

2017 年江苏省无锡市中考数学试卷 (副卷)

一、选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分. 在每小题所给出的四个选项中, 只有一项是正确的, 请把正确的选项填在相应的括号内)

1. (3 分) (2017•无锡) $-\frac{1}{2}$ 的绝对值是 ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. -2

2. (3 分) (2017•无锡) 下列运算正确的是 ()

- A. $x^2+x^2=x^4$ B. $x^6 \div x^3=x^2$ C. $4x^3-3x^3=x^3$ D. $(x^3)^2=x^5$

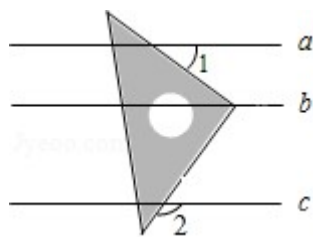
3. (3 分) (2017•无锡) 下列图形中, 是中心对称图形的是 ()



4. (3 分) (2017•无锡) 下列命题是真命题的是 ()

- A. 三个角相等的平行四边形是矩形
B. 对角线相等的四边形是矩形
C. 平行四边形的对角线互相垂直
D. 对角线互相垂直的四边形是菱形

5. (3 分) (2017•无锡) 如图, 直线 $a \parallel b \parallel c$, 直角三角板的直角顶点落在直线 b 上. 若 $\angle 1 = 35^\circ$, 则 $\angle 2$ 等于 ()



- A. 115° B. 125° C. 135° D. 145°

6. (3 分) (2017•无锡) 在圆中, 与半径相等的弦所对的圆心角的度数为 ()

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

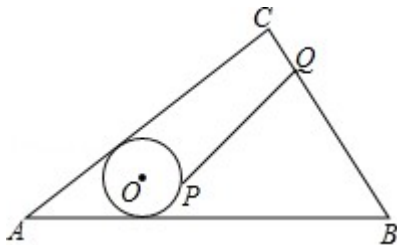
7. (3 分) (2017•无锡) 某班测量了 10 名学生的身高, 他们的身高与对应的人数如下表所示

身高 (cm)	163	165	170	172	173
---------	-----	-----	-----	-----	-----

学生人数 (人)	1	2	3	2	2
-------------	---	---	---	---	---

则这 10 名学生身高的众数和中位数分别为 ()

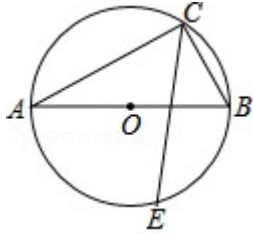
- A. 165cm, 165cm B. 170cm, 165cm
C. 165cm, 170cm D. 170cm, 170cm
8. (3分) (2017•无锡) 关于抛物线 $y = (x+1)^2 - 2$, 下列结论中正确的是 ()
- A. 对称轴为直线 $x=1$
B. 当 $x < -3$ 时, y 随 x 的增大而减小
C. 与 x 轴没有交点
D. 与 y 轴交于点 $(0, -2)$
9. (3分) (2017•无锡) 一块直角边分别为 3 和 4 的三角形木板, 绕长度为 3 的边旋转一周, 则斜边扫过的面积是 ()
- A. 15 B. 15π C. 20 D. 20π
10. (3分) (2017•无锡) 已知, 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB=10$, $BC=6$, $AC=8$, 半径为 1 的 $\odot O$ 与三角形的边 AB 、 AC 都相切, 点 P 为 $\odot O$ 上一动点, 点 Q 为 BC 边上一动点, 则 PQ 的最大值与最小值的和为 ()



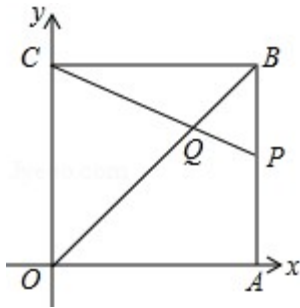
- A. 11 B. $5\sqrt{2}+4$ C. $5\sqrt{2}+5$ D. 12
- 二、填空题 (本大题共 8 小题, 每小题 2 分, 本大题共 16 分. 不需要写出解答过程, 只需把答案直接填写在相应的横线上)
11. (2分) (2017•无锡) 16 的算术平方根是_____.
12. (2分) (2017•无锡) 化简: $\frac{2-18x^2}{1+3x} =$ _____.
13. (2分) (2017•无锡) 我市火车站在今年端午节假期累计发送旅客 278000 人, 这个数据用科学记数法可表示为_____.
14. (2分) (2017•无锡) 函数 $y = \sqrt{x+3}$ 中, 自变量 x 的取值范围是_____.
15. (2分) (2017•无锡) 若关于 x 的一元二次方程 $x^2+x+k=0$ 有两个不相等的实数根,

则 k 的取值范围是_____.

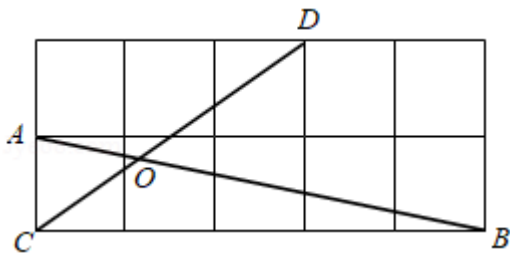
16. (2分) (2017•无锡) 如图, 已知 AB 为 $\odot O$ 的直径, C 为半圆上异于 A 、 B 的一个动点, $\angle ACB$ 的平分线与 $\odot O$ 交于点 E , 若圆的半径为 2 时, 则 $\widehat{AE}$ 的长度为_____.



17. (2分) (2017•无锡) 如图, 在平面直角坐标系中, 正方形 $OABC$ 的顶点 $A(2, 0)$ 、 $C(0, 2)$, 点 Q 在对角线 OB 上, 且 $QO = OC$, 连结 CQ 并延长交边 AB 于点 P , 则四边形 $OAPQ$ 的面积为_____.



18. (2分) (2017•无锡) 在如图的正方形格点纸中, 每个小的四边形都是边长为 1 的正方形, A 、 B 、 C 、 D 都是格点, AB 与 CD 相交于 O , 则 $AO:OB =$ _____.



三、解答题 (本大题共 10 小题, 共 84 分. 请在试卷相应的区域内作答, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

19. (8分) (2017•无锡) 计算:

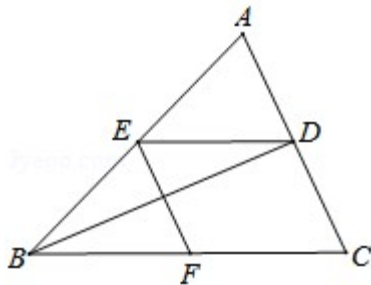
(1) $|-2\sqrt{3}| - \sqrt{12} + (\frac{1}{3})^{-2}$;

(2) $(x-2)^2 - (x+2)(x-2)$.

20. (8分) (2017•无锡) (1) 解不等式: $\frac{1}{2}(x-1) > 2+3x$;

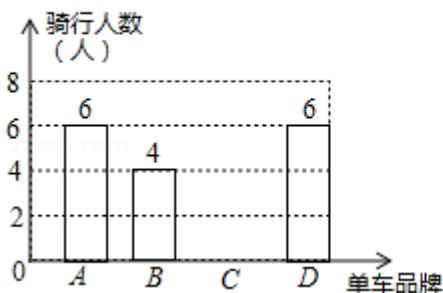
(2) 解方程组: $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+3y=13 \end{cases}$.

21. (8分) (2017•无锡) 如图, 已知点 E 、 F 分别在边 AB 、 BC 上, $ED \parallel BC$, $EF \parallel AC$, $BE = CF$. 求证: BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线.

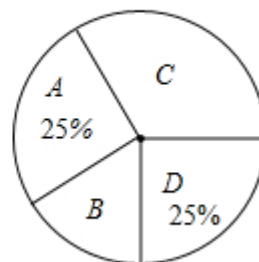


22. (6分) (2017•无锡) 某数学课外学习小组为统计某小区共享单车的使用情况, 对 A 、 B 、 C 、 D 四种共享单车品牌的骑行人数进行了调查, 并绘制了如下的两张不完整的统计图.

骑行人数条形统计图



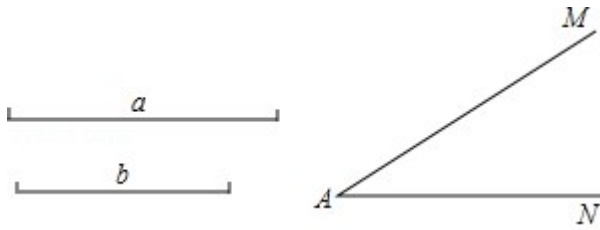
骑行人数扇形统计图



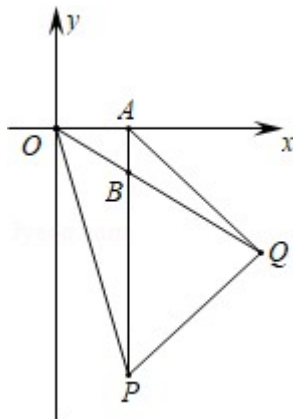
- (1) 扇形统计图中, B 、 C 品牌单车骑行人数所占圆心角的度数分别为_____和_____;
- (2) 请把条形统计图补充完整;
- (3) 若该小区习惯使用共享单车的有 120 人, 请你估算使用 B 型品牌单车的人数约是多少人?

23. (8分) (2017•无锡) 甲、乙、丙三人进行羽毛球比赛, 他们通过摸球的方式决定首场比赛的两个选手: 在一个不透明的口袋中放入两个红球和一个白球, 它们除颜色外其他都相同, 将它们搅匀, 三人从中各摸出一个球, 摸到红球的两人即为首场比赛选手. 求甲、乙两人成为比赛选手的概率. (请用画树状图或列表等方法写出分析过程并给出结果)

24. (8分) (2017•无锡) 如图, 已知 $\angle MAN$, 及线段 a, b ($a > b$).

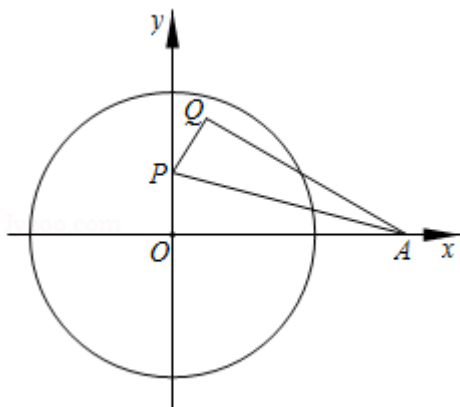


- (1) 仅用没有刻度的直尺和圆规分别在射线 AM 、 AN 上确定点 B 、点 C , 使得 $AC = b$, $AB + BC = a$ (保留作图痕迹, 不要作法);
- (2) 若 $\sin \angle MAN = \frac{5}{13}$, $a = 61$, $b = 39$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.
25. (8分) (2017•无锡) 如图, P 是平面直角坐标系中第四象限内一点, 过点 P 作 $PA \perp x$ 轴于点 A , 以 AP 为斜边在右侧作等腰 $\text{Rt}\triangle APQ$, 已知直角顶点 Q 的纵坐标为 -2 , 连结 OQ 交 AP 于 B , $BQ = 2OB$.
- (1) 求点 P 的坐标;
- (2) 连结 OP , 求 $\triangle OPQ$ 的面积与 $\triangle OAQ$ 的面积之比.



26. (10分) (2017•无锡) 某品牌牛奶专营店销售一款牛奶, 售价是在进价的基础上加价 $a\%$ 出售, 每月的销售额可以达到9.6万元, 但每月需支出2.45万元的固定费用及进价的2.5%的其他费用.
- (1) 如果该款牛奶每月所获的利润要达到1万元, 那么 a 的值是多少? (利润 = 售价 - 进价 - 固定费用 - 其他费用)
- (2) 现这款牛奶的售价为64元/盒, 根据市场调查, 这款牛奶如果售价每降低1%, 销售量将上升8%, 求这款牛奶调价销售后, 每月可获的最大利润.
27. (10分) (2017•无锡) 如图, 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(5, 0)$, 以原点 O

为圆心、3 为半径作圆. P 从点 O 出发, 以每秒 1 个单位的速度沿 y 轴正半轴运动, 运动时间为 t (s). 连结 AP , 将 $\triangle OAP$ 沿 AP 翻折, 得到 $\triangle APQ$. 求 $\triangle APQ$ 有一边所在直线与 $\odot O$ 相切时 t 的值.



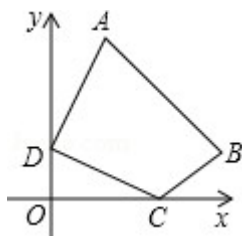
28. (10 分) (2017• 无锡) 在平面直角坐标系中, 已知 $A(1, 4)$ 、 $B(4, 1)$ 、 $C(m, 0)$ 、 $D(0, n)$.

(1) 四边形 $ABCD$ 的周长的最小值为____, 此时四边形 $ABCD$ 的形状为____;

(2) 在 (1) 的情况下, P 为 AB 的中点, E 为 AD 上一动点, 连结 PE , 作 $PF \perp PE$ 交四边形的边于点 F , 在点 E 从 D 运动到 A 的过程中:

① 求 $\tan \angle PEF$ 的值;

② 若 EF 的中点为 Q , 在整个运动过程中, 请直接写出点 Q 所经过的路线长.



2017 年江苏省无锡市中考数学试卷 (副卷)

参考答案与试题解析

一、选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分. 在每小题所给出的四个选项中, 只有一项是正确的, 请把正确的选项填在相应的括号内)

1. (3 分) (2017•无锡) $-\frac{1}{2}$ 的绝对值是 ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. -2

【考点】15: 绝对值.

【分析】根据一个负数的绝对值是它的相反数进行解答即可.

【解答】解: $|- \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$,

故选: B.

【点评】本题考查的是绝对值的性质, 掌握一个正数的绝对值是它本身; 一个负数的绝对值是它的相反数; 0 的绝对值是 0 是解题的关键.

2. (3 分) (2017•无锡) 下列运算正确的是 ()

- A. $x^2 + x^2 = x^4$ B. $x^6 \div x^3 = x^2$ C. $4x^3 - 3x^3 = x^3$ D. $(x^3)^2 = x^5$

【考点】35: 合并同类项; 47: 幂的乘方与积的乘方; 48: 同底数幂的除法.

【专题】512: 整式.

【分析】直接利用合并同类项法则以及同底数幂的乘除运算法则、幂的乘方运算法则分别化简得出答案.

【解答】解: A、 $x^2 + x^2 = 2x^2$, 故此选项错误;

B、 $x^6 \div x^3 = x^3$, 故此选项错误;

C、 $4x^3 - 3x^3 = x^3$, 故此选项正确;

D、 $(x^3)^2 = x^6$, 故此选项错误;

故选: C.

【点评】此题主要考查了合并同类项以及同底数幂的乘除运算、幂的乘方运算, 正确掌握相关运算法则是解题关键.

3. (3 分) (2017•无锡) 下列图形中, 是中心对称图形的是 ()



【考点】R5: 中心对称图形.

【专题】558: 平移、旋转与对称.

【分析】根据中心对称图形定义: 把一个图形绕某一点旋转 180° , 如果旋转后的图形能够与原来的图形重合, 那么这个图形就叫做中心对称图形, 这个点叫做对称中心进行解答即可.

【解答】解: A、不是中心对称图形, 故此选项错误;

B、不是中心对称图形, 故此选项错误;

C、是中心对称图形, 故此选项正确;

D、不是中心对称图形, 故此选项错误;

故选: C.

【点评】此题主要考查了中心对称图形, 关键是掌握中心对称图形定义.

4. (3 分) (2017•无锡) 下列命题是真命题的是 ()

A. 三个角相等的平行四边形是矩形

B. 对角线相等的四边形是矩形

C. 平行四边形的对角线互相垂直

D. 对角线互相垂直的四边形是菱形

【考点】O1: 命题与定理.

【专题】556: 矩形 菱形 正方形.

【分析】根据菱形的判定方法, 矩形的判定方法以及平行四边形的性质对各选项分析判断即可得解.

【解答】解: A、三个角相等的平行四边形是矩形, 是真命题;

B、对角线相等的平行四边形是矩形, 是假命题;

C、平行四边形的对角线互相平分, 是假命题;

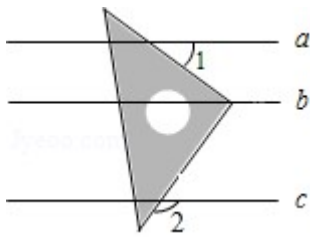
D、对角线互相垂直的平行四边形是菱形, 是假命题;

故选: A.

【点评】本题主要考查命题的真假判断, 正确的命题叫真命题, 错误的命题叫做假命题, 本题熟练掌握菱形, 矩形以及平行四边形的判定和性质是解题的关键.

5. (3 分) (2017•无锡) 如图, 直线 $a \parallel b \parallel c$, 直角三角板的直角顶点落在直线 b 上. 若

$\angle 1 = 35^\circ$, 则 $\angle 2$ 等于 ()



- A. 115° B. 125° C. 135° D. 145°

【考点】JA: 平行线的性质.

【专题】551: 线段、角、相交线与平行线.

【分析】先根据 $a \parallel b$ 求出 $\angle 3$ 的度数, 再由余角的性质得出 $\angle 4$ 的度数, 进而得到 $\angle 5$ 的度数, 根据 $b \parallel c$ 即可得出结论.

【解答】解: 如图所示, $\because a \parallel b$,

$$\therefore \angle 3 = \angle 1 = 35^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle 3 + \angle 4 = 90^\circ,$$

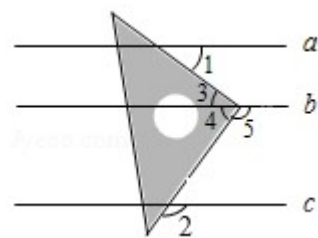
$$\therefore \angle 4 = 55^\circ,$$

$$\therefore \angle 5 = 180^\circ - \angle 4 = 125^\circ,$$

$$\text{又} \because b \parallel c,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 5 = 125^\circ,$$

故选: B.



【点评】本题考查的是平行线的性质, 用到的知识点为: 两直线平行, 内错角相等; 两直线平行, 同位角相等.

6. (3分) (2017•无锡) 在圆中, 与半径相等的弦所对的圆心角的度数为 ()

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

【考点】M4: 圆心角、弧、弦的关系.

【专题】559: 圆的有关概念及性质.

【分析】画出符合题意的几何图形, 证明 $\triangle OAB$ 是等边三角形即可得到此弦所对圆心角的度数.

数据从小到大 (或从大到小) 重新排列后, 最中间的那个数 (最中间两个数的平均数), 叫做这组数据的中位数.

8. (3 分) (2017•无锡) 关于抛物线 $y = (x+1)^2 - 2$, 下列结论中正确的是 ()

- A. 对称轴为直线 $x=1$
- B. 当 $x < -3$ 时, y 随 x 的增大而减小
- C. 与 x 轴没有交点
- D. 与 y 轴交于点 $(0, -2)$

【考点】H3: 二次函数的性质; HA: 抛物线与 x 轴的交点.

【专题】535: 二次函数图象及其性质.

【分析】直接利用二次函数的性质分别分析得出答案.

【解答】解: 抛物线 $y = (x+1)^2 - 2$, 对称轴为直线 $x = -1$, 故此选项 A 错误;

当 $x < -1$ 时, y 随 x 的增大而减小, 故选项 B 正确;

$\because$ 抛物线 $y = (x+1)^2 - 2$, 开口向上, 顶点坐标为: $(-1, -2)$,

$\therefore$ 与 x 轴有 2 个交点, 故选项 C 错误;

当 $x=0$ 时, $y = -1$, 故图象与 y 轴交于点 $(0, -1)$, 故选项 D 错误.

故选: B.

【点评】此题主要考查了抛物线于 x 轴的交点以及二次函数的性质, 正确掌握二次函数的性质是解题关键.

9. (3 分) (2017•无锡) 一块直角边分别为 3 和 4 的三角形木板, 绕长度为 3 的边旋转一周, 则斜边扫过的面积是 ()

- A. 15
- B. 15π
- C. 20
- D. 20π

【考点】MO: 扇形面积的计算.

【专题】55C: 与圆有关的计算.

【分析】先利用勾股定理得到斜边为 5, 由于三角形木板绕 3 的边旋转一周所得的几何体为圆锥, 圆锥的底面圆的半径为 4, 母线长为 5, 斜边扫过的面积就是圆锥的侧面积, 然后利用扇形面积公式计算出圆锥的侧面即可.

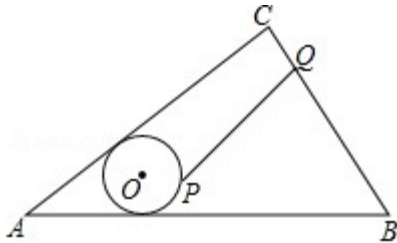
【解答】解: 直角边分别为 3 和 4 的三角形木板的斜边为 5, 三角形木板绕长度为 3 的边旋转一周所得的几何体为圆锥, 圆锥的底面圆的半径为 4, 母线长为 5, 此圆锥的侧面积 $= \pi \times 4 \times 5 = 20\pi$.

所以斜边扫过的面积为 20π .

故选: D.

【点评】本题考查了圆锥的侧面积的计算：圆锥的侧面积 $=\pi rl$ （ r 为底面圆的半径， l 为母线长）。

10. (3分) (2017•无锡) 已知，如图， $\triangle ABC$ 中， $AB=10$ ， $BC=6$ ， $AC=8$ ，半径为1的 $\odot O$ 与三角形的边 AB 、 AC 都相切，点 P 为 $\odot O$ 上一动点，点 Q 为 BC 边上一动点，则 PQ 的最大值与最小值的和为（ ）



- A. 11 B. $5\sqrt{2}+4$ C. $5\sqrt{2}+5$ D. 12

【考点】KS：勾股定理的逆定理；MC：切线的性质.

【专题】55A：与圆有关的位置关系.

【分析】如图，设 $\odot O$ 与 AC 相切于点 D ，与 AB 相切于点 E ，连接 OD ， OE ，过点 O ，作 $OP_1 \perp BC$ 垂足为 Q_1 交 $\odot O$ 于 P_1 ，此时垂线段 OQ_1 最短， P_1Q_1 最小值为 $OQ_1 - OP_1$ ，求出 OQ_1 ，如图当 Q_2 与 B 重合时， BO 的延长线与 $\odot O$ 交于点 P_2 ， P_2Q_2 最大值 $OQ_2 + OP_2$.

【解答】解： $\because \triangle ABC$ 中， $AB=10$ ， $BC=6$ ， $AC=8$ ，

$$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

设 $\odot O$ 与 AC 相切于点 D ，与 AB 相切于点 E ，连接 OD ， OE ，过点 O ，作 $OP_1 \perp BC$ 垂足为 Q_1 交 $\odot O$ 于 P_1 ，连接 AO ，延长 AO 与 BC 相交于点 F ，过 F 作 $FG \perp AB$ 于点 G ，如图1，此时垂线段 OQ_1 最短， P_1Q_1 最小值为 $OQ_1 - OP_1$ ，

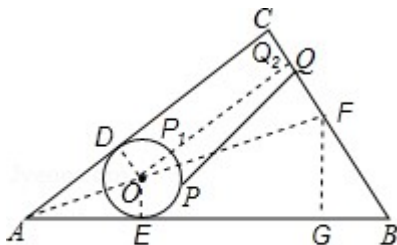


图1

则四边形 $ODCQ_2$ 为矩形， AO 平分 $\angle BAC$ ，

$$\therefore CF=FG,$$

设 $CF=FG=x$, 则 $BF=6-x$, $AC=AG=8$, $BG=AB-AG=10-8=2$,

由勾股定理得, $(6-x)^2 - x^2 = 2^2$,

$$\text{解得, } x = \frac{8}{3},$$

$$\therefore GF = \frac{8}{3},$$

$$\because OE \parallel GF,$$

$$\therefore \triangle AOE \sim \triangle AFG,$$

$$\therefore \frac{OE}{FG} = \frac{AE}{AG}, \text{ 即 } \frac{1}{\frac{8}{3}} = \frac{AE}{8},$$

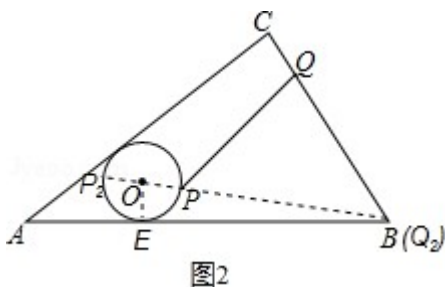
$$\therefore AE=3,$$

$$\therefore AF=AE=3,$$

$$\therefore OQ_1 = CD = 8 - 3 = 5,$$

$$\therefore P_1Q_1 = OQ_1 - OP_1 = 5 - 1 = 4,$$

如图2, 当 Q_2 与 B 重合时, 连接 BO 延长 BO 与 $\odot O$ 交于点 P_2 ,



此时 P_2Q_2 为最大值 $P_2Q_2 = OQ_2 + OP_2 \sqrt{OE^2 + BE^2} + 1 = \sqrt{1^2 + (10-3)^2} + 1 = 5\sqrt{2} + 1$,

$$\therefore PQ \text{ 的最大值与最小值的和为: } P_1Q_1 + P_2Q_2 = 4 + 5\sqrt{2} + 1 = 5\sqrt{2} + 5.$$

故选: C.

【点评】本题是圆与三角形的综合题, 考查了圆的切线的性质, 矩形的性质与判定, 勾股定理的应用, 相似三角形的性质与判定, 切割线定理, 关键是确定 PQ 的最小值与最大值的位置.

二、填空题 (本大题共 8 小题, 每小题 2 分, 本大题共 16 分. 不需要写出解答过程, 只需把答案直接填写在相应的横线上)

11. (2 分) (2017·无锡) 16 的算术平方根是 4.

【考点】22: 算术平方根.

【专题】11: 计算题.

【分析】根据算术平方根的定义即可求出结果.

【解答】解: $\because 4^2 = 16$,

$$\therefore \sqrt{16} = 4.$$

故答案为: 4.

【点评】此题主要考查了算术平方根的定义. 一个正数的算术平方根就是其正的平方根.

12. (2分) (2017•无锡) 化简: $\frac{2-18x^2}{1+3x} = \underline{2-6x}$.

【考点】66: 约分.

【专题】513: 分式.

【分析】对于分子分母是多项式的分式, 先因式分解, 再约分.

【解答】解: $\frac{2-18x^2}{1+3x} = \frac{2(1-3x)(1+3x)}{1+3x} = 2-6x$,

故答案为: $2-6x$

【点评】本题考查了约分, 熟悉因式分解是解题的关键.

13. (2分) (2017•无锡) 我市火车站在今年端午节假期累计发送旅客 278000 人, 这个数据用科学记数法可表示为 $\underline{2.78 \times 10^5}$.

【考点】11: 科学记数法—表示较大的数.

【专题】511: 实数.

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 10 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

【解答】解: $278000 = 2.78 \times 10^5$,

故答案为: 2.78×10^5

【点评】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

14. (2分) (2017•无锡) 函数 $y = \sqrt{x+3}$ 中, 自变量 x 的取值范围是 $\underline{x \geq -3}$.

【考点】E4: 函数自变量的取值范围.

【分析】根据被开方数大于等于 0 列式计算即可得解.

【解答】解: 由题意得, $x+3 \geq 0$,

解得 $x \geq -3$.

故答案为: $x \geq -3$.

【点评】本题考查了函数自变量的范围, 一般从三个方面考虑:

- (1) 当函数表达式是整式时, 自变量可取全体实数;
- (2) 当函数表达式是分式时, 考虑分式的分母不能为0;
- (3) 当函数表达式是二次根式时, 被开方数非负.

15. (2分) (2017•无锡) 若关于 x 的一元二次方程 $x^2+x+k=0$ 有两个不相等的实数根,

则 k 的取值范围是 $k < \frac{1}{4}$.

【考点】AA: 根的判别式.

【专题】45: 判别式法; 511: 实数; 521: 一次方程(组)及应用.

【分析】利用一元二次方程的根判别式即可求解

【解答】解:

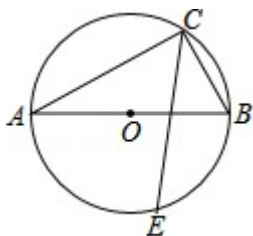
$\because$ 一元二次方程 $x^2+x+k=0$ 有两个不相等的实数根

$\therefore$ 由根的判别式得, $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4k > 0$, 解得 $k < \frac{1}{4}$,

故答案为 $k < \frac{1}{4}$

【点评】此题主要考查一元二次方程的根的判别式: 在一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 中 (1) 当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; (2) 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根; (3) 当 $\Delta < 0$ 时, 方程没有实数根, 方程有两个共轭虚根. (1) 和 (2) 合起来: 当 $\Delta \geq 0$ 时, 方程有实数根.

16. (2分) (2017•无锡) 如图, 已知 AB 为 $\odot O$ 的直径, C 为半圆上异于 A 、 B 的一个动点, $\angle ACB$ 的平分线与 $\odot O$ 交于点 E , 若圆的半径为2时, 则 $\widehat{AE}$ 的长度为 π .



【考点】M5: 圆周角定理; MN: 弧长的计算.

【分析】由圆周角定理得出 $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle AOE = 2\angle ACE = 90^\circ$, 由弧长公式即可得出结

果.

【解答】解: 连接 OE , 如图所示:

$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$,

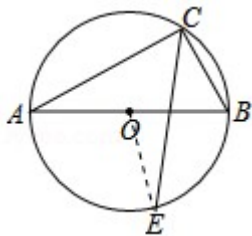
$\because \angle ACB$ 的平分线与 $\odot O$ 交于点 E ,

$\therefore \angle ACE = \frac{1}{2} \angle ACB = 45^\circ$,

$\therefore \angle AOE = 2 \angle ACE = 90^\circ$,

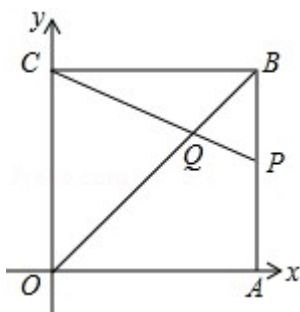
$\therefore \widehat{AE}$ 的长度为 $\frac{90\pi \times 2}{180} = \pi$;

故答案为: π .



【点评】本题主要考查了弧长的计算、圆周角定理; 熟记弧长公式, 熟练掌握圆周角定理是解题的关键.

17. (2分) (2017•无锡) 如图, 在平面直角坐标系中, 正方形 $OABC$ 的顶点 $A(2, 0)$ 、 $C(0, 2)$, 点 Q 在对角线 OB 上, 且 $QO = OC$, 连结 CQ 并延长交边 AB 于点 P , 则四边形 $OAPQ$ 的面积为 $6 - 3\sqrt{2}$.



【考点】D5: 坐标与图形性质; KD: 全等三角形的判定与性质; LE: 正方形的性质.

【专题】556: 矩形 菱形 正方形; 67: 推理能力.

【分析】先证明 $BP = BQ = 2\sqrt{2} - 2$, 得到 AP 长度, 最后利用四边形 $OAPQ$ 面积 = 梯形 $OAPC$ 面积 - $\triangle COQ$ 面积, 即可求解.

【解答】解: $\because$ 四边形 $OABC$ 是正方形, $OC = 2$,

$$\therefore BO = 2\sqrt{2}.$$

$$\because QO = OC = 2,$$

$$\therefore BQ = 2\sqrt{2} - 2.$$

又 $OC \parallel AB$,

$$\therefore BP = BQ = 2\sqrt{2} - 2.$$

$$\therefore AP = 2 - BP = 4 - 2\sqrt{2}.$$

在 $\triangle COQ$ 中, $\angle COQ = 45^\circ$, $OQ = 2$,

$$\therefore Q \text{ 点到 } OC \text{ 距离为 } \sqrt{2}.$$

四边形 $OAPQ$ 面积 = 梯形 $OAPC$ 面积 - $\triangle COQ$ 面积

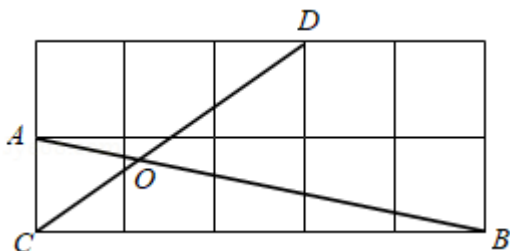
$$= \frac{1}{2} (4 - 2\sqrt{2} + 2) \times 2 - \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2 = 6 - 3\sqrt{2}.$$

故答案为 $6 - 3\sqrt{2}$.

【点评】 本题主要考查了正方形的性质, 解题的关键是求解不规则图形面积时, 要找到与其相关的规则图形, 利用面积间的和差关系进行解决.

18. (2分) (2017•无锡) 在如图的正方形格点纸中, 每个小的四边形都是边长为 1 的正

方形, A 、 B 、 C 、 D 都是格点, AB 与 CD 相交于 O , 则 $AO:OB = \frac{3}{10}$.



【考点】 KQ: 勾股定理; S9: 相似三角形的判定与性质.

【专题】 55D: 图形的相似.

【分析】 如图, 由 $EH \parallel CF$, 利用平行线分线段成比例可求出 $EH = \frac{3}{2}$, 则 $AE = \frac{3}{2}$, 再证

明 $\triangle AOE \sim \triangle BOC$, 然后利用相似比可得到 $\frac{AO}{OB}$ 的值.

【解答】 解: 如图,

$$\because EH \parallel CF,$$

$$\therefore \frac{EH}{CF} = \frac{DH}{DF}, \text{ 即 } \frac{EH}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore EH = \frac{3}{2},$$

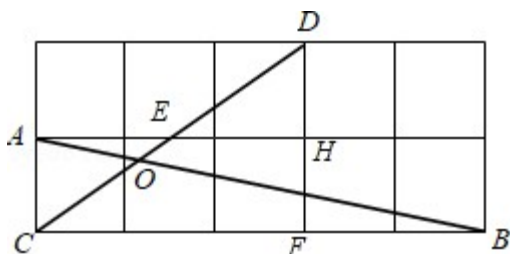
$$\therefore AE = AH - EH = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\because AE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle AOE \sim \triangle BOC,$$

$$\therefore \frac{AO}{OB} = \frac{AE}{BC} = \frac{\frac{3}{2}}{5} = \frac{3}{10}.$$

故答案为 $\frac{3}{10}$.



【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质：三在判定两个三角形相似时，应注意利用图形中已有的公共角、公共边等隐含条件，以充分发挥基本图形的作用，寻找相似三角形的一般方法是通过作平行线构造相似三角形；灵活运用相似三角形的性质表示线段之间的关系.

三、解答题（本大题共 10 小题，共 84 分．请在试卷相应的区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

19. （8 分）（2017•无锡）计算：

$$(1) \quad |-2\sqrt{3}| - \sqrt{12} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2};$$

$$(2) \quad (x-2)^2 - (x+2)(x-2).$$

【考点】2C：实数的运算；4C：完全平方公式；4F：平方差公式；6F：负整数指数幂.

【专题】512：整式；514：二次根式.

【分析】（1）根据实数的运算法则计算即可；

（2）根据平方差和完全平方公式计算即可.

【解答】解：（1） $|-2\sqrt{3}| - \sqrt{12} + (\frac{1}{3})^{-2} = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 9 = 9$ ；

（2） $(x-2)^2 - (x+2)(x-2) = x^2 - 4x + 4 - x^2 + 4 = -4x + 8$ ．

【点评】本题考查了平方差和完全平方公式，实数的运算，熟记乘法公式是解题的关键．

20. （8分）（2017•无锡）（1）解不等式： $\frac{1}{2}(x-1) > 2+3x$ ；

（2）解方程组： $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+3y=13 \end{cases}$ ．

【考点】98：解二元一次方程组；C6：解一元一次不等式．

【专题】524：一元一次不等式(组)及应用．

【分析】（1）根据解一元一次不等式基本步骤：去括号、移项、系数化为1可得．

（2）利用加减消元法求解即可．

【解答】解：（1）： $\frac{1}{2}(x-1) > 2+3x$ ，

去分母，得： $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} > 2+3x$ ，

移项、合并，得： $-\frac{5}{2}x > \frac{5}{2}$ ，

系数化为1，得： $x < -1$ ；

（2） $\begin{cases} x+y=5 \text{ ①} \\ 2x+3y=13 \text{ ②} \end{cases}$

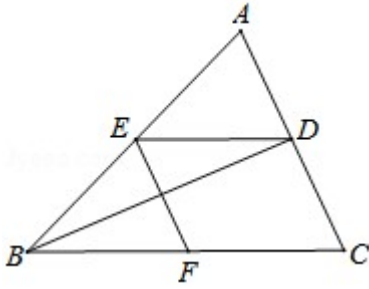
② - ①×2 得 $y=3$ ，

把 $y=3$ 代入①得 $x=2$ ，

所以方程组的解为 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ ．

【点评】本题主要考查解一元一次不等式的基本能力，严格遵循解不等式的基本步骤是关键；也考查了解二元一次方程组．

21. （8分）（2017•无锡）如图，已知点 E 、 F 分别在边 AB 、 BC 上， $ED \parallel BC$ ， $EF \parallel AC$ ， $BE=CF$ ．求证： BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线．



【考点】KH：等腰三角形的性质；L7：平行四边形的判定与性质．

【专题】555：多边形与平行四边形．

【分析】先证明四边形 $EFCD$ 是平行四边形，得 $ED=CF$ ，再证明 $\triangle BED$ 是等腰三角形，得 $\angle EBD=\angle EDB$ ，再由平行线的性质得结果．

【解答】证明： $\because ED \parallel BC, EF \parallel AC$,

$\therefore$ 四边形 $EFCD$ 是平行四边形，

$\therefore ED=CF$,

$\because BE=CF$,

$\therefore BE=ED$,

$\therefore \angle EBD=\angle EDB$,

$\because ED \parallel BC$,

$\therefore \angle EDB=\angle DBC$,

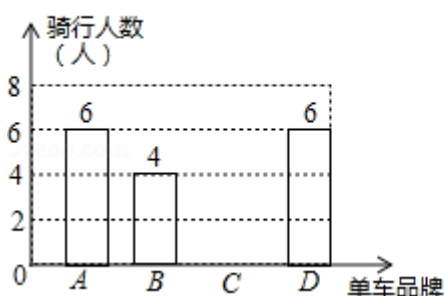
$\therefore \angle EBD=\angle DBC$,

$\therefore BD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线．

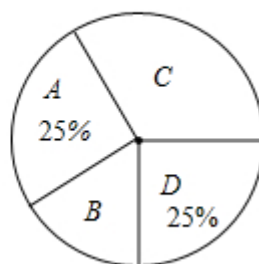
【点评】本题考查平行四边形的判定和性质、等腰三角形的判定和性质等知识，解题的关键是灵活运用直线知识解决问题，属于基础题，中考常考题型．

22. (6分) (2017•无锡) 某数学课外学习小组为统计某小区共享单车的使用情况，对 A 、 B 、 C 、 D 四种共享单车品牌的骑行人数进行了调查，并绘制了如下的两张不完整的统计图．

骑行人数条形统计图



骑行人数扇形统计图



- (1) 扇形统计图中, B 、 C 品牌单车骑行人数所占圆心角的度数分别为 60° 和 120° ;
- (2) 请把条形统计图补充完整;
- (3) 若该小区习惯使用共享单车的有 120 人, 请你估算使用 B 型品牌单车的人数约是多少人?

【考点】V5: 用样本估计总体; VB: 扇形统计图; VC: 条形统计图.

【专题】542: 统计的应用.

【分析】(1) 先由 A 的人数及其所占百分比求出总人数, 再求出 C 的人数, 继而用 360° 乘以对应人数所占比例即可得;

(2) 根据以上所求数据即可补全条形图;

(3) 用总人数乘以样本中 B 的人数所占比例即可得.

【解答】解: (1) $\because$ 被调查的总人数为 $6 \div 25\% = 24$ (人),
 $\therefore C$ 单车人数为 $24 - (6 + 4 + 6) = 8$ (人),

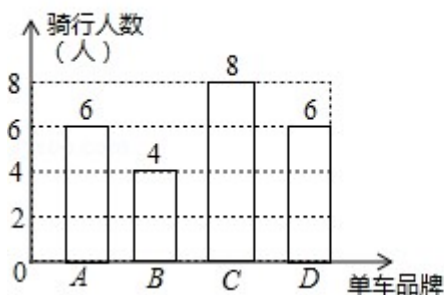
则 B 品牌单车骑行人数所占圆心角的度数为 $360^\circ \times \frac{4}{24} = 60^\circ$,

C 品牌单车骑行人数所占圆心角的度数为 $360^\circ \times \frac{8}{24} = 120^\circ$,

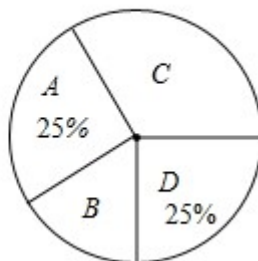
故答案为: 60° , 120° ;

(2) 补全条形图如下:

骑行人数条形统计图



骑行人数扇形统计图



(3) 估算使用 B 型品牌单车的人数约是 $120 \times \frac{4}{24} = 20$ (人)。

【点评】 本题考查条形统计图, 扇形统计图, 样本估计总体的思想等知识, 解题的关键是熟练掌握基本知识, 属于中考常考题型。

23. (8 分) (2017·无锡) 甲、乙、丙三人进行羽毛球比赛, 他们通过摸球的方式决定首场比赛的两个选手: 在一个不透明的口袋中放入两个红球和一个白球, 它们除颜色外其他都相同, 将它们搅匀, 三人从中各摸出一个球, 摸到红球的两人即为首场比赛选手. 求甲、乙两人成为比赛选手的概率. (请用画树状图或列表等方法写出分析过程并给出结果)

【考点】 X6: 列表法与树状图法.

【专题】 543: 概率及其应用.

【分析】 画树状图展示所有 6 种等可能的结果数, 再找出甲、丙两人成为比赛选手的结果数, 然后根据概率公式求解.

【解答】 解: 画树状图为:

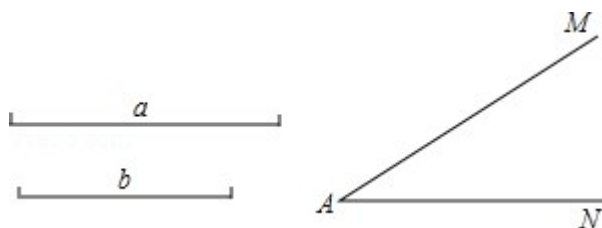


由树状图知, 共有 6 种等可能的结果数, 其中甲、丙两人成为比赛选手的结果有 2 种,

所以甲、丙两人成为比赛选手的概率 $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

【点评】 本题考查了列表法与树状图法: 利用列表法或树状图法展示所有等可能的结果 n , 再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m , 然后利用概率公式求事件 A 或 B 的概率.

24. (8分) (2017•无锡) 如图, 已知 $\angle MAN$, 及线段 a, b ($a > b$).



(1) 仅用没有刻度的直尺和圆规分别在射线 AM 、 AN 上确定点 B 、点 C , 使得 $AC=b$, $AB+BC=a$ (保留作图痕迹, 不要作法);

(2) 若 $\sin \angle MAN = \frac{5}{13}$, $a=61$, $b=39$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 330.

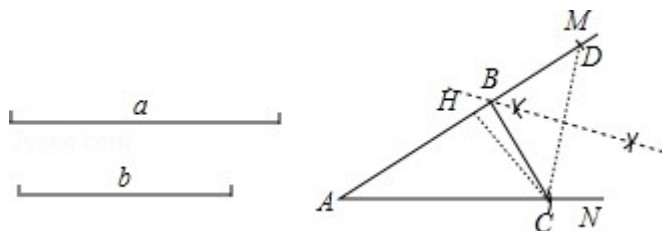
【考点】K3: 三角形的面积; N3: 作图—复杂作图; T7: 解直角三角形.

【专题】13: 作图题.

【分析】(1) 在 AN 上截取 $AC=b$, AM 上截取 $AD=a$, 连接 CD , 作 CD 的垂直平分线交 AD 于 B , 则点 B 、 C 为所作;

(2) 作 $CH \perp AB$ 于 H , 如图, 先利用三角函数的定义计算出 $CH=15$, 则根据勾股定理可得到 $AH=36$, 所以 $HD=25$, 设 $BH=x$, 则 $BD=CD=25-x$, 利用勾股定理得到 $15^2+x^2=(25-x)^2$, 解方程求出 x 得到 BH 的长, 然后根据三角形面积公式计算即可.

【解答】解: (1) 如图, $\triangle ABC$ 为所作;



(2) 作 $CH \perp AB$ 于 H , 如图,

$$\text{在 Rt}\triangle ACH \text{ 中, } \sin \angle A = \frac{CH}{AC} = \frac{CH}{39} = \frac{5}{13},$$

$$\therefore CH=15,$$

$$\therefore AH = \sqrt{39^2 - 15^2} = 36,$$

$$\therefore HD = 61 - 36 = 25,$$

设 $BH=x$, 则 $BD=CD=25-x$,

$$\text{在 Rt}\triangle BCH \text{ 中, } 15^2 + x^2 = (25-x)^2,$$

解得 $x=8$,

$$\therefore AB = AH + BH = 44,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \times 44 \times 15 = 330.$$

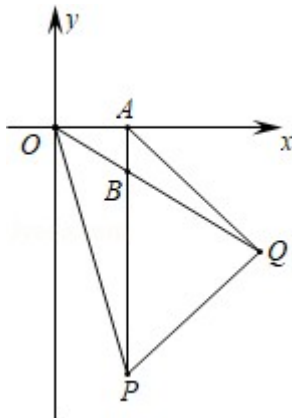
故答案为 330.

【点评】本题考查了作图 - 复杂作图：复杂作图是在五种基本作图的基础上进行作图，一般是结合了几何图形的性质和基本作图方法．解决此类题目的关键是熟悉基本几何图形的性质，结合几何图形的基本性质把复杂作图拆解成基本作图，逐步操作．

25. (8分) (2017•无锡) 如图, P 是平面直角坐标系中第四象限内一点, 过点 P 作 $PA \perp x$ 轴于点 A , 以 AP 为斜边在右侧作等腰 $\text{Rt}\triangle APQ$, 已知直角顶点 Q 的纵坐标为 -2, 连结 OQ 交 AP 于 B , $BQ = 2OB$.

(1) 求点 P 的坐标;

(2) 连结 OP , 求 $\triangle OPQ$ 的面积与 $\triangle OAQ$ 的面积之比.



【考点】D5：坐标与图形性质；KW：等腰直角三角形；S9：相似三角形的判定与性质．

【专题】55D：图形的相似．

【分析】(1) 过 Q 作 $QC \perp x$ 轴于 C , 根据等腰直角三角形的性质得到 $\angle PAQ = \angle CAQ = 45^\circ$, 求得 $AC = QC = 2$, $AQ = 2\sqrt{2}$, $AP = 4$, 根据平行线分线段成比例定理即可得到结论;

(2) 由 $AB \parallel CQ$, 得到 $\triangle OAB \sim \triangle OCQ$, 根据相似三角形的性质得到 $AB = \frac{1}{3}CQ = \frac{2}{3}$,

求得 $PB = \frac{10}{3}$, 根据三角形的面积公式即可得到结论.

【解答】解：（1）过 Q 作 $QC \perp x$ 轴于 C ，

$\because \triangle APQ$ 是等腰直角三角形，

$\therefore \angle PAQ = \angle CAQ = 45^\circ$ ，

$\therefore AC = QC = 2$ ， $AQ = 2\sqrt{2}$ ， $AP = 4$ ，

$\because AB \parallel CQ$ ，

$\therefore \frac{OA}{AC} = \frac{OB}{BQ} = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore OA = \frac{1}{2}AC = 1$ ，

$\therefore$ 点 P 的坐标 $(1, -4)$ ；

（2） $\because AB \parallel CQ$ ，

$\therefore \triangle OAB \sim \triangle OCQ$ ，

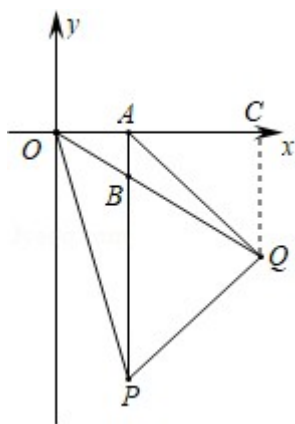
$\therefore \frac{AB}{CQ} = \frac{OB}{OQ} = \frac{1}{3}$ ，

$\therefore AB = \frac{1}{3}CQ = \frac{2}{3}$ ，

$\therefore PB = \frac{10}{3}$ ，

$\therefore S_{\triangle OAQ} = \frac{1}{2}OA \cdot CQ = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$ ， $S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2}PB \cdot OA + \frac{1}{2}PB \cdot AC = 5$ ，

$\therefore \triangle OPQ$ 的面积与 $\triangle OAQ$ 的面积之比 $= 5$ 。



【点评】本题考查了相似三角形的判定和性质，等腰直角三角形的判定和性质，三角形的面积的计算，正确的作出辅助线是解题的关键。

26. （10分）（2017•无锡）某品牌牛奶专营店销售一款牛奶，售价是在进价的基础上加

价 $a\%$ 出售, 每月的销售额可以达到 9.6 万元, 但每月需支出 2.45 万元的固定费用及进价的 2.5% 的其他费用.

(1) 如果该款牛奶每月所获的利润要达到 1 万元, 那么 a 的值是多少? (利润 = 售价 - 进价 - 固定费用 - 其他费用)

(2) 现这款牛奶的售价为 64 元/盒, 根据市场调查, 这款牛奶如果售价每降低 1%, 销售量将上升 8%, 求这款牛奶调价销售后, 每月可获的最大利润.

【考点】 B7: 分式方程的应用; HE: 二次函数的应用.

【专题】 522: 分式方程及应用; 536: 二次函数的应用.

【分析】 (1) 根据利润 = 销售收入 - (进货成本 + 固定费用 + 其它费用), 即可得出关于 a 的分式方程, 解之经检验后即可得出结论;

(2) 列出二次函数的解析式后求最值即可.

【解答】 解: 依题意, 得: $96000 - \left(\frac{96000}{1+a\%} + 24500 + \frac{96000}{1+a\%} \times 2.5\% \right) = 10000$,

解得: $a=60$,

经检验, $a=60$ 是原方程的解, 且符合题意.

答: a 的值是 60.

(2) 牛奶的进价为: $\frac{64}{1.6} = 40$ 元/盒, 所进盒数为 $\frac{96000}{64} = 1500$ 盒,

设新售价调整为 x 元/盒, 则新的盒数为: $\left(\frac{64-x}{64} \times 8 + 1 \right) \times 1500$ 盒,

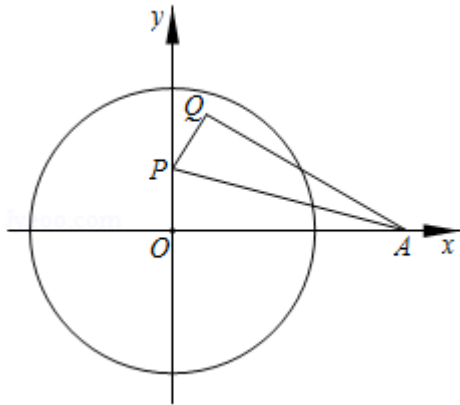
由题意得调整后的总利润 $w = (x - 40) \left(\frac{64-x}{64} \times 8 + 1 \right) \times 1500 - 24500 - \frac{96000}{1.6} \times 2.5\%$
 $= -187.5(x - 56)^2 + 2200$,

$\therefore$ 当 $x=56$ 时, w 的最大值为 22000,

答: 当新的售价调整为 56 元/盒时, 可获得最大利润为 22000 元.

【点评】 本题考查了分式方程的应用及二次函数的应用的知识, 找准等量关系, 正确列出分式方程和二次函数的解析式是解题的关键.

27. (10 分) (2017•无锡) 如图, 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(5, 0)$, 以原点 O 为圆心、3 为半径作圆. P 从点 O 出发, 以每秒 1 个单位的速度沿 y 轴正半轴运动, 运动时间为 t (s). 连结 AP , 将 $\triangle OAP$ 沿 AP 翻折, 得到 $\triangle APQ$. 求 $\triangle APQ$ 有一边所在直线与 $\odot O$ 相切时 t 的值.



【考点】MC：切线的性质；P6：坐标与图形变化 - 对称；PB：翻折变换（折叠问题）.

【专题】559：圆的有关概念及性质.

【分析】分三种情况，先求得 OQ ，进而根据三角形面积公式求得 AP ，然后根据勾股定理列出方程，解方程即可.

【解答】解：当 AQ 与 $\odot O$ 相切时，如图 1，

设 AQ 切 $\odot O$ 于点 D ，连接 OQ ，交 AP 于 M ，连接 OD ，

$\because AD$ 切 $\odot O$ 于点 D ，

$\therefore OD \perp AQ$ ， $OD=3$ ，

$\because OA=5$ ，

$\therefore AD=4$ ，

$\because A(5, 0)$ ，

$OA=AQ=5$ ，

$\therefore QD=1$ ，

$\therefore OQ = \sqrt{QD^2 + OD^2} = \sqrt{10}$ ，

$\because$ 将 $\triangle OAP$ 沿 AP 翻折，得到 $\triangle APQ$ ．

$\therefore OQ \perp AP$ ， $OM = MQ = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ，

$\because OP=t$ ， $OA=5$ ，

$\therefore \frac{1}{2}AP \cdot OM = \frac{1}{2}OA \cdot OP$ ，即 $\frac{1}{2}AP \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot t$ ，

$\therefore AP = \sqrt{10}t$ ，

在 $Rt\triangle AOP$ 中， $AP^2 = OP^2 + OA^2$ ，解 $10t^2 = t^2 + 25$ ，

$$\text{解得 } t = \frac{5}{3};$$

当 AP 与 $\odot O$ 相切时, 如图 2,

设 AP 切 $\odot O$ 于点 E , 连接 OQ ,

$\because$ 将 $\triangle OAP$ 沿 AP 翻折, 得到 $\triangle APQ$.

$$\therefore OQ \perp AP,$$

$\therefore OQ$ 经过点 E ,

$$\therefore OE \perp AP,$$

$$\because \frac{1}{2}AP \cdot OE = \frac{1}{2}OA \cdot OP, \text{ 即 } 3AP = 5t,$$

$$\therefore AP = \frac{5}{3}t,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AOP \text{ 中, } AP^2 = OP^2 + OA^2, \text{ 解 } \left(\frac{5}{3}t\right)^2 = t^2 + 25,$$

$$\text{解得 } t = \frac{15}{4},$$

当 PQ 与 $\odot O$ 相切时, 如图 3,

设 PQ 切 $\odot O$ 于点 E , 连接 OE ,

$$\therefore OE \perp PQ,$$

$$\because AQ \perp PQ,$$

$$\therefore OE \parallel AQ,$$

$$\therefore \triangle ODE \sim \triangle ADQ,$$

$$\therefore \frac{OE}{AQ} = \frac{OD}{OD+OA}, \text{ 即 } \frac{3}{5} = \frac{OD}{OD+5},$$

$$\therefore OD = \frac{15}{2},$$

$$\therefore AD = \frac{25}{2},$$

$$\therefore DQ = \sqrt{AD^2 - AQ^2} = \frac{5\sqrt{21}}{2},$$

$$\therefore PD = DQ - PQ = \frac{5\sqrt{21}}{2} - t,$$

$$\because \frac{1}{2}OD \cdot OP = \frac{1}{2}PD \cdot OE,$$

解得 $t = \frac{5\sqrt{21}}{7}$

Figure 3 shows a circle centered at the origin O of a Cartesian coordinate system. A line segment PQ is tangent to the circle at point E . Point P is on the y -axis, and point Q is in the first quadrant. A line segment AQ is drawn, and a line segment DQ is drawn, where D is on the x -axis. A dashed line segment OE connects the origin to the point of tangency E .

图3

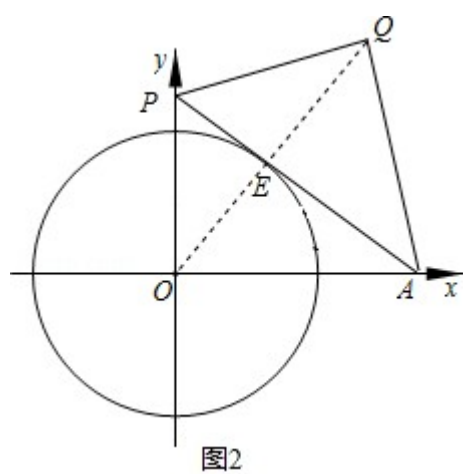


圖2

(2) ①作 $FG \perp AB$ 于 G , 则 $FG = AD = \sqrt{2}$, 证明 $\triangle PFG \sim \triangle EPA$, 得出 $\frac{PF}{PE} = \frac{FG}{AP} =$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}}{\frac{2}{2}} = \frac{2}{3}, \text{ 再由三角函数定义即可得出结果;}$$

②点 Q 所经过的路线是一条线段, 当点 E 在 D 点位置时, EF 的中点为 Q , 当点 E 在 A 点位置时, EF 的中点为 Q' , 此时, Q' 为 PD 的中点, 得出 QQ' 为 $\triangle PDF$ 的中位线,

$$QQ' = \frac{1}{2}PF, QQ' \text{ 的长即为点 } Q \text{ 所经过的路线长, 作 } FG \perp AB \text{ 于 } G, \text{ 则 } FG = AD = \sqrt{2},$$

证明 $\triangle PFG \sim \triangle DPA$, 得出 $\frac{PG}{AD} = \frac{FG}{PA}$, 即 $\frac{PG}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$, 得出 $PG = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 由勾股定理求

$$\text{出 } PF = \sqrt{PG^2 + FG^2} = \frac{\sqrt{26}}{3}, \text{ 即可得出答案.}$$

【解答】解: (1) 过点 A 作 A 关于 y 轴的对称点 A' 、过点 B 关于 x 轴的对称点 B' , 连接 $A'B'$, 直线 $A'B'$ 与坐标轴交点分别为 D' 、 C' , 如图 1 所示:

此时四边形 $ABCD'$ 的周长最小, 即为四边形 $ABCD$ 的周长的最小值.

设过 A' 与 B' 两点的直线的函数解析式为 $y = kx + b$.

$$\because A(1, 4), B(4, 1),$$

$$\therefore A'(-1, 4), B'(4, -1),$$

$$\text{依题意得: } \begin{cases} 4 = -k + b \\ -1 = 4k + b \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -1 \\ b = 3 \end{cases},$$

$$\therefore \text{过 } A' \text{ 与 } B' \text{ 两点的直线的函数解析式为 } y = -x + 3,$$

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时, } x = 3; \text{ 当 } x = 0 \text{ 时, } y = 3, ;$$

$$\therefore C'(3, 0), D'(0, 3);$$

$$\therefore AD' = \sqrt{1^2 + (4-3)^2} = \sqrt{2}, BC' = \sqrt{(4-3)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, AD' = BC', AB =$$

$$\sqrt{(4-1)^2 + (4-1)^2} = 3\sqrt{2}, CD' = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2},$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD'$ 的周长为 $\sqrt{2} + \sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$;

$\because AB = CD', AD' = BC,$

$\therefore$ 四边形 $ABCD'$ 是平行四边形,

$\because BM = 1, OM = 4, OC = 3,$

$\therefore CM = 1 = BM,$

$\therefore \triangle BCM$ 是等腰直角三角形,

$\therefore \angle BCM = 45^\circ,$

同理: $\angle OCD' = 45^\circ,$

$\therefore \angle BCD' = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ,$

$\therefore$ 四边形 $ABCD'$ 是矩形;

故答案为: $8\sqrt{2}$, 矩形;

(2) ① $\because P$ 为 AB 的中点,

$$\therefore AP = \frac{1}{2}AB = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

作 $FG \perp AB$ 于 G , 如图 2 所示:

则 $FG = AD = \sqrt{2}$, $\angle FGP = 90^\circ = \angle A$, $\angle FPG + \angle PFG = 90^\circ$,

$\because \angle EPF = 90^\circ,$

$\therefore \angle FPG + \angle APE = 90^\circ,$

$\therefore \angle PFG = \angle APE,$

$\therefore \triangle PFG \sim \triangle EPA,$

$$\therefore \frac{PF}{PE} = \frac{FG}{AP} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \tan \angle PEF = \frac{PF}{PE} = \frac{2}{3};$$

② 若 EF 的中点为 Q , 在整个运动过程中, 点 Q 所经过的路线是一条线段.

当点 E 在 D 点位置时, EF 的中点为 Q ,

当点 E 在 A 点位置时, EF 的中点为 Q' , 此时, Q' 为 PD 的中点,

$\therefore QQ'$ 为 $\triangle PDF$ 的中位线,

$\therefore QQ' = \frac{1}{2}PF$, QQ' 的长即为点 Q 所经过的路线长,

作 $FG \perp AB$ 于 G , 如图 3 所示:

则 $FG=AD=\sqrt{2}$, $\angle FGP=90^\circ=\angle A$, $\angle FPG+\angle PFG=90^\circ$,

$\therefore \angle EPF=90^\circ$,

$\therefore \angle FPG+\angle APD=90^\circ$,

$\therefore \angle PFG=\angle APD$,

$\therefore \triangle PFG \sim \triangle DPA$,

$$\therefore \frac{PG}{AD} = \frac{FG}{PA}, \text{ 即 } \frac{PG}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}},$$

$$\text{解得: } PG = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore PF = \sqrt{PG^2 + FG^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{26}}{3},$$

$$\therefore QQ' = \frac{\sqrt{26}}{6},$$

即点 Q 所经过的路线长为 $\frac{\sqrt{26}}{6}$.

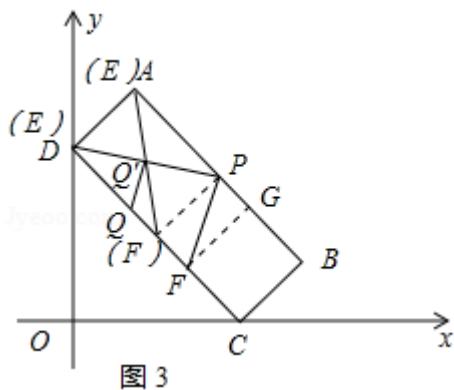


图 3

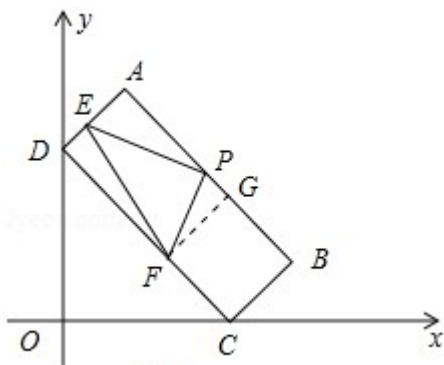
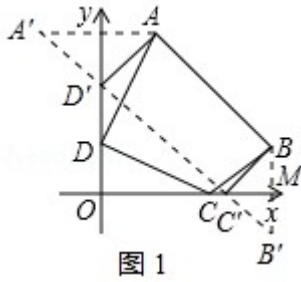


图 2



【点评】本题是四边形综合题目，考查了矩形的判定、轴对称的性质、等腰直角三角形的判定与性质、勾股定理、平行四边形的判定、相似三角形的判定与性质、三角形中位线定理、三角函数等知识；本题综合性强，有一定难度，证明三角形相似是解题的关键.

考点卡片

1. 绝对值

(1) 概念: 数轴上某个数与原点的距离叫做这个数的绝对值.

- ① 互为相反数的两个数绝对值相等;
- ② 绝对值等于一个正数的数有两个, 绝对值等于 0 的数有一个, 没有绝对值等于负数的数.
- ③ 有理数的绝对值都是非负数.

(2) 如果用字母 a 表示有理数, 则数 a 绝对值要由字母 a 本身的取值来确定:

- ① 当 a 是正有理数时, a 的绝对值是它本身 a ;
- ② 当 a 是负有理数时, a 的绝对值是它的相反数 $-a$;
- ③ 当 a 是零时, a 的绝对值是零.

即 $|a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$

2. 科学记数法—表示较大的数

(1) 科学记数法: 把一个大于 10 的数记成 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 a 是整数数位只有一位的数, n 是正整数, 这种记数法叫做科学记数法. 【科学记数法形式: $a \times 10^n$, 其中 $1 \leq a < 10$, n 为正整数.】

(2) 规律方法总结:

- ① 科学记数法中 a 的要求和 10 的指数 n 的表示规律为关键, 由于 10 的指数比原来的整数位数少 1; 按此规律, 先数一下原数的整数位数, 即可求出 10 的指数 n .
- ② 记数法要求是大于 10 的数可用科学记数法表示, 实质上绝对值大于 10 的负数同样可用此法表示, 只是前面多一个负号.

3. 算术平方根

(1) 算术平方根的概念: 一般地, 如果一个正数 x 的平方等于 a , 即 $x^2 = a$, 那么这个正数 x 叫做 a 的算术平方根. 记为 $\sqrt{a}$.

(2) 非负数 a 的算术平方根 $\sqrt{a}$ 有双重非负性: ①被开方数 a 是非负数; ②算术平方根 $\sqrt{a}$ 本身是非负数.

(3) 求一个非负数的算术平方根与求一个数的平方互为逆运算, 在求一个非负数的算术平方根时, 可以借助乘方运算来寻找.

4. 实数的运算

(1) 实数的运算和在有理数范围内一样, 值得一提的是, 实数既可以进行加、减、乘、除、

乘方运算, 又可以进行开方运算, 其中正实数可以开平方.

(2) 在进行实数运算时, 和有理数运算一样, 要从高级到低级, 即先算乘方、开方, 再算乘除, 最后算加减, 有括号的要先算括号里面的, 同级运算要按照从左到右的顺序进行. 另外, 有理数的运算律在实数范围内仍然适用.

【规律方法】实数运算的“三个关键”

1. 运算法则: 乘方和开方运算、幂的运算、指数 (特别是负整数指数, 0 指数) 运算、根式运算、特殊三角函数值的计算以及绝对值的化简等.
2. 运算顺序: 先乘方, 再乘除, 后加减, 有括号的先算括号里面的, 在同一级运算中要从左到右依次运算, 无论何种运算, 都要注意先定符号后运算.
3. 运算律的使用: 使用运算律可以简化运算, 提高运算速度和准确度.

5. 合并同类项

(1) 定义: 把多项式中同类项合成一项, 叫做合并同类项.

(2) 合并同类项的法则: 把同类项的系数相加, 所得结果作为系数, 字母和字母的指数不变.

(3) 合并同类项时要注意以下三点:

- ① 要掌握同类项的概念, 会辨别同类项, 并准确地掌握判断同类项的两条标准: 带有相同系数的代数项; 字母和字母指数;
- ② 明确合并同类项的含义是把多项式中的同类项合并成一项, 经过合并同类项, 式的项数会减少, 达到化简多项式的目的;
- ③ “合并”是指同类项的系数的相加, 并把得到的结果作为新的系数, 要保持同类项的字母和字母的指数不变.

6. 幂的乘方与积的乘方

(1) 幂的乘方法则: 底数不变, 指数相乘.

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (m, n \text{ 是正整数})$$

注意: ① 幂的乘方的底数指的是幂的底数; ② 性质中“指数相乘”指的是幂的指数与乘方的指数相乘, 这里注意与同底数幂的乘法中“指数相加”的区别.

(2) 积的乘方法则: 把每一个因式分别乘方, 再把所得的幂相乘.

$$(ab)^n = a^n b^n \quad (n \text{ 是正整数})$$

注意: ① 因式是三个或三个以上积的乘方, 法则仍适用; ② 运用时数字因数的乘方应根据乘方的意义, 计算出最后的结果.

7. 同底数幂的除法

同底数幂的除法法则：底数不变，指数相减.

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0, m, n \text{ 是正整数}, m > n)$$

- ① 底数 $a \neq 0$ ，因为 0 不能做除数；
- ② 单独的一个字母，其指数是 1，而不是 0；
- ③ 应用同底数幂除法的法则时，底数 a 可是单项式，也可以多项式，但必须明确底数是什么，指数是什么.

8. 完全平方公式

$$(1) \text{ 完全平方公式: } (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

可巧记为：“首平方，末平方，首末两倍中间放”.

(2) 完全平方公式有以下几个特征：① 左边是两个数的和的平方；② 右边是一个三项式，其中首末两项分别是两项的平方，都为正，中间一项是两项积的 2 倍；其符号与左边的运算符号相同.

(3) 应用完全平方公式时，要注意：① 公式中的 a, b 可是单项式，也可以多项式；② 对形如两数和（或差）的平方的计算，都可以用这个公式；③ 对于三项的可以把其中的两项看做一项后，也可以用完全平方公式.

9. 平方差公式

(1) 平方差公式：两个数的和与这两个数的差相乘，等于这两个数的平方差.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

(2) 应用平方差公式计算时，应注意以下几个问题：

- ① 左边是两个二项式相乘，并且这两个二项式中有一项完全相同，另一项互为相反数；
- ② 右边是相同项的平方减去相反项的平方；
- ③ 公式中的 a 和 b 可以是具体数，也可以是单项式或多项式；
- ④ 对形如两数和与这两数差相乘的算式，都可以运用这个公式计算，且会比用多项式乘以多项式法则简便.

10. 约分

(1) 约分的定义：约去分式的分子与分母的公因式，不改变分式的值，这样的分式变形叫做分式的约分.

(2) 确定公因式要分为系数、字母、字母的指数来分别确定.

- ① 分式约分的结果可能是最简分式，也可能是整式.
- ② 当分子与分母含有负号时，一般把负号提到分式本身的前面.

③ 约分时, 分子与分母都必须是乘积式, 如果是多项式的, 必须先分解因式.

(3) 规律方法总结: 由约分的概念可知, 要首先将分子、分母转化为乘积的形式, 再找出分子、分母的最大公因式并约去, 注意不要忽视数字系数的约分.

11. 负整数指数幂

负整数指数幂: $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ ($a \neq 0$, p 为正整数)

注意: ① $a \neq 0$;

② 计算负整数指数幂时, 一定要根据负整数指数幂的意义计算, 避免出现 $(-3)^{-2} = (-3) \times (-2)$ 的错误.

③ 当底数是分数时, 只要把分子、分母颠倒, 负指数就可变为正指数.

④ 在混合运算中, 始终要注意运算的顺序.

12. 解二元一次方程组

(1) 用代入法解二元一次方程组的一般步骤: ①从方程组中选一个系数比较简单的方程, 将这个方程组中的一个未知数用含另一个未知数的代数式表示出来. ②将变形后的关系式代入另一个方程, 消去一个未知数, 得到一个一元一次方程. ③解这个一元一次方程, 求出 x (或 y) 的值. ④将求得的未知数的值代入变形后的关系式中, 求出另一个未知数的值. ⑤把求得的 x 、 y 的值用 “{” 联立起来, 就是方程组的解.

(2) 用加减法解二元一次方程组的一般步骤: ①方程组的两个方程中, 如果同一个未知数的系数既不相等又不互为相反数, 就用适当的数去乘方程的两边, 使某一个未知数的系数相等或互为相反数. ②把两个方程的两边分别相减或相加, 消去一个未知数, 得到一个一元一次方程. ③解这个一元一次方程, 求得未知数的值. ④将求出的未知数的值代入原方程组的任意一个方程中, 求出另一个未知数的值. ⑤把所求得两个未知数的值写在一起, 就得到原方程组的解, 用 $\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$ 的形式表示.

13. 根的判别式

利用一元二次方程根的判别式 ($\Delta = b^2 - 4ac$) 判断方程的根的情况.

一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系:

① 当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的两个实数根;

② 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的两个实数根;

③ 当 $\Delta < 0$ 时, 方程无实数根.

上面的结论反过来也成立.

14. 分式方程的应用

1、列分式方程解应用题的一般步骤：设、列、解、验、答。

必须严格按照这 5 步进行做题，规范解题步骤，另外还要注意完整性：如设和答叙述要完整，要写出单位等。

2、要掌握常见问题中的基本关系，如行程问题：速度 = 路程 / 时间；工作量问题：工作效率 = 工作量 / 工作时间
等等。

列分式方程解应用题一定要审清题意，找相等关系是着眼点，要学会分析题意，提高理解能力。

15. 解一元一次不等式

根据不等式的性质解一元一次不等式

基本操作方法与解一元一次方程基本相同，都有如下步骤：①去分母；②去括号；③移项；④合并同类项；⑤化系数为 1。

以上步骤中，只有①去分母和⑤化系数为 1 可能用到性质 3，即可能变不等号方向，其他都不会改变不等号方向。

注意：符号“ $\geq$ ”和“ $\leq$ ”分别比“ $>$ ”和“ $<$ ”各多了一层相等的含义，它们是不等号与等号合写形式。

16. 坐标与图形性质

1、点到坐标轴的距离与这个点的坐标是有区别的，表现在两个方面：①到 x 轴的距离与纵坐标有关，到 y 轴的距离与横坐标有关；②距离都是非负数，而坐标可以是负数，在由距离求坐标时，需要加上恰当的符号。

2、有图形中一些点的坐标求面积时，过已知点向坐标轴作垂线，然后求出相关的线段长，是解决这类问题的基本方法和规律。

3、若坐标系内的四边形是非规则四边形，通常用平行于坐标轴的辅助线用“割、补”法去解决问题。

17. 函数自变量的取值范围

自变量的取值范围必须使含有自变量的表达式都有意义。

- ① 当表达式的分母不含有自变量时，自变量取全体实数。例如 $y = 2x + 13$ 中的 x 。
- ② 当表达式的分母中含有自变量时，自变量取值要使分母不为零。例如 $y = x + 2x - 1$ 。
- ③ 当函数的表达式是偶次根式时，自变量的取值范围必须使被开方数不小于零。
- ④ 对于实际问题中的函数关系式，自变量的取值除必须使表达式有意义外，还要保证实际

问题有意义.

18. 二次函数的性质

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的顶点坐标是 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$, 对称轴直线 $x = -$

$\frac{b}{2a}$, 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的图象具有如下性质:

① 当 $a > 0$ 时, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的开口向上, $x < -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而减小;

$x > -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而增大; $x = -\frac{b}{2a}$ 时, y 取得最小值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$, 即顶点是抛物线的最低点.

② 当 $a < 0$ 时, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的开口向下, $x < -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而增大;

$x > -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而减小; $x = -\frac{b}{2a}$ 时, y 取得最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$, 即顶点是抛物线的最高点.

③ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的图象可由抛物线 $y=ax^2$ 的图象向右或向左平移 $|\frac{b}{2a}|$ 个

单位, 再向上或向下平移 $|\frac{4ac-b^2}{4a}|$ 个单位得到的.

19. 抛物线与 x 轴的交点

求二次函数 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 与 x 轴的交点坐标, 令 $y=0$, 即 $ax^2+bx+c=0$, 解关于 x 的一元二次方程即可求得交点横坐标.

(1) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 的交点与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 根之间的关系.

$\Delta = b^2 - 4ac$ 决定抛物线与 x 轴的交点个数.

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 时, 抛物线与 x 轴有 2 个交点;

$\Delta = b^2 - 4ac = 0$ 时, 抛物线与 x 轴有 1 个交点;

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 时, 抛物线与 x 轴没有交点.

(2) 二次函数的交点式: $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$), 可直接得到抛物线与 x 轴的交点坐标 $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$.

20. 二次函数的应用

(1) 利用二次函数解决利润问题

在商品经营活动中, 经常会遇到求最大利润, 最大销量等问题. 解此类题的关键是通过题意, 确定出二次函数的解析式, 然后确定其最大值, 实际问题中自变量 x 的取值要使实际问题有意义, 因此在求二次函数的最值时, 一定要注意自变量 x 的取值范围.

(2) 几何图形中的最值问题

几何图形中的二次函数问题常见的有: 几何图形中面积的最值, 用料的最佳方案以及动态几何中的最值的讨论.

(3) 构建二次函数模型解决实际问题

利用二次函数解决抛物线形的隧道、大桥和拱门等实际问题时, 要恰当地把这些实际问题中的数据落实到平面直角坐标系中的抛物线上, 从而确定抛物线的解析式, 通过解析式可解决一些测量问题或其他问题.

21. 平行线的性质

1、平行线性质定理

定理 1: 两条平行线被第三条直线所截, 同位角相等. 简单说成: 两直线平行, 同位角相等.

定理 2: 两条平行线被地三条直线所截, 同旁内角互补. . 简单说成: 两直线平行, 同旁内角互补.

定理 3: 两条平行线被第三条直线所截, 内错角相等. 简单说成: 两直线平行, 内错角相等.

2、两条平行线之间的距离处处相等.

22. 三角形的面积

(1) 三角形的面积等于底边长与高线乘积的一半, 即 $S_{\triangle} = \frac{1}{2} \times \text{底} \times \text{高}$.

(2) 三角形的中线将三角形分成面积相等的两部分.

23. 全等三角形的判定与性质

(1) 全等三角形的判定是结合全等三角形的性质证明线段和角相等的重要工具. 在判定三角形全等时, 关键是选择恰当的判定条件.

(2) 在应用全等三角形的判定时, 要注意三角形间的公共边和公共角, 必要时添加适当辅助线构造三角形.

24. 等腰三角形的性质

(1) 等腰三角形的概念

有两条边相等的三角形叫做等腰三角形.

(2) 等腰三角形的性质

① 等腰三角形的两腰相等

② 等腰三角形的两个底角相等. 【简称: 等边对等角】

③ 等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高相互重合. 【三线合一】

(3) 在①等腰; ②底边上的高; ③底边上的中线; ④顶角平分线. 以上四个元素中, 从中任意取出两个元素当条件, 就可以得到另外两个元素为结论.

25. 勾股定理

(1) 勾股定理: 在任何一个直角三角形中, 两条直角边长的平方之和一定等于斜边长的平方.

如果直角三角形的两条直角边长分别是 a , b , 斜边长为 c , 那么 $a^2+b^2=c^2$.

(2) 勾股定理应用的前提条件是在直角三角形中.

(3) 勾股定理公式 $a^2+b^2=c^2$ 的变形有: $a=\sqrt{c^2-b^2}$, $b=\sqrt{c^2-a^2}$ 及 $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

(4) 由于 $a^2+b^2=c^2>a^2$, 所以 $c>a$, 同理 $c>b$, 即直角三角形的斜边大于该直角三角形中的每一条直角边.

26. 勾股定理的逆定理

(1) 勾股定理的逆定理: 如果三角形的三边长 a , b , c 满足 $a^2+b^2=c^2$, 那么这个三角形就是直角三角形.

说明:

① 勾股定理的逆定理验证利用了三角形的全等.

② 勾股定理的逆定理将数转化为形, 作用是判断一个三角形是不是直角三角形. 必须满足较小两边平方的和等于最大边的平方才能做出判断.

(2) 运用勾股定理的逆定理解决问题的实质就是判断一个角是不是直角. 然后进一步结合其他已知条件来解决问题.

注意: 要判断一个角是不是直角, 先要构造出三角形, 然后知道三条边的大小, 用较小的两条边的平方和与最大的边的平方比较, 如果相等, 则三角形为直角三角形; 否则不是.

27. 等腰直角三角形

(1) 两条直角边相等的直角三角形叫做等腰直角三角形.

(2) 等腰直角三角形是一种特殊的三角形, 具有所有三角形的性质, 还具备等腰三角形和

直角三角形的所有性质. 即: 两个锐角都是 45° , 斜边上中线、角平分线、斜边上的高, 三线合一, 等腰直角三角形斜边上的高为外接圆的半径 R , 而高又为内切圆的直径 (因为等腰直角三角形的两个小角均为 45° , 高又垂直于斜边, 所以两个小三角形均为等腰直角三角形, 则两腰相等);

(3) 若设等腰直角三角形内切圆的半径 $r=1$, 则外接圆的半径 $R=\sqrt{2}+1$, 所以 $r: R=1: \sqrt{2}+1$.

28. 平行四边形的判定与性质

平行四边形的判定与性质的作用

平行四边形对应边相等, 对应角相等, 对角线互相平分及它的判定, 是我们证明直线的平行、线段相等、角相等的重要方法, 若要证明两直线平行和两线段相等、两角相等, 可考虑将要证的直线、线段、角、分别置于一个四边形的对边或对角的位置上, 通过证明四边形是平行四边形达到上述目的.

运用定义, 也可以判定某个图形是平行四边形, 这是常用的方法, 不要忘记平行四边形的定义, 有时用定义判定比用其他判定定理还简单.

凡是可以用平行四边形知识证明的问题, 不要再回到用三角形全等证明, 应直接运用平行四边形的性质和判定去解决问题.

29. 正方形的性质

(1) 正方形的定义: 有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形叫做正方形.

(2) 正方形的性质

- ① 正方形的四条边都相等, 四个角都是直角;
- ② 正方形的两条对角线相等, 互相垂直平分, 并且每条对角线平分一组对角;
- ③ 正方形具有四边形、平行四边形、矩形、菱形的一切性质.
- ④ 两条对角线将正方形分成四个全等的等腰直角三角形, 同时, 正方形又是轴对称图形, 有四条对称轴.

30. 四边形综合题

四边形综合题.

31. 圆心角、弧、弦的关系

(1) 定理: 在同圆和等圆中, 相等的圆心角所对的弧相等, 所对的弦也相等.

(2) 推论: 在同圆或等圆中, 如果两个圆心角、两条弧、两条弦中有一组量相等, 那么它们所对应的其余各组量都分别相等.

说明：同一条弦对应两条弧，其中一条是优弧，一条是劣弧，而在本定理和推论中的“弧”是指同为优弧或劣弧。

(3) 正确理解和使用圆心角、弧、弦三者的关系

三者关系可理解为：在同圆或等圆中，①圆心角相等，②所对的弧相等，③所对的弦相等，三项“知一推二”，一项相等，其余二项皆相等。这源于圆的旋转不变性，即：圆绕其圆心旋转任意角度，所得图形与原图形完全重合。

(4) 在具体应用上述定理解决问题时，可根据需要，选择其有关部分。

32. 圆周角定理

(1) 圆周角的定义：顶点在圆上，并且两边都与圆相交的角叫做圆周角。

注意：圆周角必须满足两个条件：①顶点在圆上。②角的两条边都与圆相交，二者缺一不可。

(2) 圆周角定理：在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，都等于这条弧所对的圆心角的一半。

推论：半圆（或直径）所对的圆周角是直角， 90° 的圆周角所对的弦是直径。

(3) 在解圆的有关问题时，常常需要添加辅助线，构成直径所对的圆周角，这种基本技能技巧一定要掌握。

(4) 注意：①圆周角和圆心角的转化可通过作圆的半径构造等腰三角形。利用等腰三角形的顶点和底角的关系进行转化。②圆周角和圆周角的转化可利用其“桥梁”——圆心角转化。③定理成立的条件是“同一条弧所对的”两种角，在运用定理时不要忽略了这个条件，把不同弧所对的圆周角与圆心角错当成同一条弧所对的圆周角和圆心角。

33. 切线的性质

(1) 切线的性质

- ① 圆的切线垂直于经过切点的半径。
- ② 经过圆心且垂直于切线的直线必经过切点。
- ③ 经过切点且垂直于切线的直线必经过圆心。

(2) 切线的性质可总结如下：

如果一条直线符合下列三个条件中的任意两个，那么它一定满足第三个条件，这三个条件是：①直线过圆心；②直线过切点；③直线与圆的切线垂直。

(3) 切线性质的运用

由定理可知，若出现圆的切线，必连过切点的半径，构造定理图，得出垂直关系。简记作

见切点, 连半径, 见垂直.

34. 弧长的计算

(1) 圆周长公式: $C=2\pi R$

(2) 弧长公式: $l=\frac{n\pi R}{180}$ (弧长为 l , 圆心角度数为 n , 圆的半径为 R)

① 在弧长的计算公式中, n 是表示 1° 的圆心角的倍数, n 和 180 都不要带单位.

② 若圆心角的单位不全是度, 则需要先化为度后再计算弧长.

③ 题设未标明精确度的, 可以将弧长用 π 表示.

④ 正确区分弧、弧的度数、弧长三个概念, 度数相等的弧, 弧长不一定相等, 弧长相等的弧不一定是等弧, 只有在同圆或等圆中, 才有等弧的概念, 才是三者的统一.

35. 扇形面积的计算

(1) 圆面积公式: $S=\pi r^2$

(2) 扇形: 由组成圆心角的两条半径和圆心角所对的弧所围成的图形叫做扇形.

(3) 扇形面积计算公式: 设圆心角是 n° , 圆的半径为 R 的扇形面积为 S , 则

$$S_{\text{扇形}}=\frac{n}{360}\pi R^2 \text{ 或 } S_{\text{扇形}}=\frac{1}{2}lR \text{ (其中 } l \text{ 为扇形的弧长)}$$

(4) 求阴影面积常用的方法:

① 直接用公式法;

② 和差法;

③ 割补法.

(5) 求阴影面积的主要思路是将不规则图形面积转化为规则图形的面积.

36. 作图—复杂作图

复杂作图是在五种基本作图的基础上进行作图, 一般是结合了几何图形的性质和基本作图方法.

解决此类题目的关键是熟悉基本几何图形的性质, 结合几何图形的基本性质把复杂作图拆解成基本作图, 逐步操作.

37. 命题与定理

1、判断一件事情的语句, 叫做命题. 许多命题都是由题设和结论两部分组成, 题设是已知事项, 结论是由已知事项推出的事项, 一个命题可以写成“如果…那么…”形式.

2、有些命题的正确性是用推理证实的, 这样的真命题叫做定理.

3、定理是真命题, 但真命题不一定是定理.

4、命题写成“如果…，那么…”的形式，这时，“如果”后面接的部分是题设，“那么”后面接的部分是结论。

5、命题的“真”“假”是就命题的内容而言。任何一个命题非真即假。要说明一个命题的正确性，一般需要推理、论证，而判断一个命题是假命题，只需举出一个反例即可。

38. 坐标与图形变化-对称

(1) 关于 x 轴对称

横坐标相等，纵坐标互为相反数。

(2) 关于 y 轴对称

纵坐标相等，横坐标互为相反数。

(3) 关于直线对称

① 关于直线 $x=m$ 对称, $P(a, b) \Rightarrow P(2m-a, b)$

② 关于直线 $y=n$ 对称, $P(a, b) \Rightarrow P(a, 2n-b)$

39. 翻折变换(折叠问题)

1、翻折变换(折叠问题)实质上就是轴对称变换。

2、折叠的性质：折叠是一种对称变换，它属于轴对称，折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等。

3、在解决实际问题时，对于折叠较为复杂的问题可以实际操作图形的折叠，这样便于找到图形间的关系。

首先清楚折叠和轴对称能够提供给我们隐含的并且可利用的条件。解题时，我们常常设要求的线段长为 x ，然后根据折叠和轴对称的性质用含 x 的代数式表示其他线段的长度，选择适当的直角三角形，运用勾股定理列出方程求出答案。我们运用方程解决时，应认真审题设出正确的未知数。

40. 中心对称图形

(1) 定义

把一个图形绕某一点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形，这个点叫做对称中心。

注意：中心对称图形和中心对称不同，中心对称是两个图形之间的关系，而中心对称图形是指一个图形自身的特点，这点应注意区分，它们性质相同，应用方法相同。

(2) 常见的中心对称图形

平行四边形、圆形、正方形、长方形等等。

41. 相似三角形的判定与性质

(1) 相似三角形相似多边形的特殊情形, 它沿袭相似多边形的定义, 从对应边的比相等和对应角相等两方面下定义; 反过来, 两个三角形相似也有对应角相等, 对应边的比相等.

(2) 三角形相似的判定一直是中考考查的热点之一, 在判定两个三角形相似时, 应注意利用图形中已有的公共角、公共边等隐含条件, 以充分发挥基本图形的作用, 寻找相似三角形的一般方法是通过作平行线构造相似三角形; 或依据基本图形对图形进行分解、组合; 或作辅助线构造相似三角形, 判定三角形相似的方法有事可单独使用, 有时需要综合运用. 无论是单独使用还是综合运用, 都要具备应有的条件方可.

42. 解直角三角形

(1) 解直角三角形的定义

在直角三角形中, 由已知元素求未知元素的过程就是解直角三角形.

(2) 解直角三角形要用到的关系

① 锐角直角的关系: $\angle A + \angle B = 90^\circ$;

② 三边之间的关系: $a^2 + b^2 = c^2$;

③ 边角之间的关系:

$\sin A = \angle A$ 的对边斜边 $= \frac{a}{c}$, $\cos A = \angle A$ 的邻边斜边 $= \frac{b}{c}$, $\tan A = \angle A$ 的对边 $\angle A$ 的邻边 $= \frac{a}{b}$.

(a, b, c 分别是 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边)

43. 用样本估计总体

用样本估计总体是统计的基本思想.

1、用样本的频率分布估计总体分布:

从一个总体得到一个包含大量数据的样本, 我们很难从一个个数字中直接看出样本所包含的信息. 这时, 我们用频率分布直方图来表示相应样本的频率分布, 从而去估计总体的分布情况.

2、用样本的数字特征估计总体的数字特征 (主要数据有众数、中位数、平均数、标准差与方差).

一般来说, 用样本去估计总体时, 样本越具有代表性、容量越大, 这时对总体的估计也就越精确.

44. 扇形统计图

(1) 扇形统计图是用整个圆表示总数用圆内各个扇形的大小表示各部分数量占总数的百分

数. 通过扇形统计图可以很清楚地表示出各部分数量同总数之间的关系. 用整个圆的面积表示总数 (单位 1), 用圆的扇形面积表示各部分占总数的百分数.

(2) 扇形图的特点: 从扇形图上可以清楚地看出各部分数量和总数量之间的关系.

(3) 制作扇形图的步骤

- ① 根据有关数据先算出各部分在总体中所占的百分数, 再算出各部分圆心角的度数, 公式是各部分扇形圆心角的度数 = 部分占总体的百分比 $\times 360^\circ$. ____
- ② 按比例取适当半径画一个圆; 按扇形圆心角的度数用量角器在圆内量出各个扇形的圆心角的度数;
- ④ 在各扇形内写上相应的名称及百分数, 并用不同的标记把各扇形区分开来.

45. 条形统计图

(1) 定义: 条形统计图是用线段长度表示数据, 根据数量的多少画成长短不同的矩形直条, 然后按顺序把这些直条排列起来.

(2) 特点: 从条形图可以很容易看出数据的大小, 便于比较.

(3) 制作条形图的一般步骤:

- ① 根据图纸的大小, 画出两条互相垂直的射线.
- ② 在水平射线上, 适当分配条形的位置, 确定直条的宽度和间隔.
- ③ 在与水平射线垂直的射线上, 根据数据大小的具体情况, 确定单位长度表示多少.
- ④ 按照数据大小, 画出长短不同的直条, 并注明数量.

46. 中位数

(1) 中位数:

将一组数据按照从小到大 (或从大到小) 的顺序排列, 如果数据的个数是奇数, 则处于中间位置的数就是这组数据的中位数.

如果这组数据的个数是偶数, 则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数.

(2) 中位数代表了这组数据值大小的 “中点”, 不易受极端值影响, 但不能充分利用所有数据的信息.

(3) 中位数仅与数据的排列位置有关, 某些数据的移动对中位数没有影响, 中位数可能出现在所给数据中也可能不在所给的数据中出现, 当一组数据中的个别数据变动较大时, 可用中位数描述其趋势.

47. 众数

(1) 一组数据中出现次数最多的数据叫做众数.

(2) 求一组数据的众数的方法: 找出频数最多的那个数据, 若几个数据频数都是最多且相

同, 此时众数就是这多个数据.

(3) 众数不易受数据中极端值的影响. 众数也是数据的一种代表数, 反映了一组数据的集中程度, 众数可作为描述一组数据集中趋势的量. .

48. 列表法与树状图法

(1) 当试验中存在两个元素且出现的所有可能的结果较多时, 我们常用列表的方式, 列出所有可能的结果, 再求出概率.

(2) 列表的目的在于不重不漏地列举出所有可能的结果求出 n , 再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m , 求出概率.

(3) 列举法 (树形图法) 求概率的关键在于列举出所有可能的结果, 列表法是一种, 但当一事件涉及三个或更多元素时, 为不重不漏地列出所有可能的结果, 通常采用树形图.

(4) 树形图列举法一般是选择一个元素再和其他元素分别组合, 依次列出, 象树的枝丫形式, 最末端的枝丫个数就是总的可能的结果 n .

(5) 当有两个元素时, 可用树形图列举, 也可以列表列举.