的三角函数值应用广泛, 一是它可以当作数进行运算, 二是具有三角函数的特点, 在解直角三角形中应用较多.

41. 解直角三角形

(1) 解直角三角形的定义

在直角三角形中, 由已知元素求未知元素的过程就是解直角三角形.

(2) 解直角三角形要用到的关系

① 锐角直角的关系: $\angle A + \angle B = 90^\circ$;

② 三边之间的关系: $a^2 + b^2 = c^2$;

③ 边角之间的关系:

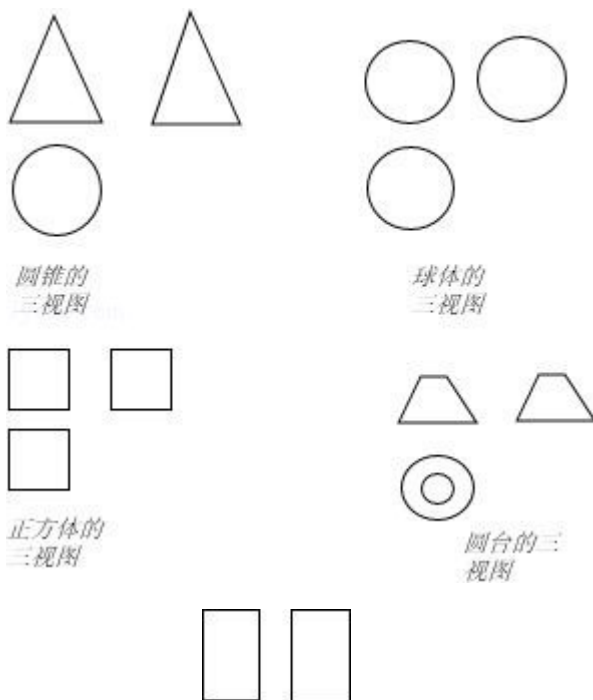
$\sin A = \angle A$ 的对边斜边 $= \frac{a}{c}$, $\cos A = \angle A$ 的邻边斜边 $= \frac{b}{c}$, $\tan A = \angle A$ 的对边 $\angle A$ 的邻边 $= \frac{a}{b}$.

(a , b , c 分别是 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的对边)

42. 简单几何体的三视图

(1) 画物体的主视图的口诀为: 主、俯: 长对正; 主、左: 高平齐; 俯、左: 宽相等.

(2) 常见的几何体的三视图:



圆锥的
三视图

球体的
三视图

正方体的
三视图

圆台的三
视图

圆柱的三视图:



43. 用样本估计总体

用样本估计总体是统计的基本思想.

1、用样本的频率分布估计总体分布:

从一个总体得到一个包含大量数据的样本, 我们很难从一个个数字中直接看出样本所包含的信息. 这时, 我们用频率分布直方图来表示相应样本的频率分布, 从而去估计总体的分布情况.

2、用样本的数字特征估计总体的数字特征 (主要数据有众数、中位数、平均数、标准差与方差).

一般来说, 用样本去估计总体时, 样本越具有代表性、容量越大, 这时对总体的估计也就越精确.

44. 频数 (率) 分布表

1、在统计数据时, 经常把数据按照不同的范围分成几个组, 分成的组的个数称为组数, 每一组两个端点的差称为组距, 称这样画出的统计图表为频数分布表.

2、列频率分布表的步骤:

- (1) 计算极差, 即计算最大值与最小值的差.
- (2) 决定组距与组数 (组数与样本容量有关, 一般来说样本容量越大, 分组就越多,

样本容量不超过 100 时, 按数据的多少, 常分成 5~12 组)。

(3) 将数据分组。

(4) 列频率分布表。

45. 频数(率)分布直方图

画频率分布直方图的步骤:

(1) 计算极差, 即计算最大值与最小值的差。(2) 决定组距与组数(组数与样本容量有关, 一般来说样本容量越大, 分组就越多, 样本容量不超过 100 时, 按数据的多少, 常分成 5~12 组)。(3) 确定分点, 将数据分组。(4) 列频率分布表。(5) 绘制频率分布直方图。

注: ①频率分布表列出的是在各个不同区间内取值的频率, 频率分布直方图是用小长方形面积的大小来表示在各个区间内取值的频率。直角坐标系中的纵轴表示频率与组距的比值, 即小长方形面积=组距×频数组距=频率。②各组频率的和等于 1, 即所有长方形面积的和等于 1。③频率分布表在数量表示上比较确切, 但不够直观、形象, 不利于分析数据分布的总体态势。④从频率分布直方图可以清楚地看出数据分布的总体态势, 但是从直方图本身得不出原始的数据内容。

46. 算术平均数

(1) 平均数是指在一组数据中所有数据之和再除以数据的个数。它是反映数据集中趋势的一项指标。

(2) 算术平均数: 对于 n 个数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 则 $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ 就叫做这 n 个数的算术平均数。

(3) 算术平均数是加权平均数的一种特殊情况, 加权平均数包含算术平均数, 当加权平均数中的权相等时, 就是算术平均数。

47. 中位数

(1) 中位数:

将一组数据按照从小到大(或从大到小)的顺序排列, 如果数据的个数是奇数, 则处于中间位置的数就是这组数据的中位数。

如果这组数据的个数是偶数, 则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数。

(2) 中位数代表了这组数据值大小的“中点”, 不易受极端值影响, 但不能充分利用所有数据的信息。

(3) 中位数仅与数据的排列位置有关, 某些数据的移动对中位数没有影响, 中位数可能出

现在所给数据中也可能不在所给的数据中出现, 当一组数据中的个别数据变动较大时, 可用中位数描述其趋势.

48. 方差

(1) 方差: 一组数据中各数据与它们的平均数的差的平方的平均数, 叫做这组数据的方差.

(2) 用“先平均, 再求差, 然后平方, 最后再平均”得到的结果表示一组数据偏离平均值的情况, 这个结果叫方差, 通常用 s^2 来表示, 计算公式是:

$$s^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]$$
 (可简单记忆为“方差等于差方的平均数”)

(3) 方差是反映一组数据的波动大小的一个量. 方差越大, 则平均值的离散程度越大, 稳定性也越小; 反之, 则它与其平均值的离散程度越小, 稳定性越好.