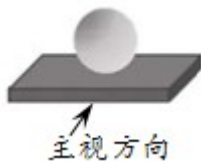


2019 年福建省中考数学试卷

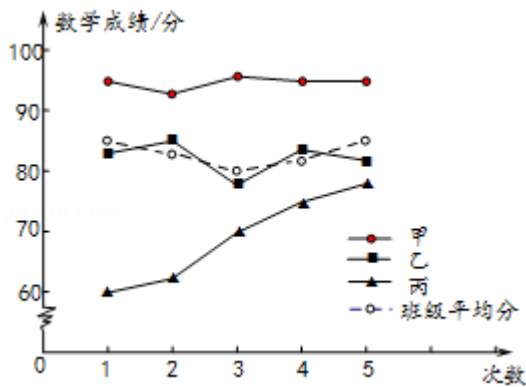
一、选择题 (每小题 4 分, 共 40 分)

- (4 分) (2019•福建) 计算 $2^2 + (-1)^0$ 的结果是 ()
A. 5 B. 4 C. 3 D. 2
- (4 分) (2019•福建) 北京故宫的占地面积约为 $720000m^2$, 将 720000 用科学记数法表示为 ()
A. 72×10^4 B. 7.2×10^5 C. 7.2×10^6 D. 0.72×10^6
- (4 分) (2019•福建) 下列图形中, 一定既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()
A. 等边三角形 B. 直角三角形 C. 平行四边形 D. 正方形
- (4 分) (2019•福建) 如图是由一个长方体和一个球组成的几何体, 它的主视图是 ()

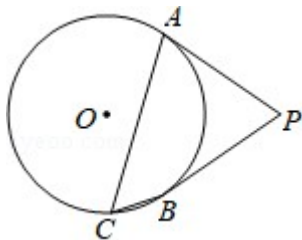


- A.
- B.
- C.
- D.

- (4 分) (2019•福建) 已知正多边形的一个外角为 36° , 则该正多边形的边数为 ()
A. 12 B. 10 C. 8 D. 6
- (4 分) (2019•福建) 如图是某班甲、乙、丙三位同学最近 5 次数学成绩及其所在班级相应平均分的折线统计图, 则下列判断错误的是 ()



- A. 甲的数学成绩高于班级平均分, 且成绩比较稳定
 B. 乙的数学成绩在班级平均分附近波动, 且比丙好
 C. 丙的数学成绩低于班级平均分, 但成绩逐次提高
 D. 就甲、乙、丙三个人而言, 乙的数学成绩最不稳
7. (4分) (2019•福建) 下列运算正确的是 ()
- A. $a \cdot a^3 = a^3$ B. $(2a)^3 = 6a^3$
 C. $a^6 \div a^3 = a^2$ D. $(a^2)^3 - (-a^3)^2 = 0$
8. (4分) (2019•福建) 《增删算法统宗》记载: “有个学生资性好, 一部孟子三日了, 每日增添一倍多, 问若每日读多少?” 其大意是: 有个学生天资聪慧, 三天读完一部《孟子》, 每天阅读的字数是前一天的两倍, 问他每天各读多少个字? 已知《孟子》一书共有 34685 个字, 设他第一天读 x 个字, 则下面所列方程正确的是 ()
- A. $x+2x+4x=34685$ B. $x+2x+3x=34685$
 C. $x+2x+2x=34685$ D. $x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x=34685$
9. (4分) (2019•福建) 如图, PA 、 PB 是 $\odot O$ 切线, A 、 B 为切点, 点 C 在 $\odot O$ 上, 且 $\angle ACB=55^\circ$, 则 $\angle APB$ 等于 ()



- A. 55° B. 70° C. 110° D. 125°
10. (4分) (2019•福建) 若二次函数 $y = |a|x^2 + bx + c$ 的图象经过 $A(m, n)$ 、 $B(0, y_1)$ 、 $C(3-m, n)$ 、 $D(\sqrt{2}, y_2)$ 、 $E(2, y_3)$, 则 y_1 、 y_2 、 y_3 的大小

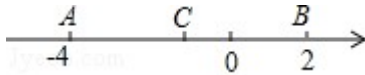
关系是 ()

- A. $y_1 < y_2 < y_3$ B. $y_1 < y_3 < y_2$ C. $y_3 < y_2 < y_1$ D. $y_2 < y_3 < y_1$

二、填空题 (每小题 4 分, 共 24 分)

11. (4 分) (2019•福建) 因式分解: $x^2 - 9 =$ _____.

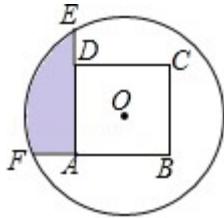
12. (4 分) (2019•福建) 如图, 数轴上 A 、 B 两点所表示的数分别是 -4 和 2 , 点 C 是线段 AB 的中点, 则点 C 所表示的数是_____.



13. (4 分) (2019•福建) 某校征集校运会会徽, 遴选出甲、乙、丙三种图案. 为了解何种图案更受欢迎, 随机调查了该校 100 名学生, 其中 60 名同学喜欢甲图案, 若该校共有 2000 人, 根据所学的统计知识可以估计该校喜欢甲图案的学生有_____人.

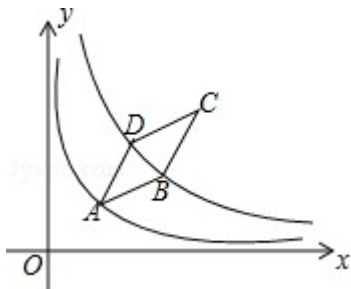
14. (4 分) (2019•福建) 在平面直角坐标系 xOy 中, $\square OABC$ 的三个顶点 $O(0, 0)$ 、 $A(3, 0)$ 、 $B(4, 2)$, 则其第四个顶点是_____.

15. (4 分) (2019•福建) 如图, 边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中心与半径为 2 的 $\odot O$ 的圆心重合, E 、 F 分别是 AD 、 BA 的延长与 $\odot O$ 的交点, 则图中阴影部分的面积是_____. (结果保留 π)



16. (4 分) (2019•福建) 如图, 菱形 $ABCD$ 顶点 A 在函数 $y = \frac{3}{x}$ ($x > 0$) 的图象上, 函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 3$, $x > 0$) 的图象关于直线 AC 对称, 且经过点 B 、 D 两点, 若 $AB =$

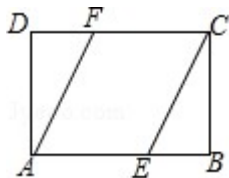
2 , $\angle BAD = 30^\circ$, 则 $k =$ _____.



三、解答题 (共 86 分)

17. (8 分) (2019•福建) 解方程组 $\begin{cases} x-y=5 \\ 2x+y=4 \end{cases}$.

18. (8 分) (2019•福建) 如图, 点 E 、 F 分别是矩形 $ABCD$ 的边 AB 、 CD 上的一点, 且 $DF=BE$. 求证: $AF=CE$.

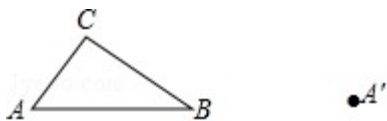


19. (8 分) (2019•福建) 先化简, 再求值: $(x-1) \div (x - \frac{2x-1}{x})$, 其中 $x = \sqrt{2}+1$.

20. (8 分) (2019•福建) 已知 $\triangle ABC$ 和点 A' , 如图.

(1) 以点 A' 为一个顶点作 $\triangle A'B'C'$, 使 $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$, 且 $\triangle A'B'C'$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 面积的 4 倍; (要求: 尺规作图, 不写作法, 保留作图痕迹)

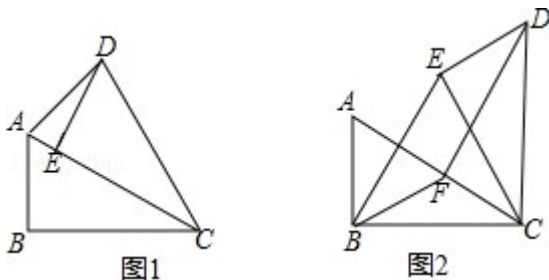
(2) 设 D 、 E 、 F 分别是 $\triangle ABC$ 三边 AB 、 BC 、 AC 的中点, D' 、 E' 、 F' 分别是你所作的 $\triangle A'B'C'$ 三边 $A'B'$ 、 $B'C'$ 、 $C'A'$ 的中点, 求证: $\triangle DEF \sim \triangle D'E'F'$.



21. (8 分) (2019•福建) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, $\angle ACB=30^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转一定的角度 α 得到 $\triangle DEC$, 点 A 、 B 的对应点分别是 D 、 E .

(1) 当点 E 恰好在 AC 上时, 如图 1, 求 $\angle ADE$ 的大小;

(2) 若 $\alpha=60^\circ$ 时, 点 F 是边 AC 中点, 如图 2, 求证: 四边形 $BEDF$ 是平行四边形.



22. (10 分) (2019•福建) 某工厂为贯彻落实“绿水青山就是金山银山”的发展理念, 投资组建了日废水处理量为 m 吨的废水处理车间, 对该厂工业废水进行无害化处理. 但随着工厂生产规模的扩大, 该车间经常无法完成当天工业废水的处理任务, 需要将超出

日废水处理量的废水交给第三方企业处理. 已知该车间处理废水, 每天需固定成本 30 元, 并且每处理一吨废水还需其他费用 8 元; 将废水交给第三方企业处理, 每吨需支付 12 元. 根据记录, 5 月 21 日, 该厂产生工业废水 35 吨, 共花费废水处理费 370 元.

(1) 求该车间的日废水处理量 m ;

(2) 为实现可持续发展, 走绿色发展之路, 工厂合理控制了生产规模, 使得每天废水处理的平均费用不超过 10 元/吨, 试计算该厂一天产生的工业废水量的范围.

23. (10 分) (2019•福建) 某种机器使用期为三年, 买方在购进机器时, 可以给各台机器分别一次性额外购买若干次维修服务, 每次维修服务费为 2000 元. 每台机器在使用期间, 如果维修次数未超过购机时购买的维修服务次数, 每次实际维修时还需向维修人员支付工时费 500 元; 如果维修次数超过购机时购买的维修服务次数, 超出部分每次维修时需支付维修服务费 5000 元, 但无需支付工时费. 某公司计划购买 1 台该种机器, 为决策在购买机器时应同时一次性额外购买几次维修服务, 搜集并整理了 100 台这种机器在三年使用期内的维修次数, 整理得下表:

维修次数	8	9	10	11	12
频率 (台数)	10	20	30	30	10

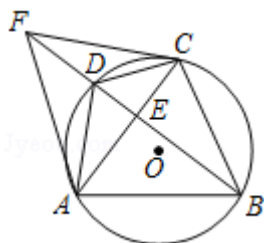
(1) 以这 100 台机器为样本, 估计“1 台机器在三年使用期内维修次数不大于 10”的概率;

(2) 试以这 100 台机器维修费用的平均数作为决策依据, 说明购买 1 台该机器的同时应一次性额外购 10 次还是 11 次维修服务?

24. (12 分) (2019•福建) 如图, 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, $AB=AC$, $AC \perp BD$, 垂足为 E , 点 F 在 BD 的延长线上, 且 $DF=DC$, 连接 AF 、 CF .

(1) 求证: $\angle BAC=2\angle CAD$;

(2) 若 $AF=10$, $BC=4\sqrt{5}$, 求 $\tan \angle BAD$ 的值.



25. (14 分) (2019•福建) 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($b < 0$) 与 x 轴只有一个公共点.

(1) 若抛物线与 x 轴的公共点坐标为 $(2, 0)$, 求 a 、 c 满足的关系式;

(2) 设 A 为抛物线上的一点, 直线 $l: y=kx+1-k$ 与抛物线交于点 B 、 C , 直线 BD 垂

直于直线 $y = -1$, 垂足为点 D . 当 $k=0$ 时, 直线 l 与抛物线的一个交点在 y 轴上, 且 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

- ① 求点 A 的坐标和抛物线的解析式;
- ② 证明: 对于每个给定的实数 k , 都有 A 、 D 、 C 三点共线.

2019 年福建省中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题 (每小题 4 分, 共 40 分)

1. (4 分) (2019•福建) 计算 $2^2 + (-1)^0$ 的结果是 ()

- A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

【考点】19: 有理数的加法; 1E: 有理数的乘方; 6E: 零指数幂.

【专题】11: 计算题.

【分析】分别计算平方、零指数幂, 然后再进行实数的运算即可.

【解答】解: 原式 $= 4 + 1 = 5$

故选: A.

【点评】此题考查了实数的运算, 解答本题关键是掌握零指数幂的运算法则, 难度一般.

2. (4 分) (2019•福建) 北京故宫的占地面积约为 $720000m^2$, 将 720000 用科学记数法表示为 ()

- A. 72×10^4 B. 7.2×10^5 C. 7.2×10^6 D. 0.72×10^6

【考点】1I: 科学记数法—表示较大的数.

【专题】511: 实数.

【分析】用科学记数法表示较大的数时, 一般形式为 $a \times 10^n$, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 据此判断即可.

【解答】解: 将 720000 用科学记数法表示为 7.2×10^5 .

故选: B.

【点评】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

3. (4 分) (2019•福建) 下列图形中, 一定既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()

- A. 等边三角形 B. 直角三角形 C. 平行四边形 D. 正方形

【考点】P3: 轴对称图形; R5: 中心对称图形.

【专题】558: 平移、旋转与对称.

【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的概念对各选项分析判断即可得解.

【解答】解: A、等边三角形是轴对称图形, 不是中心对称图形, 故本选项错误;

B、直角三角形不是轴对称图形, 也不是中心对称图形, 故本选项错误;

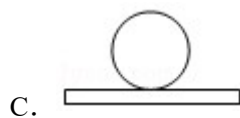
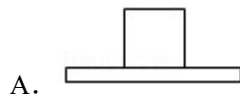
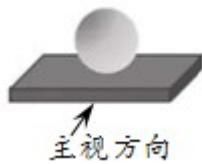
C、平行四边形不是轴对称图形, 是中心对称图形, 故本选项错误;

D、正方形既是轴对称图形, 又是中心对称图形, 故此选项正确.

故选: D.

【点评】 本题考查了中心对称图形与轴对称图形的概念. 轴对称图形的关键是寻找对称轴, 图形两部分折叠后可重合, 中心对称图形是要寻找对称中心, 旋转 180 度后两部分重合

4. (4 分) (2019•福建) 如图是由一个长方体和一个球组成的几何体, 它的主视图是 ()



【考点】 U2: 简单组合体的三视图.

【专题】 55F: 投影与视图.

【分析】 从正面看几何体, 确定出主视图即可.

【解答】 解: 几何体的主视图为:



故选: C.

【点评】 此题考查了简单组合体的三视图, 主视图即为从正面看几何体得到的视图.

5. (4 分) (2019•福建) 已知正多边形的一个外角为 36° , 则该正多边形的边数为 ()

A. 12

B. 10

C. 8

D. 6

【考点】 L3: 多边形内角与外角.

【专题】 11: 计算题; 555: 多边形与平行四边形.

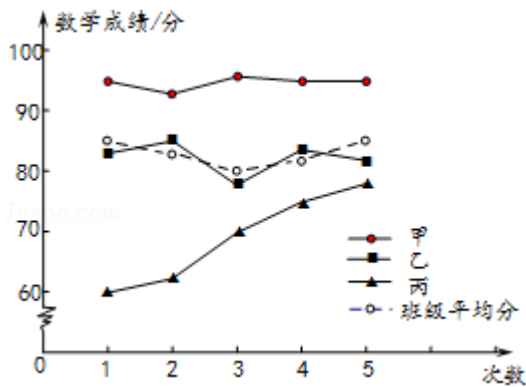
【分析】 利用多边形的外角和是 360° , 正多边形的每个外角都是 36° , 即可求出答案.

【解答】解： $360^{\circ} \div 36^{\circ} = 10$ ，所以这个正多边形是正十边形．

故选：B．

【点评】本题主要考查了多边形的外角和定理．是需要识记的内容．

6. (4分) (2019•福建) 如图是某班甲、乙、丙三位同学最近5次数学成绩及其所在班级相应平均分的折线统计图，则下列判断错误的是 ()



- A. 甲的数学成绩高于班级平均分，且成绩比较稳定
 B. 乙的数学成绩在班级平均分附近波动，且比丙好
 C. 丙的数学成绩低于班级平均分，但成绩逐次提高
 D. 就甲、乙、丙三个人而言，乙的数学成绩最不稳

【考点】VD：折线统计图；W7：方差．

【专题】541：数据的收集与整理．

【分析】折线图是用一个单位表示一定的数量，根据数量的多少描出各点，然后把各点用线段依次连接起来．以折线的上升或下降来表示统计数量增减变化．

方差是反映一组数据的波动大小的一个量．方差越大，则平均值的离散程度越大，稳定性也越小；反之，则它与其平均值的离散程度越小，稳定性越好

【解答】解：A. 甲的数学成绩高于班级平均分，且成绩比较稳定，正确；

B. 乙的数学成绩在班级平均分附近波动，且比丙好，正确；

C. 丙的数学成绩低于班级平均分，但成绩逐次提高，正确

D. 就甲、乙、丙三个人而言，丙的数学成绩最不稳，故D错误．

故选：D．

【点评】本题是折线统计图，要通过坐标轴以及图例等读懂本图，根据图中所示的数量解决问题．

7. (4分) (2019•福建) 下列运算正确的是 ()

A. $a \cdot a^3 = a^3$

B. $(2a)^3 = 6a^3$

C. $a^6 \div a^3 = a^2$

D. $(a^2)^3 - (-a^3)^2 = 0$

【考点】35: 合并同类项; 46: 同底数幂的乘法; 47: 幂的乘方与积的乘方; 48: 同底数幂的除法.

【专题】512: 整式.

【分析】各项计算得到结果, 即可作出判断.

【解答】解: A、原式 $= a^4$, 不符合题意;

B、原式 $= 8a^3$, 不符合题意;

C、原式 $= a^3$, 不符合题意;

D、原式 $= 0$, 符合题意,

故选: D.

【点评】此题考查了整式的混合运算, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

8. (4分) (2019•福建)《增删算法统宗》记载:“有个学生资性好,一部孟子三日了,每日增添一倍多,问若每日读多少?”其大意是:有个学生天资聪慧,三天读完一部《孟子》,每天阅读的字数是前一天的两倍,问他每天各读多少个字?已知《孟子》一书共有 34685 个字,设他第一天读 x 个字,则下面所列方程正确的是 ()

A. $x+2x+4x=34685$

B. $x+2x+3x=34685$

C. $x+2x+2x=34685$

D. $x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x=34685$

【考点】89: 由实际问题抽象出一元一次方程.

【专题】521: 一次方程(组)及应用.

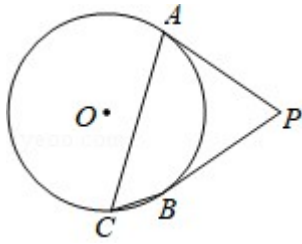
【分析】设他第一天读 x 个字, 根据题意列出方程解答即可.

【解答】解: 设他第一天读 x 个字, 根据题意可得: $x+2x+4x=34685$,

故选: A.

【点评】此题考查由实际问题抽象出一元一次方程, 解答本题的关键是读懂题意, 设出未知数, 找出合适的等量关系, 列方程.

9. (4分) (2019•福建)如图, PA 、 PB 是 $\odot O$ 切线, A 、 B 为切点, 点 C 在 $\odot O$ 上, 且 $\angle ACB=55^\circ$, 则 $\angle APB$ 等于 ()



- A. 55° B. 70° C. 110° D. 125°

【考点】M5: 圆周角定理; MC: 切线的性质.

【专题】559: 圆的有关概念及性质; 55A: 与圆有关的位置关系.

【分析】根据圆周角定理构造它所对的弧所对的圆心角, 即连接 OA , OB , 求得 $\angle AOB = 110^\circ$, 再根据切线的性质以及四边形的内角和定理即可求解.

【解答】解: 连接 OA , OB ,

$\because PA, PB$ 是 $\odot O$ 的切线,

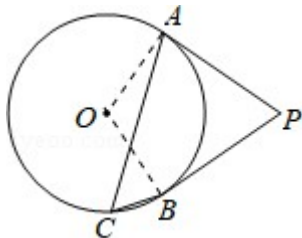
$\therefore PA \perp OA, PB \perp OB$,

$\because \angle ACB = 55^\circ$,

$\therefore \angle AOB = 110^\circ$,

$\therefore \angle APB = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

故选: B.



【点评】本题考查了多边形的内角和定理, 切线的性质, 圆周角定理的应用, 关键是求出 $\angle AOB$ 的度数.

10. (4 分) (2019•福建) 若二次函数 $y = |a|x^2 + bx + c$ 的图象经过 $A(m, n)$ 、 $B(0, y_1)$ 、 $C(3-m, n)$ 、 $D(\sqrt{2}, y_2)$ 、 $E(2, y_3)$, 则 y_1, y_2, y_3 的大小关系是 ()

- A. $y_1 < y_2 < y_3$ B. $y_1 < y_3 < y_2$ C. $y_3 < y_2 < y_1$ D. $y_2 < y_3 < y_1$

【考点】H5: 二次函数图象上点的坐标特征.

【专题】535: 二次函数图象及其性质.

【分析】由点 $A(m, n)$ 、 $C(3-m, n)$ 的对称性, 可求函数的对称轴为 $x = \frac{3}{2}$, 再由

$B(0, y_1)$ 、 $D(\sqrt{2}, y_2)$ 、 $E(2, y_3)$ 与对称轴的距离, 即可判断 $y_1 > y_3 > y_2$;

【解答】解: $\because$ 经过 $A(m, n)$ 、 $C(3-m, n)$,

$\therefore$ 二次函数的对称轴 $x = \frac{3}{2}$,

$\because B(0, y_1)$ 、 $D(\sqrt{2}, y_2)$ 、 $E(2, y_3)$ 与对称轴的距离 B 最远, D 最近,

$\therefore |a| > 0$,

$\therefore y_1 > y_3 > y_2$;

故选: D .

【点评】本题考查二次函数的图象及性质; 熟练掌握函数图象上点的特征是解题的关键.

二、填空题 (每小题 4 分, 共 24 分)

11. (4 分) (2019•福建) 因式分解: $x^2 - 9 = \underline{(x+3)(x-3)}$.

【考点】54: 因式分解 - 运用公式法.

【专题】11: 计算题; 44: 因式分解.

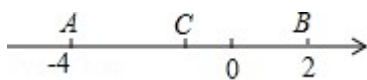
【分析】原式利用平方差公式分解即可.

【解答】解: 原式 $= (x+3)(x-3)$,

故答案为: $(x+3)(x-3)$.

【点评】此题考查了因式分解 - 运用公式法, 熟练掌握平方差公式是解本题的关键.

12. (4 分) (2019•福建) 如图, 数轴上 A 、 B 两点所表示的数分别是 -4 和 2 , 点 C 是线段 AB 的中点, 则点 C 所表示的数是 $\underline{-1}$.



【考点】13: 数轴.

【专题】551: 线段、角、相交线与平行线.

【分析】根据 A 、 B 两点所表示的数分别为 -4 和 2 , 利用中点公式求出线段 AB 的中点所表示的数即可.

【解答】解: $\because$ 数轴上 A 、 B 两点所表示的数分别是 -4 和 2 ,

$\therefore$ 线段 AB 的中点所表示的数 $= \frac{1}{2}(-4+2) = -1$.

即点 C 所表示的数是 -1 .

故答案为: -1

【点评】本题考查的是数轴, 熟知数轴上两点间的距离公式是解答此题的关键.

13. (4 分) (2019•福建) 某校征集校运会会徽, 遴选出甲、乙、丙三种图案. 为了解何种

图案更受欢迎, 随机调查了该校 100 名学生, 其中 60 名同学喜欢甲图案, 若该校共有 2000 人, 根据所学的统计知识可以估计该校喜欢甲图案的学生有 1200 人.

【考点】V5: 用样本估计总体.

【专题】542: 统计的应用.

【分析】用总人数乘以样本中喜欢甲图案的频率即可求得总体中喜欢甲图案的人数.

【解答】解: 由题意得: $2000 \times \frac{60}{100} = 1200$ 人,

故答案为: 1200.

【点评】本题考查了用样本估计总体的知识, 解题的关键是求得样本中喜欢甲图案的频率, 难度不大.

14. (4 分) (2019•福建) 在平面直角坐标系 xOy 中, $\square OABC$ 的三个顶点 $O(0, 0)$ 、 $A(3, 0)$ 、 $B(4, 2)$, 则其第四个顶点是 (1, 2).

【考点】D5: 坐标与图形性质; L5: 平行四边形的性质.

【专题】555: 多边形与平行四边形.

【分析】由题意得出 $OA=3$, 由平行四边形的性质得出 $BC \parallel OA$, $BC=OA=3$, 即可得出结果.

【解答】解: $\because O(0, 0)$ 、 $A(3, 0)$,

$\therefore OA=3$,

$\because$ 四边形 $OABC$ 是平行四边形,

$\therefore BC \parallel OA$, $BC=OA=3$,

$\because B(4, 2)$,

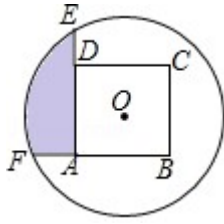
$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(4-3, 2)$,

即 $C(1, 2)$;

故答案为: $(1, 2)$.

【点评】本题考查了平行四边形的性质、坐标与图形性质; 熟练掌握平行四边形的性质是解题的关键.

15. (4 分) (2019•福建) 如图, 边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中心与半径为 2 的 $\odot O$ 的圆心重合, E 、 F 分别是 AD 、 BA 的延长与 $\odot O$ 的交点, 则图中阴影部分的面积是 $\pi - 1$.
(结果保留 π)



【考点】LE: 正方形的性质; MO: 扇形面积的计算.

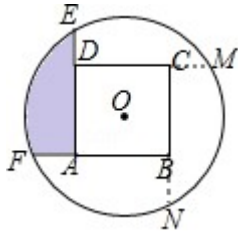
【专题】55C: 与圆有关的计算.

【分析】延长 DC , CB 交 $\odot O$ 于 M , N , 根据圆和正方形的面积公式即可得到结论.

【解答】解: 延长 DC , CB 交 $\odot O$ 于 M , N ,

$$\text{则图中阴影部分的面积} = \frac{1}{4} \times (S_{\text{圆}O} - S_{\text{正方形}ABCD}) = \frac{1}{4} \times (4\pi - 4) = \pi - 1,$$

故答案为: $\pi - 1$.

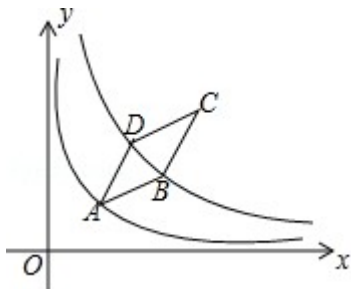


【点评】本题考查了扇形面积的计算, 正方形的性质, 正确的识别图形是解题的关键.

16. (4分) (2019•福建) 如图, 菱形 $ABCD$ 顶点 A 在函数 $y = \frac{3}{x}$ ($x > 0$) 的图象上, 函

数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 3$, $x > 0$) 的图象关于直线 AC 对称, 且经过点 B 、 D 两点, 若 $AB =$

2, $\angle BAD = 30^\circ$, 则 $k = 6 + 2\sqrt{3}$.



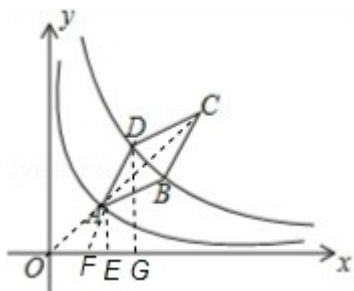
【考点】G8: 反比例函数与一次函数的交点问题.

【专题】55E: 解直角三角形及其应用.

【分析】连接 OC , AC 过 A 作 $AE \perp x$ 轴于点 E , 延长 DA 与 x 轴交于点 F , 过点 D 作 $DG \perp x$ 轴于点 G , 得 O 、 A 、 C 在第一象限的角平分线上, 求得 A 点坐标, 进而求得 D 点

坐标, 便可求得结果.

【解答】解: 连接 OC , AC 过 A 作 $AE \perp x$ 轴于点 E , 延长 DA 与 x 轴交于点 F , 过点 D 作 $DG \perp x$ 轴于点 G ,



$\because$ 函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 3, x > 0$) 的图象关于直线 AC 对称,

$\therefore O, A, C$ 三点在同一直线上, 且 $\angle COE = 45^\circ$,

$\therefore OE = AE$,

不妨设 $OE = AE = a$, 则 $A(a, a)$,

$\because$ 点 A 在反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ ($x > 0$) 的图象上,

$\therefore a^2 = 3$,

$\therefore a = \sqrt{3}$,

$\therefore AE = OE = \sqrt{3}$,

$\because \angle BAD = 30^\circ$,

$\therefore \angle OAF = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAD = 15^\circ$,

$\because \angle OAE = \angle AOE = 45^\circ$,

$\therefore \angle EAF = 30^\circ$,

$\therefore AF = \frac{AE}{\cos 30^\circ} = 2, EF = AE \tan 30^\circ = 1$,

$\because AB = AD = 2, AE \parallel DG$,

$\therefore EF = EG = 1, DG = 2AE = 2\sqrt{3}$,

$\therefore OG = OE + EG = \sqrt{3} + 1$,

$\therefore D(\sqrt{3} + 1, 2\sqrt{3})$,

故答案为: $6 + 2\sqrt{3}$.

【点评】本题是一次函数图象与反比例函数图象的交点问题, 主要考查了一次函数与反比例函数的性质, 菱形的性质, 解直角三角形, 关键是确定 A 点第一象限的角平分线上.

三、解答题 (共 86 分)

17. (8 分) (2019•福建) 解方程组 $\begin{cases} x-y=5 \\ 2x+y=4 \end{cases}$.

【考点】98: 解二元一次方程组.

【专题】11: 计算题.

【分析】方程组利用加减消元法求出解即可.

【解答】解: $\begin{cases} x-y=5 \text{ ①} \\ 2x+y=4 \text{ ②} \end{cases}$,

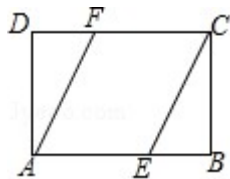
①+② 得: $3x=9$, 即 $x=3$,

把 $x=3$ 代入①得: $y=-2$,

则方程组的解为 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$.

【点评】此题考查了解二元一次方程组, 利用了消元的思想, 消元的方法有: 代入消元法与加减消元法.

18. (8 分) (2019•福建) 如图, 点 E 、 F 分别是矩形 $ABCD$ 的边 AB 、 CD 上的一点, 且 $DF=BE$. 求证: $AF=CE$.



【考点】KD: 全等三角形的判定与性质; LB: 矩形的性质.

【专题】553: 图形的全等; 556: 矩形 菱形 正方形.

【分析】由 SAS 证明 $\triangle ADF \cong \triangle BCE$, 即可得出 $AF=CE$.

【解答】证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle D = \angle B = 90^\circ$, $AD = BC$,

在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle BCE$ 中, $\begin{cases} AD=BC \\ \angle D=\angle B \\ DF=BE \end{cases}$,

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle BCE (SAS)$,

$\therefore AF = CE$.

【点评】本题考查了矩形的性质、全等三角形的判定与性质; 熟练掌握矩形的性质, 证明三角形全等是解题的关键.

19. (8分) (2019•福建) 先化简, 再求值: $(x-1) \div (x - \frac{2x-1}{x})$, 其中 $x = \sqrt{2}+1$.

【考点】6D: 分式的化简求值.

【专题】513: 分式.

【分析】先化简分式, 然后将 x 的值代入计算即可.

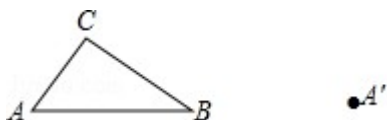
$$\begin{aligned}
 \text{【解答】解: 原式} &= (x-1) \div \frac{x^2-2x+1}{x} \\
 &= (x-1) \cdot \frac{x}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{x}{x-1}, \\
 \text{当 } x &= \sqrt{2}+1, \\
 \text{原式} &= \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1-1} \\
 &= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.
 \end{aligned}$$

【点评】本题考查了分式的化简求值, 熟练掌握分式混合运算法则是解题的关键.

20. (8分) (2019•福建) 已知 $\triangle ABC$ 和点 A' , 如图.

(1) 以点 A' 为一个顶点作 $\triangle A'B'C'$, 使 $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$, 且 $\triangle A'B'C'$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 面积的 4 倍; (要求: 尺规作图, 不写作法, 保留作图痕迹)

(2) 设 D 、 E 、 F 分别是 $\triangle ABC$ 三边 AB 、 BC 、 AC 的中点, D' 、 E' 、 F' 分别是你所作的 $\triangle A'B'C'$ 三边 $A'B'$ 、 $B'C'$ 、 $C'A'$ 的中点, 求证: $\triangle DEF \sim \triangle D'E'F'$.



【考点】K3: 三角形的面积; KX: 三角形中位线定理; N3: 作图—复杂作图; S8: 相似三角形的判定.

【专题】13: 作图题; 55D: 图形的相似.

【分析】(1) 分别作 $A'C' = 2AC$ 、 $A'B' = 2AB$ 、 $B'C' = 2BC$ 得 $\triangle A'B'C'$ 即可所求.

(2) 根据中位线定理易得 $\therefore \triangle DEF \sim \triangle ABC$, $\triangle D'E'F' \sim \triangle A'B'C'$, 故 $\triangle DEF \sim \triangle D'E'F'$

【解答】解: (1) 作线段 $A'C' = 2AC$ 、 $A'B' = 2AB$ 、 $B'C' = 2BC$, 得 $\triangle A'B'C'$ 即可所求.

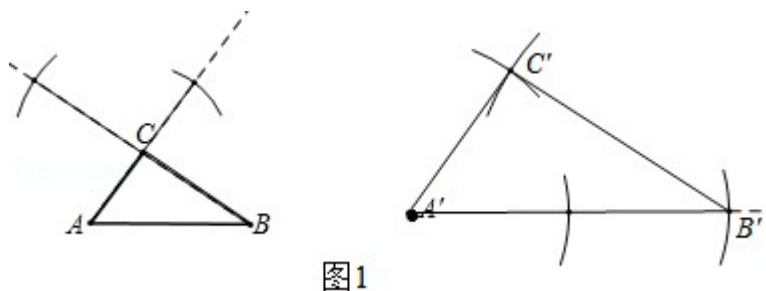


图1

证明: $\because A'C' = 2AC, A'B' = 2AB, B'C' = 2BC,$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A' B' C' ,$

$$\therefore \frac{S_{\triangle A' B' C'}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{A' B'}{AB}\right)^2 = 4$$

(2) 证明:

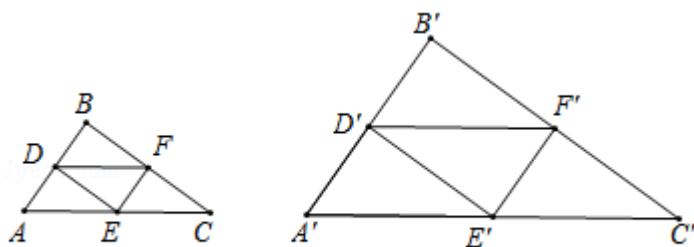


图2

$\because D, E, F$ 分别是 $\triangle ABC$ 三边 AB, BC, AC 的中点,

$$\therefore DE = \frac{1}{2} BC, DF = \frac{1}{2} AC, EF = \frac{1}{2} AB,$$

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle ABC$$

同理: $\triangle D'E'F' \sim \triangle A'B'C',$

由 (1) 可知: $\triangle ABC \sim \triangle A' B' C' ,$

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle D'E'F'.$$

【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质及三角形的中位线定理, 解答本题的关键是掌握相似三角形的判定方法, 本题用到的是三边法.

21. (8分) (2019•福建) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ, \angle ACB = 30^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转一定的角度 α 得到 $\triangle DEC$, 点 A, B 的对应点分别是 D, E .

(1) 当点 E 恰好在 AC 上时, 如图 1, 求 $\angle ADE$ 的大小;

(2) 若 $\alpha = 60^\circ$ 时, 点 F 是边 AC 中点, 如图 2, 求证: 四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

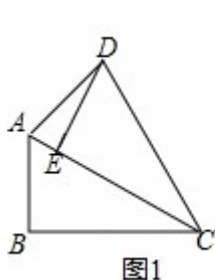


图1

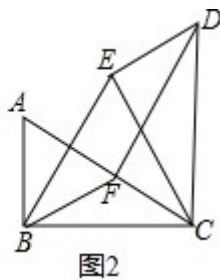


图2

【考点】L6: 平行四边形的判定; R2: 旋转的性质.

【专题】558: 平移、旋转与对称.

【分析】(1) 如图 1, 利用旋转的性质得 $CA=CD$, $\angle ECD=\angle BCA=30^\circ$, $\angle DEC=\angle ABC=90^\circ$, 再根据等腰三角形的性质和三角形内角和计算出 $\angle CAD$, 从而利用互余和计算出 $\angle ADE$ 的度数;

(2) 如图 2, 利用直角三角形斜边上的中线性质的性质得到 $BF=\frac{1}{2}AC$, 利用含 30° 度的直角三

角形三边的关系得到 $AB=\frac{1}{2}AC$, 则 $BF=AB$, 再根据旋转的性质得到 $\angle BCE=\angle ACD=60^\circ$, $CB=CE$, $DE=AB$, 从而得到 $DE=BF$, $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 为等边三角形, 接着证明 $\triangle CFD\cong\triangle ABC$ 得到 $DF=BC$, 然后根据平行四边形的判定方法得到结论.

【解答】(1) 解: 如图 1, $\because \triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转 α 得到 $\triangle DEC$, 点 E 恰好在 AC 上,

$$\therefore CA=CD, \angle ECD=\angle BCA=30^\circ, \angle DEC=\angle ABC=90^\circ,$$

$$\because CA=CD,$$

$$\therefore \angle CAD=\angle CDA=\frac{1}{2}(180^\circ-30^\circ)=75^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE=90^\circ-75^\circ=25^\circ;$$

(2) 证明: 如图 2,

$\because$ 点 F 是边 AC 中点,

$$\therefore BF=\frac{1}{2}AC,$$

$$\because \angle ACB=30^\circ,$$

$$\therefore AB=\frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore BF=AB,$$

$\because \triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle DEC$,
 $\therefore \angle BCE = \angle ACD = 60^\circ$, $CB = CE$, $DE = AB$,
 $\therefore DE = BF$, $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 为等边三角形,
 $\therefore BE = CB$,
 $\because$ 点 F 为 $\triangle ACD$ 的边 AC 的中点,
 $\therefore DF \perp AC$,
 易证得 $\triangle CFD \cong \triangle ABC$,
 $\therefore DF = BC$,
 $\therefore DF = BE$,
 而 $BF = DE$,
 $\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

【点评】 本题考查了旋转的性质：对应点到旋转中心的距离相等；对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角；旋转前、后的图形全等．也考查了平行四边形的判定．

22. (10 分) (2019•福建) 某工厂为贯彻落实“绿水青山就是金山银山”的发展理念，投资组建了日废水处理量为 m 吨的废水处理车间，对该厂工业废水进行无害化处理．但随着工厂生产规模的扩大，该车间经常无法完成当天工业废水的处理任务，需要将超出日废水处理量的废水交给第三方企业处理．已知该车间处理废水，每天需固定成本 30 元，并且每处理一吨废水还需其他费用 8 元；将废水交给第三方企业处理，每吨需支付 12 元．根据记录，5 月 21 日，该厂产生工业废水 35 吨，共花费废水处理费 370 元．

(1) 求该车间的日废水处理量 m ；

(2) 为实现可持续发展，走绿色发展之路，工厂合理控制了生产规模，使得每天废水处理的平均费用不超过 10 元/吨，试计算该厂一天产生的工业废水量的范围．

【考点】 8A：一元一次方程的应用；C9：一元一次不等式的应用．

【专题】 34：方程思想；521：一次方程（组）及应用；524：一元一次不等式（组）及应用．

【分析】 (1) 求出该车间处理 35 吨废水所需费用，将其与 350 比较后可得出 $m < 35$ ，根据废水处理费用 = 该车间处理 m 吨废水的费用 + 第三方处理超出部分废水的费用，即可得出关于 m 的一元一次方程，解之即可得出结论；

(2) 设一天产生工业废水 x 吨，分 $0 < x \leq 20$ 及 $x > 20$ 两种情况考虑，利用每天废水处理的平均费用不超过 10 元/吨，可得出关于 x 的一元一次不等式，解之即可得出结论．

【解答】 解：(1) $\because 35 \times 8 + 30 = 310$ (元)， $310 < 350$ ，

$$\therefore m < 35.$$

依题意, 得: $30 + 8m + 12(35 - m) = 370$,

解得: $m = 20$.

答: 该车间的日废水处理量为 20 吨.

(2) 设一天产生工业废水 x 吨,

当 $0 < x \leq 20$ 时, $8x + 30 \leq 10x$,

解得: $15 \leq x \leq 20$;

当 $x > 20$ 时, $12(x - 20) + 8 \times 20 + 30 \leq 10x$,

解得: $20 < x \leq 25$.

综上所述, 该厂一天产生的工业废水量的范围为 $15 \leq x \leq 20$.

【点评】 本题考查了一元一次方程的应用以及一元一次不等式的应用, 解题的关键是:

(1) 找准等量关系, 正确列出一元一次方程; (2) 根据各数量之间的关系, 正确列出一元一次不等式.

23. (10 分) (2019•福建) 某种机器使用期为三年, 买方在购进机器时, 可以给各台机器分别一次性额外购买若干次维修服务, 每次维修服务费为 2000 元. 每台机器在使用期间, 如果维修次数未超过购机时购买的维修服务次数, 每次实际维修时还需向维修人员支付工时费 500 元; 如果维修次数超过购机时购买的维修服务次数, 超出部分每次维修时需支付维修服务费 5000 元, 但无需支付工时费. 某公司计划购买 1 台该种机器, 为决策在购买机器时应同时一次性额外购买几次维修服务, 搜集并整理了 100 台这种机器在三年使用期内的维修次数, 整理得下表:

维修次数	8	9	10	11	12
频率 (台数)	10	20	30	30	10

(1) 以这 100 台机器为样本, 估计 “1 台机器在三年使用期内维修次数不大于 10” 的概率;

(2) 试以这 100 台机器维修费用的平均数作为决策依据, 说明购买 1 台该机器的同时应一次性额外购 10 次还是 11 次维修服务?

【考点】 V3: 总体、个体、样本、样本容量; V5: 用样本估计总体; W2: 加权平均数;

X6: 列表法与树状图法; X8: 利用频率估计概率.

【专题】 543: 概率及其应用.

【分析】 (1) 利用概率公式计算即可.

(2) 分别求出购买 10 次, 11 次的费用即可判断.

【解答】解: (1) “1 台机器在三年使用期内维修次数不大于 10” 的概率 $= \frac{60}{100} = 0.6$.

(2) 购买 10 次时,

某台机器使用期内维修次数	8	9	10	11	12
该台机器维修费用	24000	24500	25000	30000	35000

此时这 100 台机器维修费用的平均数

$$y_1 = \frac{1}{100} (24000 \times 10 + 24500 \times 20 + 25000 \times 30 + 30000 \times 30 + 35000 \times 10) = 27300$$

购买 11 次时,

某台机器使用期内维修次数	8	9	10	11	12
该台机器维修费用	26000	26500	27000	27500	32500

此时这 100 台机器维修费用的平均数

$$y_2 = \frac{1}{100} (26000 \times 10 + 26500 \times 20 + 27000 \times 30 + 27500 \times 30 + 32500 \times 10) = 27500,$$

$$\because 27300 < 27500,$$

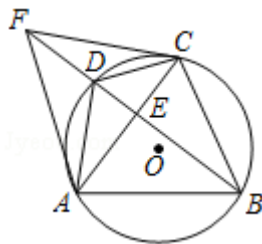
所以, 选择购买 10 次维修服务.

【点评】本题考查利用频率估计概率, 加权平均数, 列表法等知识, 解题的关键是理解题意, 熟练掌握基本知识, 属于中考常考题型.

24. (12 分) (2019•福建) 如图, 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, $AB=AC$, $AC \perp BD$, 垂足为 E , 点 F 在 BD 的延长线上, 且 $DF=DC$, 连接 AF 、 CF .

(1) 求证: $\angle BAC = 2\angle CAD$;

(2) 若 $AF=10$, $BC=4\sqrt{5}$, 求 $\tan \angle BAD$ 的值.



【考点】KW: 等腰直角三角形; M4: 圆心角、弧、弦的关系; M5: 圆周角定理; T7: 解直角三角形.

【专题】559: 圆的有关概念及性质.

【分析】(1) 根据等腰三角形的性质得出 $\angle ABC = \angle ACB$, 根据圆心角、弧、弦的关系得

到 $\widehat{AB} = \widehat{AC}$, 即可得到 $\angle ABC = \angle ADB$, 根据三角形内角和定理得到 $\angle ABC = \frac{1}{2} (180^\circ -$

$\angle BAC) = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle BAC$, $\angle ADB = 90^\circ - \angle CAD$, 从而得到 $\frac{1}{2} \angle BAC = \angle CAD$, 即可

证得结论;

(2) 易证得 $BC = CF = 4\sqrt{5}$, 即可证得 AC 垂直平分 BF , 证得 $AB = AF = 10$, 根据勾股定理求得 AE 、 CE 、 BE , 根据相交弦定理求得 DE , 即可求得 BD , 然后根据三角形面积公式求得 DH , 进而求得 AH , 解直角三角函数求得 $\tan \angle BAD$ 的值.

【解答】解: (1) $\because AB = AC$,

$\therefore \widehat{AB} = \widehat{AC}$, $\angle ABC = \angle ACB$,

$\therefore \angle ABC = \angle ADB$, $\angle ABC = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle BAC) = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle BAC$,

$\because BD \perp AC$,

$\therefore \angle ADB = 90^\circ - \angle CAD$,

$\therefore \frac{1}{2} \angle BAC = \angle CAD$,

$\therefore \angle BAC = 2 \angle CAD$;

(2) 解: $\because DF = DC$,

$\therefore \angle DFC = \angle DCF$,

$\therefore \angle BDC = 2 \angle DFC$,

$\therefore \angle BFC = \frac{1}{2} \angle BDC = \frac{1}{2} \angle BAC = \angle FBC$,

$\therefore CB = CF$,

又 $BD \perp AC$,

$\therefore AC$ 是线段 BF 的中垂线, $AB = AF = 10$, $AC = 10$.

又 $BC = 4\sqrt{5}$,

设 $AE = x$, $CE = 10 - x$,

由 $AB^2 - AE^2 = BC^2 - CE^2$, 得 $100 - x^2 = 80 - (10 - x)^2$,

解得 $x = 6$,

$\therefore AE = 6$, $BE = 8$, $CE = 4$,

$\therefore DE = \frac{AE \cdot CE}{BE} = \frac{6 \times 4}{8} = 3$,

$$\therefore BD = BE + DE = 3 + 8 = 11,$$

作 $DH \perp AB$, 垂足为 H ,

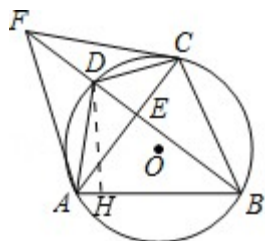
$$\therefore \frac{1}{2} AB \cdot DH = \frac{1}{2} BD \cdot AE,$$

$$\therefore DH = \frac{BD \cdot AE}{AB} = \frac{11 \times 6}{10} = \frac{33}{5},$$

$$\therefore BH = \sqrt{BD^2 - DH^2} = \frac{44}{5},$$

$$\therefore AH = AB - BH = 10 - \frac{44}{5} = \frac{6}{5},$$

$$\therefore \tan \angle BAD = \frac{DH}{AH} = \frac{33}{6} = \frac{11}{2}.$$



【点评】 本题属于圆综合题, 考查了圆周角定理, 勾股定理, 锐角三角函数, 圆心角、弧、弦的关系, 相交弦定理, 等腰三角形的判定和性质等知识, 解题的关键是熟练掌握并灵活运用性质定理, 属于中考压轴题.

25. (14分) (2019•福建) 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($b < 0$) 与 x 轴只有一个公共点.

(1) 若抛物线与 x 轴的公共点坐标为 $(2, 0)$, 求 a 、 c 满足的关系式;

(2) 设 A 为抛物线上的一点, 直线 $l: y = kx + 1 - k$ 与抛物线交于点 B 、 C , 直线 BD 垂直于直线 $y = -1$, 垂足为点 D . 当 $k = 0$ 时, 直线 l 与抛物线的一个交点在 y 轴上, 且 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

① 求点 A 的坐标和抛物线的解析式;

② 证明: 对于每个给定的实数 k , 都有 A 、 D 、 C 三点共线.

【考点】 HF: 二次函数综合题.

【专题】 16: 压轴题; 31: 数形结合; 34: 方程思想; 65: 数据分析观念.

【分析】 (1) 抛物线与 x 轴的公共点坐标即为函数顶点坐标, 即可求解;

(2) ① $y = kx + 1 - k = k(x - 1) + 1$ 过定点 $(1, 1)$, 且当 $k = 0$ 时, 直线 l 变为 $y = 1$ 平行 x 轴, 与轴的交点为 $(0, 1)$, 即可求解; ② 计算直线 AD 表达式中的 k 值、直线 AC

表达式中的 k 值, 两个 k 值相等即可求解.

【解答】解: (1) 抛物线与 x 轴的公共点坐标即为函数顶点坐标, 故: $y=a(x-2)^2=$
 $ax^2-4ax+4a$,

则 $c=4a$;

(2) $y=kx+1-k=k(x-1)+1$ 过定点 $(1, 1)$,

且当 $k=0$ 时, 直线 l 变为 $y=1$ 平行 x 轴, 与轴的交点为 $(0, 1)$,

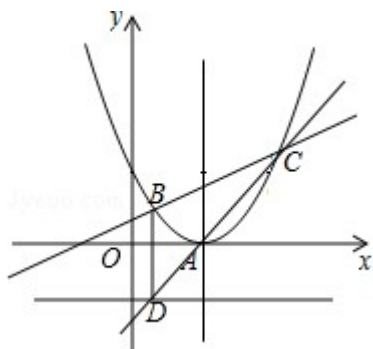
又 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形,

$\therefore$ 点 A 为抛物线的顶点;

① $c=1$, 顶点 $A(1, 0)$,

抛物线的解析式: $y=x^2-2x+1$,

$$\textcircled{2} \begin{cases} y=x^2-2x+1, \\ y=kx+1-k \end{cases}$$



$$x^2 - (2+k)x + k = 0,$$

$$x = \frac{1}{2} (2+k \pm \sqrt{k^2+4}),$$

$$x_D = x_B = \frac{1}{2} (2+k - \sqrt{k^2+4}), \quad y_D = -1;$$

$$\text{则 } D \left(1 + \frac{k - \sqrt{k^2+4}}{2}, -1 \right),$$

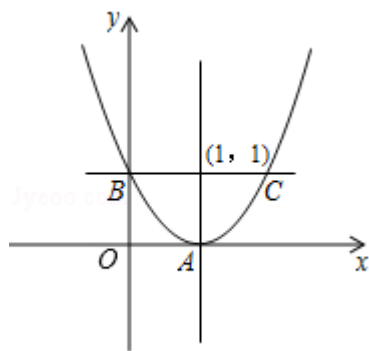
$$y_C = \frac{1}{2} (2+k^2+k\sqrt{k^2+4}),$$

$$C \left(1 + \frac{k + \sqrt{k^2+4}}{2}, 1 + \frac{k(k + \sqrt{k^2+4})}{2} \right), \quad A(1, 0),$$

$$\therefore \text{直线 } AD \text{ 表达式中的 } k \text{ 值为: } k_{AD} = \frac{-2}{k - \sqrt{k^2 + 4}} = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2},$$

$$\text{直线 } AC \text{ 表达式中的 } k \text{ 值为: } k_{AC} = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2},$$

$\therefore k_{AD} = k_{AC}$, 点 A 、 C 、 D 三点共线.



【点评】 本题考查的是二次函数综合运用, 涉及到一次函数、等腰三角形性质等知识点, 本题关键是复杂数据的计算问题, 难度不大.

考点卡片

1. 数轴

(1) 数轴的概念: 规定了原点、正方向、单位长度的直线叫做数轴.

数轴的三要素: 原点, 单位长度, 正方向.

(2) 数轴上的点: 所有的有理数都可以用数轴上的点表示, 但数轴上的点不都表示有理数.

(一般取右方向为正方向, 数轴上的点对应任意实数, 包括无理数.)

(3) 用数轴比较大小: 一般来说, 当数轴方向朝右时, 右边的数总比左边的数大.

2. 有理数的加法

(1) 有理数加法法则:

① 同号相加, 取相同符号, 并把绝对值相加.

② 绝对值不等的异号加减, 取绝对值较大的加数符号, 并用较大的绝对值减去较小的绝对值. 互为相反数的两个数相加得 0.

③ 一个数同 0 相加, 仍得这个数.

(在进行有理数加法运算时, 首先判断两个加数的符号: 是同号还是异号, 是否有 0. 从而确定用那一条法则. 在应用过程中, 要牢记“先符号, 后绝对值”.)

(2) 相关运算律

交换律: $a+b=b+a$; 结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$.

3. 有理数的乘方

(1) 有理数乘方的定义: 求 n 个相同因数积的运算, 叫做乘方.

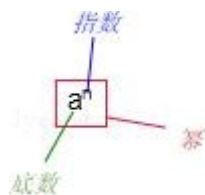
乘方的结果叫做幂, 在 a^n 中, a 叫做底数, n 叫做指数. a^n 读作 a 的 n 次方. (将 a^n 看作是 a 的 n 次方的结果时, 也可以读作 a 的 n 次幂.)

(2) 乘方的法则: 正数的任何次幂都是正数; 负数的奇次幂是负数, 负数的偶次幂是正数; 0 的任何正整数次幂都是 0.

(3) 方法指引:

① 有理数的乘方运算与有理数的加减乘除运算一样, 首先要确定幂的符号, 然后再计算幂的绝对值;

② 由于乘方运算比乘除运算又高一级, 所以有加减乘除和乘方运算, 应先算乘方, 再做乘除, 最后做加减.



4. 科学记数法—表示较大的数

(1) 科学记数法: 把一个大于 10 的数记成 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 a 是整数数位只有一位的数, n 是正整数, 这种记数法叫做科学记数法. 【科学记数法形式: $a \times 10^n$, 其中 $1 \leq a < 10$, n 为正整数.】

(2) 规律方法总结:

- ① 科学记数法中 a 的要求和 10 的指数 n 的表示规律为关键, 由于 10 的指数比原来的整数位数少 1; 按此规律, 先数一下原数的整数位数, 即可求出 10 的指数 n .
- ② 记数法要求是大于 10 的数可用科学记数法表示, 实质上绝对值大于 10 的负数同样可用此法表示, 只是前面多一个负号.

5. 合并同类项

(1) 定义: 把多项式中同类项合成一项, 叫做合并同类项.

(2) 合并同类项的法则: 把同类项的系数相加, 所得结果作为系数, 字母和字母的指数不变.

(3) 合并同类项时要注意以下三点:

- ① 要掌握同类项的概念, 会辨别同类项, 并准确地掌握判断同类项的两条标准: 带有相同系数的代数项; 字母和字母指数;
- ② 明确合并同类项的含义是把多项式中的同类项合并成一项, 经过合并同类项, 式的项数会减少, 达到化简多项式的目的;
- ③ “合并”是指同类项的系数的相加, 并把得到的结果作为新的系数, 要保持同类项的字母和字母的指数不变.

6. 同底数幂的乘法

(1) 同底数幂的乘法法则: 同底数幂相乘, 底数不变, 指数相加.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (m, n \text{ 是正整数})$$

(2) 推广: $a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}$ (m, n, p 都是正整数)

在应用同底数幂的乘法法则时, 应注意: ① 底数必须相同, 如 2^3 与 2^5 , $(a^2b^2)^3$ 与 $(a^2b^2)^4$, $(x-y)^2$ 与 $(x-y)^3$ 等; ② a 可以是单项式, 也可以是多项式; ③ 按照运

算性质, 只有相乘时才是底数不变, 指数相加.

(3) 概括整合: 同底数幂的乘法, 是学习整式乘除运算的基础, 是学好整式运算的关键.

在运用时要抓住“同底数”这一关键点, 同时注意, 有的底数可能并不相同, 这时可以适当变形为同底数幂.

7. 幂的乘方与积的乘方

(1) 幂的乘方法则: 底数不变, 指数相乘.

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (m, n \text{ 是正整数})$$

注意: ①幂的乘方的底数指的是幂的底数; ②性质中“指数相乘”指的是幂的指数与乘方的指数相乘, 这里注意与同底数幂的乘法中“指数相加”的区别.

(2) 积的乘方法则: 把每一个因式分别乘方, 再把所得的幂相乘.

$$(ab)^n = a^n b^n \quad (n \text{ 是正整数})$$

注意: ①因式是三个或三个以上积的乘方, 法则仍适用; ②运用时数字因数的乘方应根据乘方的意义, 计算出最后的结果.

8. 同底数幂的除法

同底数幂的除法法则: 底数不变, 指数相减.

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0, m, n \text{ 是正整数, } m > n)$$

①底数 $a \neq 0$, 因为 0 不能做除数;

②单独的一个字母, 其指数是 1, 而不是 0;

③应用同底数幂除法的法则时, 底数 a 可是单项式, 也可以多项式, 但必须明确底数是什么, 指数是什么.

9. 因式分解-运用公式法

1、如果把乘法公式反过来, 就可以把某些多项式分解因式, 这种方法叫公式法.

$$\text{平方差公式: } a^2 - b^2 = (a+b)(a-b);$$

$$\text{完全平方公式: } a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2;$$

2、概括整合:

①能够运用平方差公式分解因式的多项式必须是二项式, 两项都能写成平方的形式, 且符号相反.

②能运用完全平方公式分解因式的多项式必须是三项式, 其中有两项能写成两个数 (或式) 的平方和的形式, 另一项是这两个数 (或式) 的积的 2 倍.

3、要注意公式的综合应用, 分解到每一个因式都不能再分解为止.

10. 分式的化简求值

先把分式化简后, 再把分式中未知数对应的值代入求出分式的值.

在化简的过程中要注意运算顺序和分式的化简. 化简的最后结果分子、分母要进行约分, 注意运算的结果要化成最简分式或整式.

【规律方法】分式化简求值时需注意的问题

1. 化简求值, 一般是先化简为最简分式或整式, 再代入求值. 化简时不能跨度太大, 而缺少必要的步骤, 代入求值的模式一般为“当...时, 原式=...”.
2. 代入求值时, 有直接代入法, 整体代入法等常用方法. 解题时可根据题目的具体条件选择合适的方法. 当未知数的值没有明确给出时, 所选取的未知数的值必须使原式中的各分式都有意义, 且除数不能为 0.

11. 零指数幂

零指数幂: $a^0=1$ ($a \neq 0$)

由 $a^m \div a^m = 1$, $a^m \div a^m = a^{m-m} = a^0$ 可推出 $a^0=1$ ($a \neq 0$)

注意: $0^0 \neq 1$.

12. 由实际问题抽象出一元一次方程

审题找出题中的未知量和所有的已知量, 直接设要求的未知量或间接设一关键的未知量为 x , 然后用含 x 的式子表示相关的量, 找出之间的相等关系列方程.

(1) “总量=各部分量的和”是列方程解应用题中一个基本的关系式, 在这一类问题中, 表示出各部分的量和总量, 然后利用它们之间的等量关系列方程.

(2) “表示同一个量的不同式子相等”是列方程解应用题中的一个基本相等关系, 也是列方程的一种基本方法. 通过对同一个量从不同的角度用不同的式子表示, 进而列出方程.

13. 一元一次方程的应用

(一) 一元一次方程解应用题的类型有:

(1) 探索规律型问题;

(2) 数字问题;

(3) 销售问题 (利润=售价-进价, 利润率= $\frac{\text{利润}}{\text{进价}} \times 100\%$); (4) 工程问题 (①工作

量=人均效率×人数×时间; ②如果一件工作分几个阶段完成, 那么各阶段的工作量的和=工作总量);

(5) 行程问题 (路程=速度×时间);

(6) 等值变换问题;

(7) 和, 差, 倍, 分问题;

(8) 分配问题;

(9) 比赛积分问题;

(10) 水流航行问题 (顺水速度 = 静水速度 + 水流速度; 逆水速度 = 静水速度 - 水流速度).

(二) 利用方程解决实际问题的基本思路如下: 首先审题找出题中的未知量和所有的已知量, 直接设要求的未知量或间接设一关键的未知量为 x , 然后用含 x 的式子表示相关的量, 找出之间的相等关系列方程、求解、作答, 即设、列、解、答.

列一元一次方程解应用题的五个步骤

1. 审: 仔细审题, 确定已知量和未知量, 找出它们之间的等量关系.
2. 设: 设未知数 (x), 根据实际情况, 可设直接未知数 (问什么设什么), 也可设间接未知数.
3. 列: 根据等量关系列出方程.
4. 解: 解方程, 求得未知数的值.
5. 答: 检验未知数的值是否正确, 是否符合题意, 完整地写出答句.

14. 解二元一次方程组

(1) 用代入法解二元一次方程组的一般步骤: ①从方程组中选一个系数比较简单的方程, 将这个方程组中的一个未知数用含另一个未知数的代数式表示出来. ②将变形后的关系式代入另一个方程, 消去一个未知数, 得到一个一元一次方程. ③解这个一元一次方程, 求出 x (或 y) 的值. ④将求得的未知数的值代入变形后的关系式中, 求出另一个未知数的值. ⑤把求得的 x 、 y 的值用 “{” 联立起来, 就是方程组的解.

(2) 用加减法解二元一次方程组的一般步骤: ①方程组的两个方程中, 如果同一个未知数的系数既不相等又不互为相反数, 就用适当的数去乘方程的两边, 使某一个未知数的系数相等或互为相反数. ②把两个方程的两边分别相减或相加, 消去一个未知数, 得到一个一元一次方程. ③解这个一元一次方程, 求得未知数的值. ④将求出的未知数的值代入原方程组的任意一个方程中, 求出另一个未知数的值. ⑤把所求得两个未知数的值写在一起, 就得到原方程组的解, 用 $\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$ 的形式表示.

15. 一元一次不等式的应用

(1) 由实际问题中的不等关系列出不等式, 建立解决问题的数学模型, 通过解不等式可以得到实际问题的答案.

(2) 列不等式解应用题需要以“至少”、“最多”、“不超过”、“不低于”等词来体现问题中的不等关系. 因此, 建立不等式要善于从“关键词”中挖掘其内涵.

(3) 列一元一次不等式解决实际问题的方法和步骤:

- ① 弄清题中数量关系, 用字母表示未知数.
- ② 根据题中的不等关系列出不等式.
- ③ 解不等式, 求出解集.
- ④ 写出符合题意的解.

16. 坐标与图形性质

1、点到坐标轴的距离与这个点的坐标是有区别的, 表现在两个方面: ①到 x 轴的距离与纵坐标有关, 到 y 轴的距离与横坐标有关; ②距离都是非负数, 而坐标可以是负数, 在由距离求坐标时, 需要加上恰当的符号.

2、有图形中一些点的坐标求面积时, 过已知点向坐标轴作垂线, 然后求出相关的线段长, 是解决这类问题的基本方法和规律.

3、若坐标系内的四边形是非规则四边形, 通常用平行于坐标轴的辅助线用“割、补”法去解决问题.

17. 反比例函数与一次函数的交点问题

反比例函数与一次函数的交点问题

(1) 求反比例函数与一次函数的交点坐标, 把两个函数关系式联立成方程组求解, 若方程组有解则两者有交点, 方程组无解, 则两者无交点.

(2) 判断正比例函数 $y=k_1x$ 和反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 在同一直角坐标系中的交点个数可总结为:

- ① 当 k_1 与 k_2 同号时, 正比例函数 $y=k_1x$ 和反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 在同一直角坐标系中有 2 个交点;
- ② 当 k_1 与 k_2 异号时, 正比例函数 $y=k_1x$ 和反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 在同一直角坐标系中有 0 个交点.

18. 二次函数图象上点的坐标特征

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的图象是抛物线, 顶点坐标是 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$.

① 抛物线是关于对称轴 $x = -\frac{b}{2a}$ 成轴对称, 所以抛物线上的点关于对称轴对称, 且都满足

函数关系式. 顶点是抛物线的最高点或最低点.

② 抛物线与 y 轴交点的纵坐标是函数解析中的 c 值.

③ 抛物线与 x 轴的两个交点关于对称轴对称, 设两个交点分别是 $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$,

则其对称轴为 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

19. 二次函数综合题

(1) 二次函数图象与其他函数图象相结合问题

解决此类问题时, 先根据给定的函数或函数图象判断出系数的符号, 然后判断新的函数关系式中系数的符号, 再根据系数与图象的位置关系判断出图象特征, 则符合所有特征的图象即为正确选项.

(2) 二次函数与方程、几何知识的综合应用

将函数知识与方程、几何知识有机地结合在一起. 这类试题一般难度较大. 解这类问题关键是善于将函数问题转化为方程问题, 善于利用几何图形的有关性质、定理和二次函数的知识, 并注意挖掘题目中的一些隐含条件.

(3) 二次函数在实际生活中的应用题

从实际问题中分析变量之间的关系, 建立二次函数模型. 关键在于观察、分析、创建, 建立直角坐标系下的二次函数图象, 然后数形结合解决问题, 需要注意的是自变量及函数的取值范围要使实际问题有意义.

20. 三角形的面积

(1) 三角形的面积等于底边长与高线乘积的一半, 即 $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \times \text{底} \times \text{高}$.

(2) 三角形的中线将三角形分成面积相等的两部分.

21. 全等三角形的判定与性质

(1) 全等三角形的判定是结合全等三角形的性质证明线段和角相等的重要工具. 在判定三角形全等时, 关键是选择恰当的判定条件.

(2) 在应用全等三角形的判定时, 要注意三角形间的公共边和公共角, 必要时添加适当辅助线构造三角形.

22. 等腰直角三角形

(1) 两条直角边相等的直角三角形叫做等腰直角三角形.

(2) 等腰直角三角形是一种特殊的三角形, 具有所有三角形的性质, 还具备等腰三角形和直角三角形的所有性质. 即: 两个锐角都是 45° , 斜边上中线、角平分线、斜边上的高, 三线合一, 等腰直角三角形斜边上的高为外接圆的半径 R , 而高又为内切圆的直径 (因为等腰直角三角形的两个小角均为 45° , 高又垂直于斜边, 所以两个小三角形均为等腰直角三角形, 则两腰相等);

(3) 若设等腰直角三角形内切圆的半径 $r=1$, 则外接圆的半径 $R=\sqrt{2}+1$, 所以 $r: R=1: \sqrt{2}+1$.

23. 三角形中位线定理

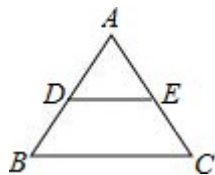
(1) 三角形中位线定理:

三角形的中位线平行于第三边, 并且等于第三边的一半.

(2) 几何语言:

如图, $\because$ 点 D 、 E 分别是 AB 、 AC 的中点

$$\therefore DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2}BC.$$



24. 多边形内角与外角

(1) 多边形内角和定理: $(n-2) \cdot 180$ ($n \geq 3$) 且 n 为整数)

此公式推导的基本方法是从 n 边形的一个顶点出发引出 $(n-3)$ 条对角线, 将 n 边形分割为 $(n-2)$ 个三角形, 这 $(n-2)$ 个三角形的所有内角之和正好是 n 边形的内角和. 除此方法之和还有其他几种方法, 但这些方法的基本思想是一样的. 即将多边形转化为三角形这也是研究多边形问题常用的方法.

(2) 多边形的外角和等于 360 度.

① 多边形的外角和指每个顶点处取一个外角, 则 n 边形取 n 个外角, 无论边数是几, 其外角和永远为 360° .

② 借助内角和和邻补角概念共同推出以下结论: 外角和 $= 180^\circ n - (n-2) \cdot 180^\circ = 360^\circ$.

25. 平行四边形的性质

(1) 平行四边形的概念: 有两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形.

(2) 平行四边形的性质:

- ① 边: 平行四边形的对边相等.
- ② 角: 平行四边形的对角相等.
- ③ 对角线: 平行四边形的对角线互相平分.

(3) 平行线间的距离处处相等.

(4) 平行四边形的面积:

- ① 平行四边形的面积等于它的底和这个底上的高的积.
- ② 同底 (等底) 同高 (等高) 的平行四边形面积相等.

26. 平行四边形的判定

(1) 两组对边分别平行的四边形是平行四边形. 符号语言: $\because AB \parallel DC, AD \parallel BC \therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

(2) 两组对边分别相等的四边形是平行四边形. 符号语言: $\because AB = DC, AD = BC \therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

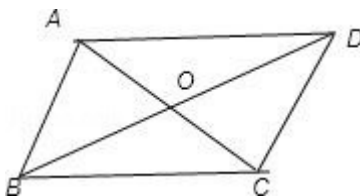
(3) 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

符号语言: $\because AB \parallel DC, AB = DC \therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

(4) 两组对角分别相等的四边形是平行四边形.

符号语言: $\because \angle ABC = \angle ADC, \angle DAB = \angle DCB \therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

(5) 对角线互相平分的四边形是平行四边形. 符号语言: $\because OA = OC, OB = OD \therefore$ 四边形



$ABCD$ 是平行四边形.

27. 矩形的性质

(1) 矩形的定义: 有一个角是直角的平行四边形是矩形.

(2) 矩形的性质

- ① 平行四边形的性质矩形都具有;
- ② 角: 矩形的四个角都是直角;
- ③ 边: 邻边垂直;
- ④ 对角线: 矩形的对角线相等;
- ⑤ 矩形是轴对称图形, 又是中心对称图形. 它有 2 条对称轴, 分别是每组对边中点连线所

在的直线; 对称中心是两条对角线的交点.

(3) 由矩形的性质, 可以得到直角三角形的一个重要性质, 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

28. 正方形的性质

(1) 正方形的定义: 有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形叫做正方形.

(2) 正方形的性质

- ① 正方形的四条边都相等, 四个角都是直角;
- ② 正方形的两条对角线相等, 互相垂直平分, 并且每条对角线平分一组对角;
- ③ 正方形具有四边形、平行四边形、矩形、菱形的一切性质.
- ④ 两条对角线将正方形分成四个全等的等腰直角三角形, 同时, 正方形又是轴对称图形, 有四条对称轴.

29. 圆心角、弧、弦的关系

(1) 定理: 在同圆和等圆中, 相等的圆心角所对的弧相等, 所对的弦也相等.

(2) 推论: 在同圆或等圆中, 如果两个圆心角、两条弧、两条弦中有一组量相等, 那么它们所对应的其余各组量都分别相等.

说明: 同一条弦对应两条弧, 其中一条是优弧, 一条是劣弧, 而在本定理和推论中的“弧”是指同为优弧或劣弧.

(3) 正确理解和使用圆心角、弧、弦三者的关系

三者关系可理解为: 在同圆或等圆中, ①圆心角相等, ②所对的弧相等, ③所对的弦相等, 三项“知一推二”, 一项相等, 其余二项皆相等. 这源于圆的旋转不变性, 即: 圆绕其圆心旋转任意角度, 所得图形与原图形完全重合.

(4) 在具体应用上述定理解决问题时, 可根据需要, 选择其有关部分.

30. 圆周角定理

(1) 圆周角的定义: 顶点在圆上, 并且两边都与圆相交的角叫做圆周角.

注意: 圆周角必须满足两个条件: ①顶点在圆上. ②角的两条边都与圆相交, 二者缺一不可.

(2) 圆周角定理: 在同圆或等圆中, 同弧或等弧所对的圆周角相等, 都等于这条弧所对的圆心角的一半.

推论: 半圆 (或直径) 所对的圆周角是直角, 90° 的圆周角所对的弦是直径.

(3) 在解圆的有关问题时, 常常需要添加辅助线, 构成直径所对的圆周角, 这种基本技能

技巧一定要掌握.

(4) 注意: ①圆周角和圆心角的转化可通过作圆的半径构造等腰三角形. 利用等腰三角形的顶点和底角的关系进行转化. ②圆周角和圆周角的转化可利用其“桥梁”——圆心角转化. ③定理成立的条件是“同一条弧所对的”两种角, 在运用定理时不要忽略了这个条件, 把不同弧所对的圆周角与圆心角错当成同一条弧所对的圆周角和圆心角.

31. 切线的性质

(1) 切线的性质

- ①圆的切线垂直于经过切点的半径.
- ②经过圆心且垂直于切线的直线必经过切点.
- ③经过切点且垂直于切线的直线必经过圆心.

(2) 切线的性质可总结如下:

如果一条直线符合下列三个条件中的任意两个, 那么它一定满足第三个条件, 这三个条件是: ①直线过圆心; ②直线过切点; ③直线与圆的切线垂直.

(3) 切线性质的运用

由定理可知, 若出现圆的切线, 必连过切点的半径, 构造定理图, 得出垂直关系. 简记作见切点, 连半径, 见垂直.

32. 扇形面积的计算

(1) 圆面积公式: $S = \pi r^2$

(2) 扇形: 由组成圆心角的两条半径和圆心角所对的弧所围成的图形叫做扇形.

(3) 扇形面积计算公式: 设圆心角是 n° , 圆的半径为 R 的扇形面积为 S , 则

$$S_{\text{扇形}} = \frac{n}{360} \pi R^2 \text{ 或 } S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2} l R \text{ (其中 } l \text{ 为扇形的弧长)}$$

(4) 求阴影面积常用的方法:

- ①直接用公式法;
- ②和差法;
- ③割补法.

(5) 求阴影面积的主要思路是将不规则图形面积转化为规则图形的面积.

33. 作图—复杂作图

复杂作图是在五种基本作图的基础上进行作图, 一般是结合了几何图形的性质和基本作图方法.

解决此类题目的关键是熟悉基本几何图形的性质, 结合几何图形的基本性质把复杂作图拆

解成基本作图, 逐步操作.

34. 轴对称图形

(1) 轴对称图形的概念:

如果一个图形沿一条直线折叠, 直线两旁的部分能够互相重合, 这个图形叫做轴对称图形. 这条直线叫做对称轴, 这时, 我们也可以说这个图形关于这条直线 (成轴) 对称.

(2) 轴对称图形是针对一个图形而言的, 是一种具有特殊性质图形, 被一条直线分割成的两部分沿着对称轴折叠时, 互相重合; 轴对称图形的对称轴可以是一条, 也可以是多条甚至无数条.

(3) 常见的轴对称图形:

等腰三角形, 矩形, 正方形, 等腰梯形, 圆等等.

35. 旋转的性质

(1) 旋转的性质:

—— ①对应点到旋转中心的距离相等. —— ②对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角. —— ③旋转前、后的图形全等. —— (2) 旋转三要素: ①旋转中心; ②旋转方向; ③旋转角度. —— 注意: 三要素中只要任意改变一个, 图形就会不一样.

36. 中心对称图形

(1) 定义

把一个图形绕某一点旋转 180° , 如果旋转后的图形能够与原来的图形重合, 那么这个图形就叫做中心对称图形, 这个点叫做对称中心.

注意: 中心对称图形和中心对称不同, 中心对称是两个图形之间的关系, 而中心对称图形是指一个图形自身的特点, 这点应注意区分, 它们性质相同, 应用方法相同.

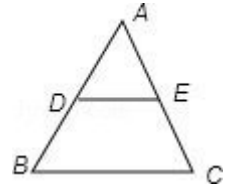
(2) 常见的中心对称图形

平行四边形、圆形、正方形、长方形等等.

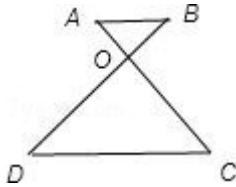
37. 相似三角形的判定

(1) 平行线法: 平行于三角形的一边的直线与其他两边相交, 所构成的三角形与原三角形相似;

这是判定三角形相似的一种基本方法. 相似的基本图形可分别记为 “A” 型和 “X” 型, 如



图所示在应用时要善于从复杂的图形中抽象出这些基本图形.



- (2) 三边法: 三组对应边的比相等的两个三角形相似;
- (3) 两边及其夹角法: 两组对应边的比相等且夹角对应相等的两个三角形相似;
- (4) 两角法: 有两组角对应相等的两个三角形相似.

38. 解直角三角形

- (1) 解直角三角形的定义

在直角三角形中, 由已知元素求未知元素的过程就是解直角三角形.

- (2) 解直角三角形要用到的关系

① 锐角直角的关系: $\angle A + \angle B = 90^\circ$;

② 三边之间的关系: $a^2 + b^2 = c^2$;

③ 边角之间的关系:

$\sin A = \angle A$ 的对边斜边 $= \frac{a}{c}$, $\cos A = \angle A$ 的邻边斜边 $= \frac{b}{c}$, $\tan A = \angle A$ 的对边 $\angle A$ 的邻边 $= \frac{a}{b}$.

(a, b, c 分别是 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边)

39. 简单组合体的三视图

- (1) 画简单组合体的三视图要循序渐进, 通过仔细观察和想象, 再画它的三视图.

(2) 视图中每一个闭合的线框都表示物体上的一个平面, 而相连的两个闭合线框常不在一个平面上.

- (3) 画物体的三视图的口诀为:

主、俯: 长对正;

主、左: 高平齐;

俯、左: 宽相等.

40. 总体、个体、样本、样本容量

(1) 定义

- ① 总体: 我们把所要考察的对象的全体叫做总体;
- ② 个体: 把组成总体的每一个考察对象叫做个体;
- ③ 样本: 从总体中取出的一部分个体叫做这个总体的一个样本;
- ④ 样本容量: 一个样本包括的个体数量叫做样本容量.

(2) 关于样本容量

样本容量只是个数字, 没有单位.

41. 用样本估计总体

用样本估计总体是统计的基本思想.

1、用样本的频率分布估计总体分布:

从一个总体得到一个包含大量数据的样本, 我们很难从一个个数字中直接看出样本所包含的信息. 这时, 我们用频率分布直方图来表示相应样本的频率分布, 从而去估计总体的分布情况.

2、用样本的数字特征估计总体的数字特征 (主要数据有众数、中位数、平均数、标准差与方差).

一般来说, 用样本去估计总体时, 样本越具有代表性、容量越大, 这时对总体的估计也就越精确.

42. 折线统计图

(1) 定义: 折线图是用一个单位表示一定的数量, 根据数量的多少描出各点, 然后把各点用线段依次连接起来. 以折线的上升或下降来表示统计数量增减变化.

(2) 特点: 折线图不但可以表示出数量的多少, 而且能够清楚地表示出数量的增减变化情况.

(3) 绘制折线图的步骤

- ① 根据统计资料整理数据.
- ② 先画纵轴, 后画横轴, 纵、横都要有单位, 按纸面的大小来确定用一定单位表示一定的数量. ————③ 根据数量的多少, 在纵、横轴的恰当位置描出各点, 然后把各点用线段顺序连接起来.

43. 加权平均数

(1) 加权平均数: 若 n 个数 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 的权分别是 $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$, 则 $x_1w_1+x_2w_2+\dots+x_nw_nw_1+w_2+\dots+w_n$ 叫做这 n 个数的加权平均数.

(2) 权的表现形式, 一种是比的形式, 如 4: 3: 2, 另一种是百分比的形式, 如创新占 50%, 综合知识占 30%, 语言占 20%, 权的大小直接影响结果.

(3) 数据的权能够反映数据的相对“重要程度”, 要突出某个数据, 只需要给它较大的“权”, 权的差异对结果会产生直接的影响.

(4) 对于一组不同权重的数据, 加权平均数更能反映数据的真实信息.

44. 方差

(1) 方差: 一组数据中各数据与它们的平均数的差的平方的平均数, 叫做这组数据的方差.

(2) 用“先平均, 再求差, 然后平方, 最后再平均”得到的结果表示一组数据偏离平均值的情况, 这个结果叫方差, 通常用 s^2 来表示, 计算公式是:

$$s^2 = \frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2] \quad (\text{可简单记忆为“方差等于差方的平均数”})$$

(3) 方差是反映一组数据的波动大小的一个量. 方差越大, 则平均值的离散程度越大, 稳定性也越小; 反之, 则它与其平均值的离散程度越小, 稳定性越好.

45. 列表法与树状图法

(1) 当试验中存在两个元素且出现的所有可能的结果较多时, 我们常用列表的方式, 列出所有可能的结果, 再求出概率.

(2) 列表的目的在于不重不漏地列举出所有可能的结果求出 n , 再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m , 求出概率.

(3) 列举法 (树形图法) 求概率的关键在于列举出所有可能的结果, 列表法是一种, 但当一事件涉及三个或更多元素时, 为不重不漏地列出所有可能的结果, 通常采用树形图.

(4) 树形图列举法一般是选择一个元素再和其他元素分别组合, 依次列出, 象树的枝丫形式, 最末端的枝丫个数就是总的可能的结果 n .

(5) 当有两个元素时, 可用树形图列举, 也可以列表列举.

46. 利用频率估计概率

(1) 大量重复实验时, 事件发生的频率在某个固定位置左右摆动, 并且摆动的幅度越来越小, 根据这个频率稳定性定理, 可以用频率的集中趋势来估计概率, 这个固定的近似值就是这个事件的概率.

(2) 用频率估计概率得到的是近似值, 随实验次数的增多, 值越来越精确.

(3) 当实验的所有可能结果不是有限个或结果个数很多, 或各种可能结果发生的可能性不相等时, 一般通过统计频率来估计概率.

