

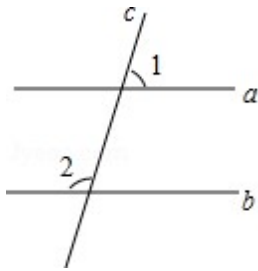
2019 年甘肃省兰州市中考数学试卷 (A 卷)

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 4 分, 共 48 分.

1. (4 分) (2019•兰州) -2019 的相反数是()

- A. $\frac{1}{2019}$ B. 2019 C. -2019 D. $-\frac{1}{2019}$

2. (4 分) (2019•兰州) 如图, 直线 a , b 被直线 c 所截, $a \parallel b$, $\angle 1 = 80^\circ$, 则 $\angle 2 =$ ()



- A. 130° B. 120° C. 110° D. 100°

3. (4 分) (2019•兰州) 计算: $\sqrt{12} - \sqrt{3} =$ ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 3 D. $4\sqrt{3}$

4. (4 分) (2019•兰州) 剪纸是中国特有的民间艺术, 在如图所示的四个剪纸图案中, 既是轴对称又是中心对称图形的是()



A.



B.



C.



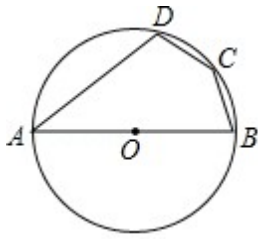
D.

5. (4 分) (2019•兰州) $x=1$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 + ax + 2b = 0$ 的解, 则 $2a + 4b =$ ()

- A. -2 B. -3 C. -1 D. -6

6. (4 分) (2019•兰州) 如图, 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, 若 $\angle A = 40^\circ$, 则 $\angle C =$ ()

)



- A. 110° B. 120° C. 135° D. 140°

7. (4分) (2019•兰州) 化简: $\frac{a^2+1}{a+1} - \frac{2}{a+1} = (\quad)$

- A. $a-1$ B. $a+1$ C. $\frac{a-1}{a+1}$ D. $\frac{1}{a+1}$

8. (4分) (2019•兰州) 已知 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, $AB=8$, $A'B'=6$, 则 $\frac{BC}{B'C'} = (\quad)$

- A. 2 B. $\frac{4}{3}$ C. 3 D. $\frac{16}{9}$

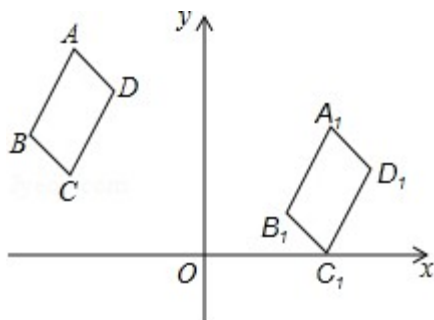
9. (4分) (2019•兰州) 《九章算术》是中国古代数学著作之一, 书中有这样的问题: 五只雀, 六只燕共重一斤, 雀重燕轻, 互换一只, 恰好一样重. 问: 每只雀、燕的重量各为多少? 设一只雀的重量为 x 斤, 一只燕的重量为 y 斤, 则可列方程组为()

- A. $\begin{cases} 5x+6y=1 \\ 5x-y=6y-x \end{cases}$ B. $\begin{cases} 6x+5y=1 \\ 5x+y=6y+x \end{cases}$
- C. $\begin{cases} 5x+6y=1 \\ 4x+y=5y+x \end{cases}$ D. $\begin{cases} 6x+5y=1 \\ 4x-y=5y-x \end{cases}$

10. (4分) (2019•兰州) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 将四边形 $ABCD$ 先向下平移,

再向右平移得到四边形 $A_1B_1C_1D_1$, 已知 $A(-3,5)$, $B(-4,3)$, $A_1(3,3)$, 则 B_1 的坐标为(

)

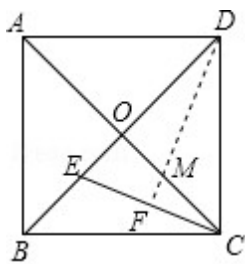


- A. (1,2) B. (2,1) C. (1,4) D. (4,1)

11. (4分) (2019•兰州) 已知点 $A(1, y_1)$, $B(2, y_2)$ 在抛物线 $y = -(x+1)^2 + 2$ 上, 则下列结论正确的是()

- A. $2 > y_1 > y_2$ B. $2 > y_2 > y_1$ C. $y_1 > y_2 > 2$ D. $y_2 > y_1 > 2$

12. (4分) (2019•兰州) 如图, 边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O , 将正方形 $ABCD$ 沿直线 DF 折叠, 点 C 落在对角线 BD 上的点 E 处, 折痕 DF 交 AC 于点 M , 则 $OM =$ ()



- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{3} - 1$ D. $\sqrt{2} - 1$

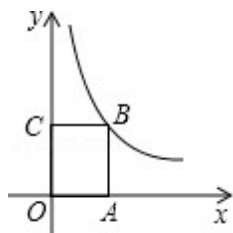
二、填空题: 本大题共4小题, 每小题4分, 共16分.

13. (4分) (2019•兰州) 因式分解: $a^3 + 2a^2 + a =$ _____.

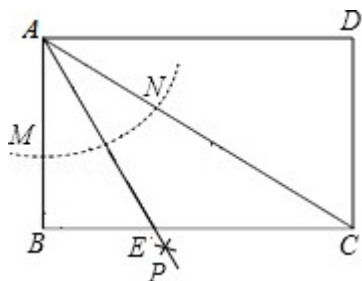
14. (4分) (2019•兰州) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle A = 40^\circ$, 则 $\angle B =$ _____ $^\circ$.

15. (4分) (2019•兰州) 如图, 矩形 $OABC$ 的顶点 B 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象

上, $S_{\text{矩形}OABC} = 6$, 则 $k =$ _____.



16. (4分) (2019•兰州) 如图, 矩形 $ABCD$, $\angle BAC = 60^\circ$, 以点 A 为圆心, 以任意长为半径作弧分别交 AB , AC 于点 M , N 两点, 再分别以点 M , N 为圆心, 以大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径作弧交于点 P , 作射线 AP 交 BC 于点 E , 若 $BE = 1$, 则矩形 $ABCD$ 的面积等于_____.



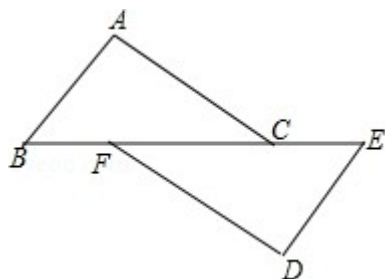
三、解答题: 本大题共 12 小题, 共 86 分.

17. (5分) (2019•兰州) 计算: $|-2| - (\sqrt{3} + 1)^0 + (-2)^2 - \tan 45^\circ$.

18. (5分) (2019•兰州) 化简: $a(1 - 2a) + 2(a + 1)(a - 1)$.

19. (5分) (2019•兰州) 解不等式组:
$$\begin{cases} 2x - 1 < x + 5 \text{ ①} \\ \frac{x + 1}{3} < x - 1 \text{ ②} \end{cases}$$

20. (6分) (2019•兰州) 如图, $AB = DE$, $BF = EC$, $\angle B = \angle E$, 求证: $AC \parallel DF$.



21. (6分) (2019•兰州) 2019 年 5 月, 以“寻根国学, 传承文明”为主题的兰州市第三届“国学少年强——国学知识挑战赛”总决赛拉开序幕. 小明晋级了总决赛, 比赛过程分两个环节, 参赛选手须在每个环节中各选一道题目.

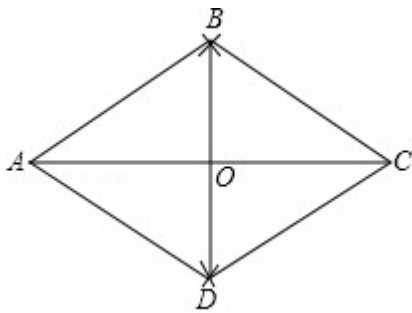
第一环节: 写字注音、成语故事、国学常识、成语接龙 (分别用 A_1 , A_2 , A_3 , A_4 表示);

第二环节: 成语听写、诗词对句、经典诵读 (分别用 B_1 , B_2 , B_3 表示).

- (1) 请用树状图或列表的方法表示小明参加总决赛抽取题目的所有可能结果;
- (2) 求小明参加总决赛抽取题目是成语题目 (成语故事、成语接龙、成语听写) 的概率.

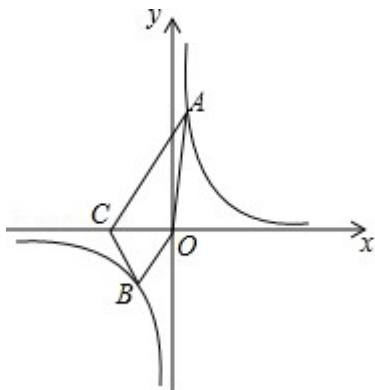
22. (7 分) (2019•兰州) 如图, $AC=8$, 分别以 A 、 C 为圆心, 以长度 5 为半径作弧, 两条弧分别相交于点 B 和 D . 依次连接 A 、 B 、 C 、 D , 连接 BD 交 AC 于点 O .

- (1) 判断四边形 $ABCD$ 的形状并说明理由;
- (2) 求 BD 的长.



23. (7 分) (2019•兰州) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象经过等边三角形 BOC 的顶点 B , $OC=2$, 点 A 在反比例函数图象上, 连接 AC , OA .

- (1) 求反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的表达式;
- (2) 若四边形 $ACBO$ 的面积是 $3\sqrt{3}$, 求点 A 的坐标.



24. (7 分) (2019•兰州) 为了解某校八年级学生一门课程的学习情况, 小佳和小丽分别对八年级 1 班和 2 班本门课程的期末成绩进行了调查分析.

小佳对八年级 1 班全班学生 (25 名) 的成绩进行分析, 过程如下:

收集、整理数据:

表一

分数段 班级	$60, x < 70$	$70, x < 80$	$80, x < 90$	$90, x, 100$
八年级 1 班	7	5	10	3

分析数据:

表二

统计量 班级	平均数	中位数	众数	极差	方差
八年级 1 班	78	——	85	36	105.28

小丽用同样的方法对八年级 2 班全班学生 (25 名) 的成绩进行分析, 数据如下:

表三

统计量 班级	平均数	中位数	众数	极差	方差
八年级 2 班	75	76	73	44	146.80

根据以上信息, 解决下列问题:

(1) 已知八年级 1 班学生的成绩在 $80, x < 90$ 这一组的数据如下:

85, 87, 88, 80, 82, 85, 83, 85, 87, 85

根据上述数据, 将表二补充完整;

(2) 你认为哪个班级的成绩更为优异? 请说明理由.

25. (7 分) (2019•兰州) 某数学课题研究小组针对兰州市住房窗户“如何设计遮阳蓬”

这一课题进行了探究, 过程如下:

问题提出:

如图 1 是某住户窗户上方安装的遮阳蓬, 要求设计的遮阳蓬能最大限度地遮住夏天炎热的阳光, 又能最大限度地使冬天温暖的阳光射入室内.



图1



图2

方案设计:

如图2, 该数学课题研究小组通过调查研究设计了垂直于墙面 AC 的遮阳蓬 CD .

数据收集:

通过查阅相关资料和实际测量: 兰州市一年中, 夏至日这一天的正午时刻太阳光线 DA 与遮阳蓬 CD 的夹角 $\angle ADC$ 最大 ($\angle ADC = 77.44^\circ$); 冬至日这一天的正午时刻, 太阳光线 DB 与遮阳蓬 CD 的夹角 $\angle BDC$ 最小 ($\angle BDC = 30.56^\circ$). 窗户的高度 $AB = 2m$.

问题解决:

根据上述方案及数据, 求遮阳蓬 CD 的长.

(结果精确到 $0.1m$, 参考数据: $\sin 30.56^\circ \approx 0.51$, $\cos 30.56^\circ \approx 0.86$, $\tan 30.56^\circ \approx 0.59$, $\sin 77.44^\circ \approx 0.98$, $\cos 77.44^\circ \approx 0.22$, $\tan 77.44^\circ \approx 4.49$)

26. (9分) (2019•兰州) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 6cm$, $BC = 8cm$, 点 D 为 BC 的中点, $BE = DE$, 将 $\angle BDE$ 绕点 D 顺时针旋转 α 度 ($0^\circ < \alpha < 83^\circ$), 角的两边分别交直线 AB 于 M 、 N 两点, 设 B 、 M 两点间的距离为 xcm , M 、 N 两点间的距离为 ycm .

小涛根据学习函数的经验, 对函数 y 随自变量 x 的变化而变化的规律进行了探究.

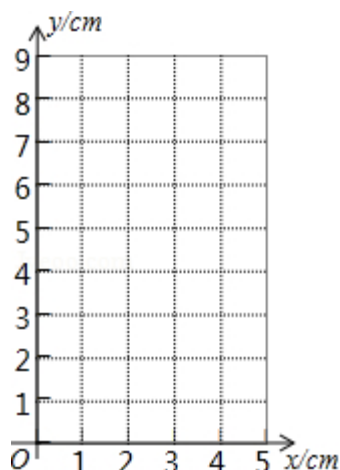
下面是小涛的探究过程, 请补充完整.

(1) 列表: 下表的已知数据是 B 、 M 两点间的距离 x 进行取点、画图、测量, 分别得到了 y 与 x 的几组对应值:

x/m	0	0.30	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	$\frac{8}{3}$	3.00	3.50	3.68	3.81	3.90	3.93	4.10
y/m		2.88	2.81	2.69	2.67	2.80	3.15		3.85	5.24	6.01	6.71	7.27	7.44	8.87

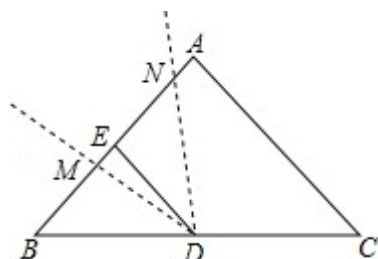
请你通过计算, 补全表格:

(2) 描点、连线, 在平面直角坐标系 xOy 中, 描出表格中各组数值所对应的点 (x, y) , 并画出函数 y 关于 x 的图象.



(3) 探究性质: 随着自变量 x 的不断增大, 函数 y 的变化趋势: ____.

(4) 解决问题: 当 $MN = 2BM$ 时, BM 的长度大约是 ____ cm . (保留两位小数).



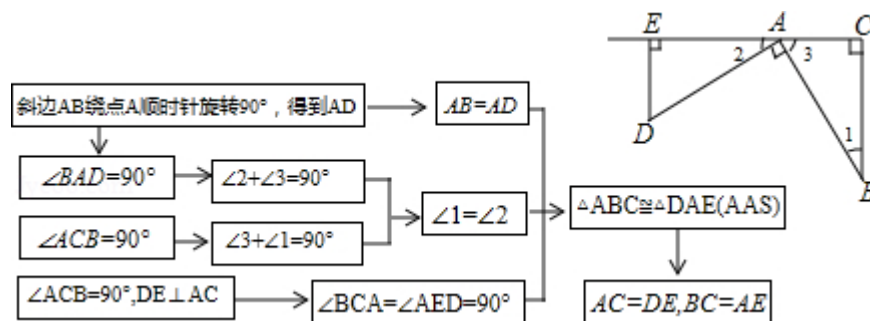
27. (10分) (2019•兰州) 通过对下面数学模型的研究学习, 解决问题.

【模型呈现】

如图, 在 $Rt\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$, 将斜边 AB 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到 AD , 过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E , 可以推理得到 $\triangle ABC \cong \triangle DAE$, 进而得到 $AC = DE$, $BC = AE$.

我们把这个数学模型成为“K型”.

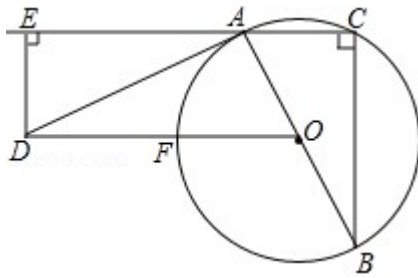
推理过程如下:



【模型应用】

如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 2$, 将斜边 AB 绕点 A 顺时针旋转一定的角度得到 AD , 过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E , $\angle DAE = \angle ABC$, $DE = 1$, 连接 DO 交 $\odot O$

于点 F .



(1) 求证: AD 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 连接 FC 交 AB 于点 G , 连接 FB . 求证: $FG^2 = GO \cdot GB$.

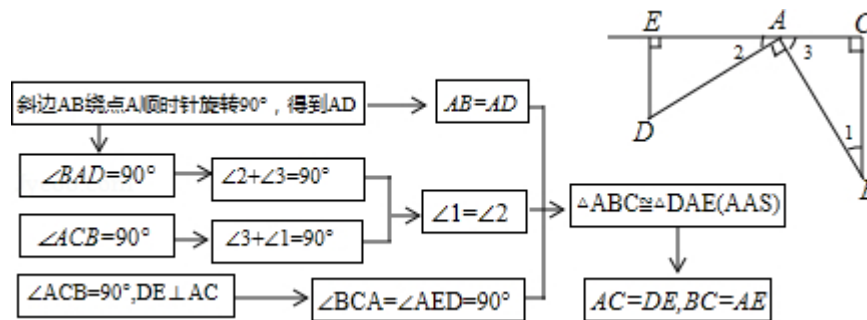
28. (12分) (2019•兰州) 通过对下面数学模型的研究学习, 解决问题.

【模型呈现】

如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$, 将斜边 AB 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到 AD , 过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E , 可以推理得到 $\triangle ABC \cong \triangle DAE$, 进而得到 $AC = DE$, $BC = AE$.

我们把这个数学模型成为 “K 型” .

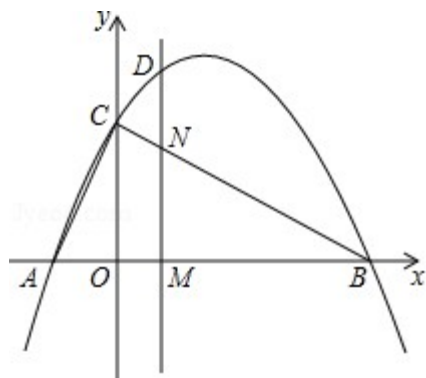
推理过程如下:



【模型迁移】

二次函数 $y = ax^2 + bx + 2$ 的图象交 x 轴于点 $(-1, 0)$, $B(4, 0)$ 两点, 交 y 轴于点 C . 动点 M

从点 A 出发, 以每秒 2 个单位长度的速度沿 AB 方向运动, 过点 M 作 $MN \perp x$ 轴交直线 BC 于点 N , 交抛物线于点 D , 连接 AC , 设运动的时间为 t 秒.



- (1) 求二次函数 $y = ax^2 + bx + 2$ 的表达式;
- (2) 连接 BD , 当 $t = \frac{3}{2}$ 时, 求 $\triangle DNB$ 的面积;
- (3) 在直线 MN 上存在一点 P , 当 $\triangle PBC$ 是以 $\angle BPC$ 为直角的等腰直角三角形时, 求此时点 D 的坐标;
- (4) 当 $t = \frac{5}{4}$ 时, 在直线 MN 上存在一点 Q , 使得 $\angle AQC + \angle OAC = 90^\circ$, 求点 Q 的坐标.

2019 年甘肃省兰州市中考数学试卷 (A 卷)

参考答案与试题解析

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 4 分, 共 48 分.

1. (4 分) -2019 的相反数是 ()

A. $\frac{1}{2019}$

B. 2019

C. -2019

D. $-\frac{1}{2019}$

【考点】14: 相反数

【专题】511: 实数

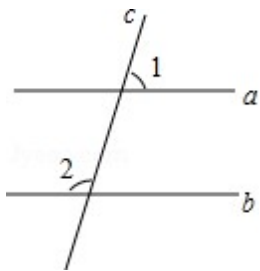
【分析】根据相反数的概念求解可得.

【解答】解: -2019 的相反数为 2019,

故选: B.

【点评】本题主要考查相反数, 解题的关键是掌握相反数的概念: 只有符号不同的两个数叫做互为相反数.

2. (4 分) 如图, 直线 a , b 被直线 c 所截, $a \parallel b$, $\angle 1 = 80^\circ$, 则 $\angle 2 =$ ()



A. 130°

B. 120°

C. 110°

D. 100°

【考点】JA: 平行线的性质

【专题】551: 线段、角、相交线与平行线

【分析】先利用对顶角相等得到 $\angle 3 = 80^\circ$, 然后根据平行线的性质, 利用 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ 可计算出 $\angle 2$ 的度数.

【解答】解: 如图, $\because \angle 1 = 80^\circ$,

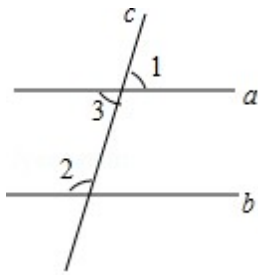
$$\therefore \angle 3 = 80^\circ,$$

$$\because a \parallel b,$$

$$\therefore \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ.$$

故选: D.



【点评】本题考查了平行线的性质: 两直线平行, 同位角相等; 两直线平行, 同旁内角互补; 两直线平行, 内错角相等.

3. (4分) 计算: $\sqrt{12} - \sqrt{3} = (\quad)$

A. $\sqrt{3}$

B. $2\sqrt{3}$

C. 3

D. $4\sqrt{3}$

【考点】78: 二次根式的加减法

【专题】514: 二次根式

【分析】先化简二次根式, 再合并同类二次根式即可得.

【解答】解: $\sqrt{12} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$,

故选: A.

【点评】本题主要考查二次根式的加减法, 解题的关键是熟练掌握二次根式的性质和二次根式加减运算顺序.

4. (4分) 剪纸是中国特有的民间艺术, 在如图所示的四个剪纸图案中, 既是轴对称又是中心对称图形的是()



【考点】R5: 中心对称图形; P3: 轴对称图形

【专题】558: 平移、旋转与对称

【分析】根据轴对称图形的定义沿一条直线对折后, 直线两旁部分完全重合的图形是轴对称图形, 以及中心对称图形的定义分别判断即可得出答案.

【解答】解: *A*、此图形沿一条直线对折后不能够完全重合, $\therefore$ 此图形不是轴对称图形, 不是中心对称图形, 故此选项错误;

B、此图形沿一条直线对折后能够完全重合, $\therefore$ 此图形不是轴对称图形, 不是中心对称图形, 故此选项错误.

C、此图形沿一条直线对折后能够完全重合, $\therefore$ 此图形是轴对称图形, 旋转 180° 能与原图形重合, 是中心对称图形, 故此选项正确;

D、此图形沿一条直线对折后能够完全重合, 旋转 180° 不能与原图形重合, $\therefore$ 此图形是轴对称图形, 不是中心对称图形, 故此选项错误.

故选: *C*.

【点评】此题主要考查了中心对称图形与轴对称图形的定义, 熟练掌握其定义是解决问题的关键.

5. (4分) $x=1$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 + ax + 2b = 0$ 的解, 则 $2a + 4b =$ ()

- A. -2 B. -3 C. -1 D. -6

【考点】 $A3$: 一元二次方程的解

【专题】 523: 一元二次方程及应用

【分析】先把 $x=1$ 代入方程 $x^2 + ax + 2b = 0$ 得 $a + 2b = -1$, 然后利用整体代入的方法计算 $2a + 4b$ 的值.

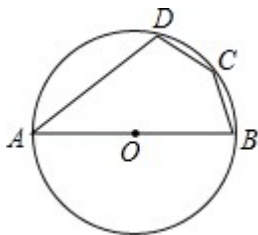
【解答】解: 把 $x=1$ 代入方程 $x^2 + ax + 2b = 0$ 得 $1 + a + 2b = 0$,
所以 $a + 2b = -1$,

所以 $2a + 4b = 2(a + 2b) = 2 \times (-1) = -2$.

故选: *A*.

【点评】本题考查了一元二次方程的解: 能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值是一元二次方程的解.

6. (4分) 如图, 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, 若 $\angle A = 40^\circ$, 则 $\angle C =$ ()



- A. 110° B. 120° C. 135° D. 140°

【考点】M6：圆内接四边形的性质

【专题】55A：与圆有关的位置关系

【分析】直接利用圆内接四边形的对角互补计算 $\angle C$ 的度数.

【解答】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$,

$$\therefore \angle C + \angle A = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ.$$

故选：D.

【点评】本题考查了圆内接四边形的性质：圆内接四边形的对角互补. 圆内接四边形的任意一个外角等于它的内对角（就是和它相邻的内角的对角）.

7. (4分) 化简： $\frac{a^2+1}{a+1} - \frac{2}{a+1} = (\quad)$

- A. $a-1$ B. $a+1$ C. $\frac{a-1}{a+1}$ D. $\frac{1}{a+1}$

【考点】6B：分式的加减法

【专题】513：分式

【分析】先根据法则计算，再因式分解、约分即可得.

【解答】解：原式 $= \frac{a^2-1}{a+1}$

$$= \frac{(a+1)(a-1)}{a+1}$$

$$= a-1,$$

故选：A.

【点评】本题主要考查分式的加减法，解题的关键是掌握分式加减运算法则.

8. (4分) 已知 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, $AB=8$, $A'B'=6$, 则 $\frac{BC}{B'C'} = (\quad)$

- A. 2 B. $\frac{4}{3}$ C. 3 D. $\frac{16}{9}$

【考点】S7：相似三角形的性质

【专题】55D：图形的相似

【分析】直接利用相似三角形的性质求解.

【解答】解： $\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$,

$$\therefore \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

故选: B.

【点评】本题考查了相似三角形的性质: 相似三角形的对应角相等, 对应边的比相等. 相似三角形(多边形)的周长的比等于相似比; 相似三角形的对应线段(对应中线、对应角平分线、对应边上的高)的比也等于相似比.

9. (4分)《九章算术》是中国古代数学著作之一, 书中有这样一个问题: 五只雀, 六只燕共重一斤, 雀重燕轻, 互换一只, 恰好一样重. 问: 每只雀、燕的重量各为多少? 设一只雀的重量为 x 斤, 一只燕的重量为 y 斤, 则可列方程组为()

A.
$$\begin{cases} 5x + 6y = 1 \\ 5x - y = 6y - x \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} 6x + 5y = 1 \\ 5x + y = 6y + x \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} 5x + 6y = 1 \\ 4x + y = 5y + x \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} 6x + 5y = 1 \\ 4x - y = 5y - x \end{cases}$$

【考点】99: 由实际问题抽象出二元一次方程组

【专题】521: 一次方程(组)及应用

【分析】根据题意, 可以列出相应的方程组, 从而可以解答本题.

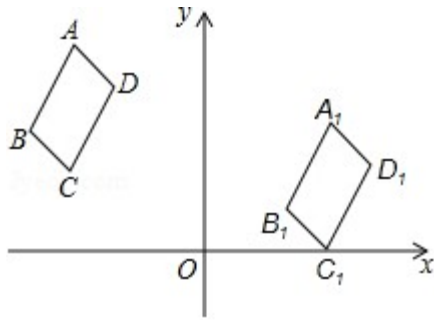
【解答】解: 由题意可得,

$$\begin{cases} 5x + 6y = 1 \\ 4x + y = 5y + x \end{cases},$$

故选: C.

【点评】本题考查由实际问题抽象出二元一次方程组, 解答本题的关键是明确题意, 列出相应的方程组.

10. (4分)如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 将四边形 $ABCD$ 先向下平移, 再向右平移得到四边形 $A_1B_1C_1D_1$, 已知 $A(-3, 5)$, $B(-4, 3)$, $A_1(3, 3)$, 则 B_1 的坐标为()



- A. (1,2) B. (2,1) C. (1,4) D. (4,1)

【考点】Q3：坐标与图形变化－平移

【专题】558：平移、旋转与对称

【分析】根据 A 和 A_1 的坐标得出四边形 $ABCD$ 先向下平移 2 个单位，再向右平移 6 个单位得

到四边形 $A_1B_1C_1D_1$ ，则 B 的平移方法与 A 点相同，即可得到答案．

【解答】解：由 $A(-3,5)$ ， $A_1(3,3)$ 可知四边形 $ABCD$ 先向下平移 2 个单位，再向右平移 6 个

单位得到四边形 $A_1B_1C_1D_1$ ，

$\therefore B(-4,3)$ ，

$\therefore B_1$ 的坐标为 $(2,1)$ ，

故选：B．

【点评】此题主要考查了点的平移规律与图形的平移，关键是掌握平移规律，左右移，纵不变，横减加，上下移，横不变，纵加减．

11. (4 分) 已知点 $A(1, y_1)$ ， $B(2, y_2)$ 在抛物线 $y = -(x+1)^2 + 2$ 上，则下列结论正确的是 ()

- A. $2 > y_1 > y_2$ B. $2 > y_2 > y_1$ C. $y_1 > y_2 > 2$ D. $y_2 > y_1 > 2$

【考点】H5：二次函数图象上点的坐标特征

【专题】535：二次函数图象及其性质

【分析】分别计算自变量为 1 和 2 对应的函数值，然后对各选项进行判断．

【解答】解：当 $x=1$ 时， $y_1 = -(x+1)^2 + 2 = -(1+1)^2 + 2 = -2$ ；

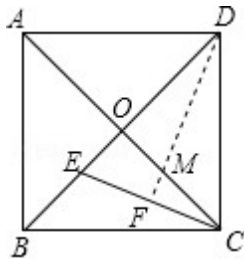
当 $x=2$ 时， $y_1 = -(x+1)^2 + 2 = -(2+1)^2 + 2 = -7$ ；

所以 $2 > y_1 > y_2$ 。

故选：A。

【点评】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征：二次函数图象上的点的坐标满足其解析式。

12. (4 分) 如图，边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O ，将正方形 $ABCD$ 沿直线 DF 折叠，点 C 落在对角线 BD 上的点 E 处，折痕 DF 交 AC 于点 M ，则 $OM = (\quad)$



- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{3}-1$ D. $\sqrt{2}-1$

【考点】LE：正方形的性质；PB：翻折变换（折叠问题）

【专题】553：图形的全等；558：平移、旋转与对称

【分析】根据正方形的性质得到 $AB = AD = BC = CD = \sqrt{2}$ ， $\angle DCB = \angle COD = \angle BOC = 90^\circ$ ，

$OD = OC$ ，求得 $BD = \sqrt{2}AB = 2$ ，得到 $OD = BO = OC = 1$ ，根据折叠的性质得到

$DE = DC = \sqrt{2}$ ， $DF \perp CE$ ，求得 $OE = \sqrt{2} - 1$ ，根据全等三角形的性质即可得到结论。

【解答】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB = AD = BC = CD = \sqrt{2}$ ， $\angle DCB = \angle COD = \angle BOC = 90^\circ$ ， $OD = OC$ ，

$\therefore BD = \sqrt{2}AB = 2$ ，

$$\therefore OD = BO = OC = 1,$$

$\therefore$ 将正方形 $ABCD$ 沿直线 DF 折叠, 点 C 落在对角线 BD 上的点 E 处,

$$\therefore DE = DC = \sqrt{2}, \quad DF \perp CE,$$

$$\therefore OE = \sqrt{2} - 1, \quad \angle EDF + \angle FED = \angle ECO + \angle OEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ODM = \angle ECO,$$

$$\text{在 } \triangle OEC \text{ 与 } \triangle OMD \text{ 中, } \begin{cases} \angle EOC = \angle DOC = 90^\circ \\ OD = OC \\ \angle OCE = \angle ODM \end{cases},$$

$$\triangle OEC \cong \triangle OMD (ASA),$$

$$\therefore OM = OE = \sqrt{2} - 1,$$

故选: D .

【点评】 本题考查了翻折变换 (折叠问题), 全等三角形的判定和性质, 正方形的性质, 正确的识别图形是解题的关键.

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分.

13. (4 分) 因式分解: $a^3 + 2a^2 + a = \underline{a(a+1)^2}$.

【考点】 55: 提公因式法与公式法的综合运用

【分析】 先提取公因式 a , 再对余下的项利用完全平方公式继续分解因式. 完全

$$\text{平方公式: } a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2.$$

【解答】 解: $a^3 + 2a^2 + a,$

$$= a(a^2 + 2a + 1), \quad \dots \text{ (提取公因式)}$$

$$= a(a+1)^2. \quad \dots \text{ (完全平方公式)}$$

故答案为: $a(a+1)^2$.

【点评】 本题考查了提公因式法, 公式法分解因式, 难点在于对余下的项利用完全平方公式进行二次分解因式.

14. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle A = 40^\circ$, 则 $\angle B = \underline{70}^\circ$.

【考点】 KH : 等腰三角形的性质

【专题】 552: 三角形

【分析】 根据等腰三角形的性质和三角形内角和计算 $\angle B$ 的度数.

【解答】 解: $\because AB = AC$,

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

$$\because \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ,$$

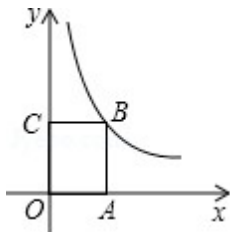
$$\therefore \angle B = \frac{1}{2}(180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ.$$

故答案为 70.

【点评】 本题考查了等腰三角形的性质: 等腰三角形的两腰相等; 等腰三角形的两个底角相等; 等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高相互重合.

15. (4 分) 如图, 矩形 $OABC$ 的顶点 B 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象上, $S_{\text{矩形}OABC} = 6$,

则 $k = \underline{6}$.



【考点】 $G5$: 反比例函数系数 k 的几何意义; $G6$: 反比例函数图象上点的坐标特征; $G4$:

反比例函数的性质

【专题】 534: 反比例函数及其应用

【分析】 因为过双曲线上任意一点引 x 轴、 y 轴垂线, 所得矩形面积 S 是个定值, 即 $S = |k|$.

【解答】 解: 根据题意, 知 $S = |k| = 6$, $k = \pm 6$,

又因为反比例函数位于第一象限, $k > 0$,

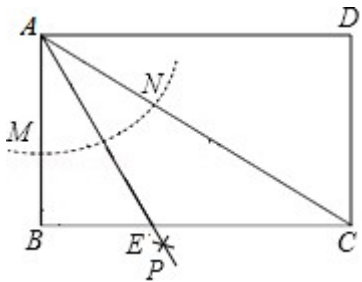
所以 $k = 6$,

故答案为 6.

【点评】 主要考查了反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 中 k 的几何意义, 即过双曲线上任意一点引 x 轴、 y 轴

垂线, 所得矩形面积为 $|k|$, 是经常考查的一个知识点; 这里体现了数形结合的思想, 做此类题一定要正确理解 k 的几何意义.

16. (4分) 如图, 矩形 $ABCD$, $\angle BAC = 60^\circ$, 以点 A 为圆心, 以任意长为半径作弧分别交 AB , AC 于点 M , N 两点, 再分别以点 M , N 为圆心, 以大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径作弧交于点 P , 作射线 AP 交 BC 于点 E , 若 $BE = 1$, 则矩形 $ABCD$ 的面积等于 $3\sqrt{3}$.



【考点】 KM : 等边三角形的判定与性质; LB : 矩形的性质

【专题】556: 矩形 菱形 正方形

【分析】根据矩形的性质得到 $\angle B = \angle BAD = 90^\circ$, 求得 $\angle ACB = 30^\circ$, 由作图知, AE 是 $\angle BAC$ 的平分线, 得到 $\angle BAE = \angle CAE = 30^\circ$, 根据等腰三角形的性质得到 $AE = CE$, 过 E 作 $EF \perp AC$ 于 F , 求得 $EF = BE = 1$, 求得 $AC = 2CF = 2\sqrt{3}$, 解直角三角形得到 $AB = \sqrt{3}$,

$BC = 3$, 于是得到结论.

【解答】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle B = \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 30^\circ,$$

由作图知, AE 是 $\angle BAC$ 的平分线,

$$\therefore \angle BAE = \angle CAE = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle ACE = 30^\circ,$$

$$\therefore AE = CE,$$

过 E 作 $EF \perp AC$ 于 F ,

$$\therefore EF = BE = 1,$$

$$\therefore AC = 2CF = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AB = \sqrt{3}, \quad BC = 3,$$

$$\therefore \text{矩形 } ABCD \text{ 的面积} = AB \cdot BC = 3\sqrt{3},$$

故答案为: $3\sqrt{3}$.

【点评】 本题主要考查矩形的性质, 作图—基本作图, 解题的关键是熟练掌握角平分线的定义和性质及直角三角形 30° 角所对边等于斜边的一半.

三、解答题: 本大题共 12 小题, 共 86 分.

17. (5 分) 计算: $|-2| - (\sqrt{3} + 1)^0 + (-2)^2 - \tan 45^\circ$.

【考点】 6E: 零指数幂; 2C: 实数的运算; T5: 特殊角的三角函数值

【专题】 511: 实数

【分析】 根据实数的混合运算顺序和运算法则计算可得.

【解答】 解: 原式 $= 2 - 1 + 4 - 1 = 4$.

【点评】 本题主要考查实数的运算, 解题的关键是掌握绝对值性质、零指数幂的规定、乘方定义和三角函数值.

18. (5 分) 化简: $a(1 - 2a) + 2(a + 1)(a - 1)$.

【考点】 4A: 单项式乘多项式; 4F: 平方差公式

【专题】 11: 计算题; 512: 整式; 66: 运算能力

【分析】 先去括号, 再注意到 $(a + 1)(a - 1)$ 可以利用平方差公式进行化简, 最后合并同类项即可

【解答】 解:

$$\text{原式} = a - 2a^2 + 2(a^2 - 1)$$

$$= a - 2a^2 + 2a^2 - 2$$

$$= a - 2$$

【点评】 本题主要考查平方差公式及单项式的乘法, 熟练运用公式及运算规则是解题的关键.

19. (5 分) 解不等式组:
$$\begin{cases} 2x - 1 < x + 5 \text{ ①} \\ \frac{x + 1}{3} < x - 1 \text{ ②} \end{cases}.$$

【考点】 CB: 解一元一次不等式组

【专题】 524: 一元一次不等式 (组) 及应用

【分析】先求出每个不等式的解集，再求出不等式组的解集即可.

【解答】解：
$$\begin{cases} 2x-1 < x+5 \text{ ①} \\ \frac{x+1}{3} < x-1 \text{ ②} \end{cases}$$

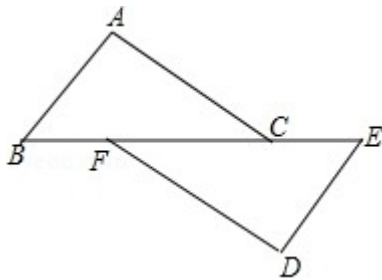
解不等式①得： $x < 6$ ，

解不等式②得： $x > 2$ ，

所以，不等式组的解集为 $2 < x < 6$.

【点评】本题考查了解一元一次不等式组，能根据不等式的解集找出不等式组的解集是解此题的关键.

20. (6分) 如图， $AB = DE$ ， $BF = EC$ ， $\angle B = \angle E$ ，求证： $AC \parallel DF$.



【考点】KD：全等三角形的判定与性质

【专题】553：图形的全等

【分析】要证明 $AC \parallel DF$ ，只要证明 $\angle ACB = \angle DFE$ 即可，要证明 $\angle ACB = \angle DFE$ ，只要证明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 即可，根据题目中的条件可以证明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，本题得以解决.

【解答】证明： $\because BF = EC$ ，

$$\therefore BF + FC = EC + FC,$$

$$\therefore BC = EF,$$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，

$$\begin{cases} AB = DE \\ \angle B = \angle E, \\ BC = EF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF (SAS),$$

$$\therefore \angle ACB = \angle DFE,$$

$$\therefore AC \parallel DF.$$

【点评】本题考查全等三角形的判定与性质、平行线的判定，解答本题的关键是明确题意，找出所求问题的条件，利用数形结合的思想解答.

21. (6分) 2019年5月, 以“寻根国学, 传承文明”为主题的兰州市第三届“国学少年强——国学知识挑战赛”总决赛拉开序幕. 小明晋级了总决赛, 比赛过程分两个环节, 参赛选手须在每个环节中各选一道题目.

第一环节: 写字注音、成语故事、国学常识、成语接龙 (分别用 A_1 , A_2 , A_3 , A_4 表示);

第二环节: 成语听写、诗词对句、经典诵读 (分别用 B_1 , B_2 , B_3 表示).

(1) 请用树状图或列表的方法表示小明参加总决赛抽取题目的所有可能结果;

(2) 求小明参加总决赛抽取题目是成语题目 (成语故事、成语接龙、成语听写) 的概率.

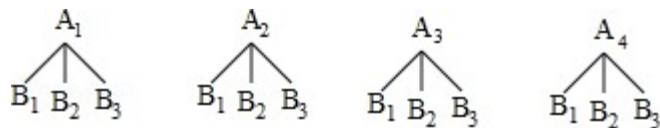
【考点】 X6: 列表法与树状图法

【专题】 543: 概率及其应用

【分析】 (1) 利用画树状图展示所有 12 种等可能的结果数;

(2) 找出小明参加总决赛抽取题目是成语题目的结果数, 然后根据概率公式计算即可.

【解答】 解: (1) 画树状图为:



共有 12 种等可能的结果数;

(2) 小明参加总决赛抽取题目是成语题目的结果数为 2,

所以小明参加总决赛抽取题目是成语题目 (成语故事、成语接龙、成语听写) 的概率

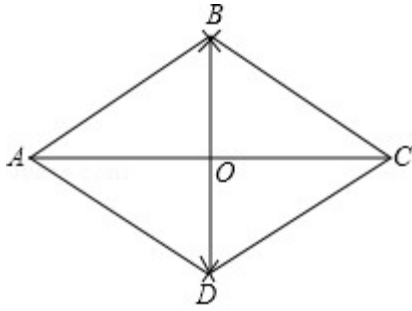
$$= \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

【点评】 本题考查了列表法与树状图法: 利用列表法或树状图法展示所有等可能的结果 n , 再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m , 然后利用概率公式计算事件 A 或事件 B 的概率.

22. (7分) 如图, $AC=8$, 分别以 A 、 C 为圆心, 以长度 5 为半径作弧, 两条弧分别相交于点 B 和 D . 依次连接 A 、 B 、 C 、 D , 连接 BD 交 AC 于点 O .

(1) 判断四边形 $ABCD$ 的形状并说明理由;

(2) 求 BD 的长.



【考点】L9：菱形的判定；KG：线段垂直平分线的性质

【专题】556：矩形 菱形 正方形

【分析】（1）利用作法得到四边相等，从而可判断四边形 $ABCD$ 为菱形；

（2）根据菱形的性质得 $OA = OC = 4$ ， $OB = OD$ ， $AC \perp BD$ ，然后利用勾股定理计算出 OB ，从而得到 BD 的长．

【解答】解：（1）四边形 $ABCD$ 为菱形；

由作法得 $AB = AD = CB = CD = 5$ ，

所以四边形 $ABCD$ 为菱形；

（2） $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，

$\therefore OA = OC = 4$ ， $OB = OD$ ， $AC \perp BD$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中， $OB = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ ，

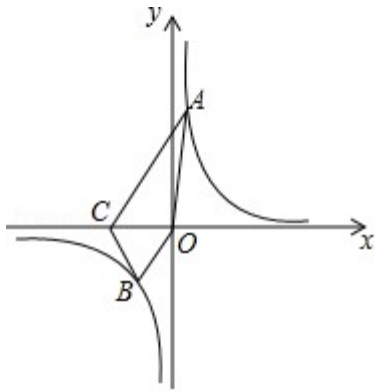
$\therefore BD = 2OB = 6$ ．

【点评】本题考查了菱形的判定：一组邻边相等的平行四边形是菱形（平行四边形 + 一组邻边相等 = 菱形）；四条边都相等的四边形是菱形．也考查了菱形的性质．

23. （7 分）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象经过等边三角形 BOC 的顶点 B ， $OC = 2$ ，点 A 在反比例函数图象上，连接 AC ， OA ．

（1）求反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的表达式；

（2）若四边形 $ACBO$ 的面积是 $3\sqrt{3}$ ，求点 A 的坐标．



【考点】KK：等边三角形的性质；G7：待定系数法求反比例函数解析式；G5：反比例函数系数 k 的几何意义；G4：反比例函数的性质；G6：反比例函数图象上点的坐标特征

【专题】534：反比例函数及其应用

【分析】(1) 作 $BD \perp OC$ 于 D ，根据等边三角形的性质和勾股定理求得 $OD=1$ ， $BD=\sqrt{3}$ ，

进而求得三角形 BOD 的面积，根据系数 k 的几何意义即可求得 $k=\sqrt{3}$ ，从而求得反比例函数的表达式；

(2) 求得三角形 AOC 的面积，即可求得 A 的纵坐标，代入解析式求得横坐标，得出点 A 的坐标。

【解答】解：(1) 作 $BD \perp OC$ 于 D ，

$\therefore \triangle BOC$ 是等边三角形，

$$\therefore OB=OC=2, \quad OD=\frac{1}{2}OC=1,$$

$$\therefore BD=\sqrt{OB^2-OD^2}=\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle OBD}=\frac{1}{2}OD \times BD=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$S_{\triangle OBD}=\frac{1}{2}|k|,$$

$$\therefore |k|=\sqrt{3},$$

$\therefore$ 反比例函数 $y=\frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象在一三象限，

$$\therefore k=\sqrt{3},$$

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y = \frac{\sqrt{3}}{x}$;

$$(2) \because S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} OC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3},$$

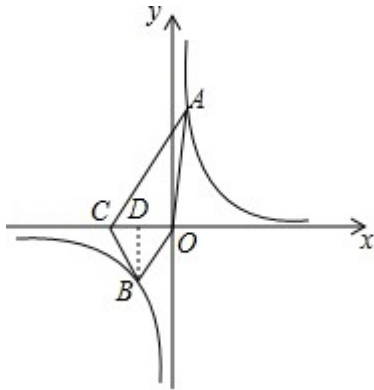
$$\therefore S_{\triangle AOC} = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3},$$

$$\because S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} OC \cdot y_A = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore y_A = 2\sqrt{3},$$

把 $y = 2\sqrt{3}$ 代入 $y = \frac{\sqrt{3}}{x}$, 求得 $x = \frac{1}{2}$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(\frac{1}{2}, 2\sqrt{3})$.



【点评】 本题考查了待定系数法求反比例函数的解析式, 反比例系数 k 的几何意义, 反比例函数图象上点的坐标特征, 此题的突破点是先由三角形的面积求出反比例函数的解析式.

24. (7 分) 为了解某校八年级学生一门课程的学习情况, 小佳和小丽分别对八年级 1 班和 2 班本门课程的期末成绩进行了调查分析.

小佳对八年级 1 班全班学生 (25 名) 的成绩进行分析, 过程如下:

收集、整理数据:

表一

分数段 班级	60,, $x < 70$	70,, $x < 80$	80,, $x < 90$	90,, $x, 100$
八年级 1 班	7	5	10	3

分析数据:

表二

统计量 班级	平均数	中位数	众数	极差	方差
八年级 1 班	78	80	85	36	105.28

小丽用同样的方法对八年级 2 班全班学生 (25 名) 的成绩进行分析, 数据如下:

表三

统计量 班级	平均数	中位数	众数	极差	方差
八年级 2 班	75	76	73	44	146.80

根据以上信息, 解决下列问题:

(1) 已知八年级 1 班学生的成绩在 $80 \leq x < 90$ 这一组的数据如下:

85, 87, 88, 80, 82, 85, 83, 85, 87, 85

根据上述数据, 将表二补充完整:

(2) 你认为哪个班级的成绩更为优异? 请说明理由.

【考点】 W_4 : 中位数; W_1 : 算术平均数; W_7 : 方差; W_6 : 极差; V_7 : 频数 (率) 分布表; W_5 : 众数

【专题】 542: 统计的应用

【分析】 (1) 根据中位数的定义找出第 13 个数, 然后确定 $80 \leq x < 90$ 这一组中最小的数即可;

(2) 从平均数、中位数、众数和方差的意义可判断八年级 1 班学生的成绩更为优异.

【解答】 解: (1) 共有 25 个数据, 第 13 个数落在 $80 \leq x < 90$ 这一组中, 此组最小的数为第 13 个数,

所以八年级 1 班学生的成绩的中位数为 80;

故答案为 80;

(2) 八年级 1 班学生的成绩更为优异.

理由如下: 八年级 1 班学生的成绩的平均数比 2 班高, 1 班的中位数比 2 班的中位数大, 并且 1 班的众数为 85, 比 2 班的众数大, 1 班的方差比 2 班小, 比较稳定.

【点评】 本题考查了方差: 方差是反映一组数据的波动大小的一个量. 方差越大, 则平均值的离散程度越大, 稳定性也越小; 反之, 则它与其平均值的离散程度越小, 稳定性越好. 也考查了平均数、众数、中位数.

25. (7 分) 某数学课题研究小组针对兰州市住房窗户 “如何设计遮阳蓬” 这一课题进行了探究, 过程如下:

问题提出:

如图 1 是某住户窗户上方安装的遮阳蓬, 要求设计的遮阳蓬能最大限度地遮住夏天炎热的阳光, 又能最大限度地使冬天温暖的阳光射入室内.



图1



图2

方案设计:

如图 2, 该数学课题研究小组通过调查研究设计了垂直于墙面 AC 的遮阳蓬 CD .

数据收集:

通过查阅相关资料和实际测量: 兰州市一年中, 夏至日这一天的正午时刻太阳光线 DA 与遮阳蓬 CD 的夹角 $\angle ADC$ 最大 ($\angle ADC = 77.44^\circ$); 冬至日这一天的正午时刻, 太阳光线 DB 与遮阳蓬 CD 的夹角 $\angle BDC$ 最小 ($\angle BDC = 30.56^\circ$). 窗户的高度 $AB = 2m$.

问题解决:

根据上述方案及数据, 求遮阳蓬 CD 的长.

(结果精确到 $0.1m$, 参考数据: $\sin 30.56^\circ \approx 0.51$, $\cos 30.56^\circ \approx 0.86$, $\tan 30.56^\circ \approx 0.59$, $\sin 77.44^\circ \approx 0.98$, $\cos 77.44^\circ \approx 0.22$, $\tan 77.44^\circ \approx 4.49$)

【考点】T8: 解直角三角形的应用

【专题】55E: 解直角三角形及其应用

【分析】根据正切的定义分别用 CD 表示出 BC 、 AC , 根据题意列式计算即可.

【解答】解: 在 $Rt\triangle DCB$ 中, $\tan \angle BDC = \frac{BC}{CD}$,

则 $BC = CD \cdot \tan \angle BDC \approx 0.59CD$,

在 $Rt\triangle DCA$ 中, $\tan \angle ADC = \frac{AC}{CD}$,

则 $AC = CD \cdot \tan \angle ADC \approx 4.49CD$,

由题意得, $AC - BC = AB$, 即 $4.49CD - 0.59CD = 2$,

解得, $CD \approx 0.5m$,

答: 遮阳蓬 CD 的长约为 $0.5m$.

【点评】 本题考查的是解直角三角形的应用, 掌握锐角三角函数的定义是解题的关键.

26. (9 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 6cm$, $BC = 8cm$, 点 D 为 BC 的中点, $BE = DE$, 将 $\angle BDE$ 绕点 D 顺时针旋转 α 度 ($0^\circ < \alpha < 83^\circ$), 角的两边分别交直线 AB 于 M 、 N 两点, 设 B 、 M 两点间的距离为 xcm , M 、 N 两点间的距离为 y cm .

小涛根据学习函数的经验, 对函数 y 随自变量 x 的变化而变化的规律进行了探究.

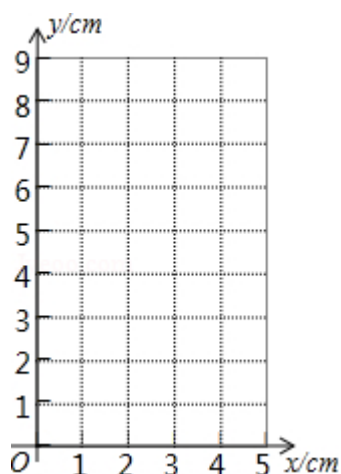
下面是小涛的探究过程, 请补充完整.

(1) 列表: 下表的已知数据是 B 、 M 两点间的距离 x 进行取点、画图、测量, 分别得到了 y 与 x 的几组对应值:

x/m	0	0.30	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	$\frac{8}{3}$	3.00	3.50	3.68	3.81	3.90	3.93	4.10
y/m	3	2.88	2.81	2.69	2.67	2.80	3.15		3.85	5.24	6.01	6.71	7.27	7.44	8.87

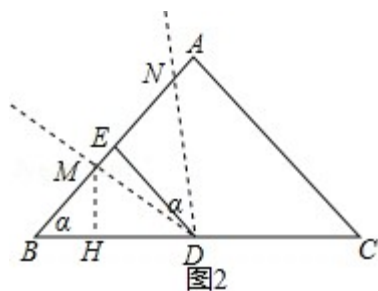
请你通过计算, 补全表格:

(2) 描点、连线, 在平面直角坐标系 xOy 中, 描出表格中各组数值所对应的点 (x, y) , 并画出函数 y 关于 x 的图象.



(3) 探究性质: 随着自变量 x 的不断增大, 函数 y 的变化趋势: _____.

(4) 解决问题: 当 $MN = 2BM$ 时, BM 的长度大约是 _____ cm . (保留两位小数).



则 $BH = BM \cos \alpha = \frac{16}{9}$, 则 $EH = \frac{8\sqrt{5}}{9}$,

$$MD^2 = HD^2 + EH^2 = \frac{80}{9},$$

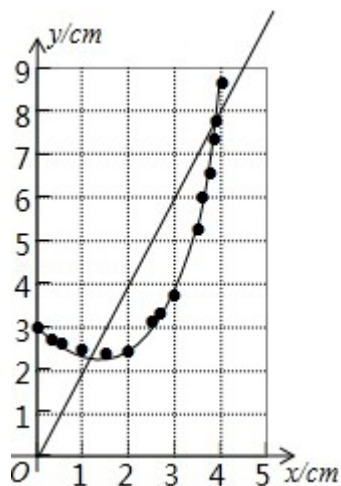
则 $BD^2 = BM^2 + MD^2$,

故 $\angle BMD = 90^\circ$,

则 $y = MN = MD \tan \alpha = (DB \sin \alpha) \tan \alpha = \frac{10}{3}$;

故: 答案为 $3, \frac{10}{3}$;

(2) 描点出如下图象,



从图象可以看出: $0, x, 1.25$ 时, y 随 x 最大而减小,

当 $1.25 < x, 4.10$ 时, y 随 x 最大而增大;

(3) $MN = 2BM$, 即 $y = 2x$,

在上图中作直线 $y = 2x$,

直线与曲线交点的纵坐标为: 2.68 和 7.45,

故答案为: 2.68 或 7.45.

【点评】本题为动点问题的函数图象, 涉及到解直角三角形、函数作图等, 此类题目难点于,

弄清 x 、 y 代表的意义, 估计或计算解出表格空出的数据.

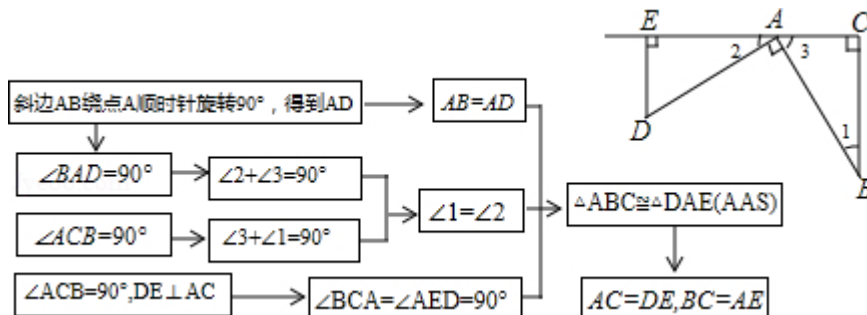
27. (10分) 通过对下面数学模型的研究学习, 解决问题.

【模型呈现】

如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$, $\angle ACB=90^\circ$, 将斜边 AB 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到 AD , 过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E , 可以推理得到 $\triangle ABC \cong \triangle DAE$, 进而得到 $AC=DE$, $BC=AE$.

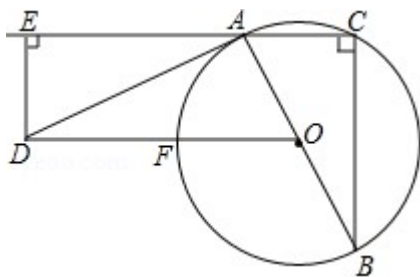
我们把这个数学模型成为“K型”.

推理过程如下:



【模型应用】

如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, $\angle ACB=90^\circ$, $BC=2$, 将斜边 AB 绕点 A 顺时针旋转一定的角度得到 AD , 过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E , $\angle DAE = \angle ABC$, $DE=1$, 连接 DO 交 $\odot O$ 于点 F .



(1) 求证: AD 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 连接 FC 交 AB 于点 G , 连接 FB . 求证: $FG^2 = GO \cdot GB$.

【考点】MR: 圆的综合题

【专题】152: 几何综合题; 553: 图形的全等; 554: 等腰三角形与直角三角形; 558: 平移、旋转与对称; 55A: 与圆有关的位置关系; 559: 圆的有关概念及性质; 55D: 图形的相似

【分析】(1) 因为直角三角形的外心为斜边中点, 所以点 O 在 AB 上, AB 为 $\odot O$ 直径, 故只需证 $AD \perp AB$ 即可. 由 $\angle ABC + \angle BAC = 90^\circ$ 和 $\angle DAE = \angle ABC$ 可证得

$\angle DAE + \angle BAC = 90^\circ$, 而 E 、 A 、 C 在同一直线上, 用 180° 减去 90° 即为 $\angle BAD = 90^\circ$, 得证.

(2) 依题意画出图形, 由要证的结论 $FG^2 = GO \cdot GB$ 联想到对应边成比例, 所以需证 $\triangle FGO \sim \triangle BGF$. 其中 $\angle FGO = \angle BGF$ 为公共角, 即需证 $\angle FOG = \angle BFG$. $\angle BFG$ 为圆周角, 所对的弧为弧 BC , 故连接 OC 后有 $\angle BFG = \frac{1}{2} \angle BOC$, 问题又转化为证 $\angle FOG = \frac{1}{2} \angle BOC$.

把 DO 延长交 BC 于点 H 后, 有 $\angle FOG = \angle BOH$, 故问题转化为证 $\angle BOH = \frac{1}{2} \angle BOC$. 只

要 $OH \perp BC$, 由等腰三角形三线合一即有 $\angle BOH = \frac{1}{2} \angle BOC$, 故问题继续转化为证

$DH \parallel CE$. 联系【模型呈现】发现能证 $\triangle DEA \cong \triangle ACB$, 得到 $AE = BC = 2$, $AC = DE = 1$,

即能求 $AD = AB = \sqrt{5}$. 又因为 O 为 AB 中点, 可得到 $\frac{AO}{DE} = \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{AD}{AE}$, 再加上第 (1) 题

证得 $\angle BAD = 90^\circ$, 可得 $\triangle DAO \sim \triangle AED$, 所以 $\angle ADO = \angle EAD$, $DO \parallel EA$, 得证.

【解答】证明: (1) $\because O$ 为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的外接圆

$\therefore O$ 为斜边 AB 中点, AB 为直径

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$

$\therefore \angle ABC + \angle BAC = 90^\circ$

$\therefore \angle DAE = \angle ABC$

$\therefore \angle DAE + \angle BAC = 90^\circ$

$\therefore \angle BAD = 180^\circ - (\angle DAE + \angle BAC) = 90^\circ$

$\therefore AD \perp AB$

$\therefore AD$ 是 $\odot O$ 的切线

(2) 延长 DO 交 BC 于点 H , 连接 OC

$\because DE \perp AC$ 于点 E

$\therefore \angle DEA = 90^\circ$

$\because AB$ 绕点 A 旋转得到 AD

$\therefore AB = AD$

在 $\triangle DEA$ 与 $\triangle ACB$ 中

$$\begin{cases} \angle DEA = \angle ACB = 90^\circ \\ \angle DAE = \angle ABC \\ DA = AB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DEA \cong \triangle ACB (AAS)$$

$$\therefore AE = BC = 2, \quad AC = DE = 1$$

$$\therefore AD = AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{5}$$

$\therefore O$ 为 AB 中点

$$\therefore AO = \frac{1}{2} AB = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore \frac{AO}{DE} = \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{AD}{AE}$$

$$\therefore \angle DAO = \angle AED = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle DAO \sim \triangle AED$$

$$\therefore \angle ADO = \angle EAD$$

$$\therefore DO \parallel EA$$

$$\therefore \angle OHB = \angle ACB = 90^\circ, \text{ 即 } DH \perp BC$$

$$\therefore OB = OC$$

$$\therefore OH \text{ 平分 } \angle BOC, \text{ 即 } \angle BOH = \frac{1}{2} \angle BOC$$

$$\therefore \angle FOG = \angle BOH, \quad \angle BFG = \frac{1}{2} \angle BOC$$

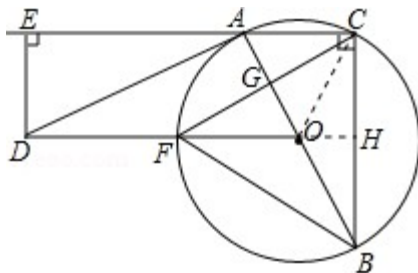
$$\therefore \angle FOG = \angle BFG$$

$$\therefore \angle FGO = \angle BGF$$

$$\therefore \triangle FGO \sim \triangle BGF$$

$$\therefore \frac{FG}{BG} = \frac{GO}{GF}$$

$$\therefore FG^2 = GO \cdot GB$$



【点评】本题考查了三角形外心定义，圆的切线判定，旋转的性质，全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，平行线的判定和性质，垂径定理，等腰三角形三线合一，圆周角定理．其中第（2）题证明 $DO \parallel EA$ 进而得到 DO 垂直 BC 是解题关键．

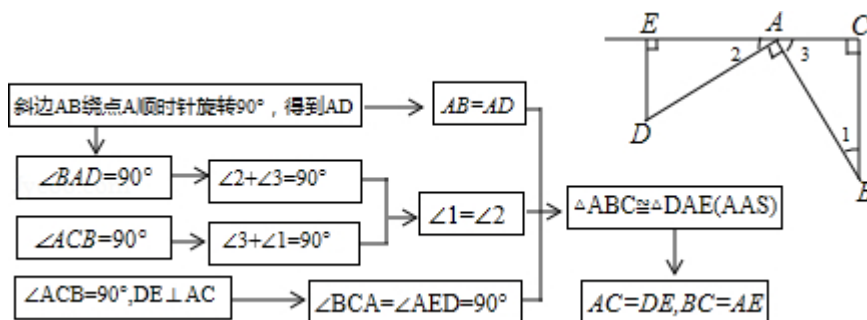
28. （12分）通过对下面数学模型的研究学习，解决问题．

【模型呈现】

如图，在 $Rt\triangle ABC$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，将斜边 AB 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到 AD ，过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E ，可以推理得到 $\triangle ABC \cong \triangle DAE$ ，进而得到 $AC = DE$ ， $BC = AE$ ．

我们把这个数学模型成为“K型”．

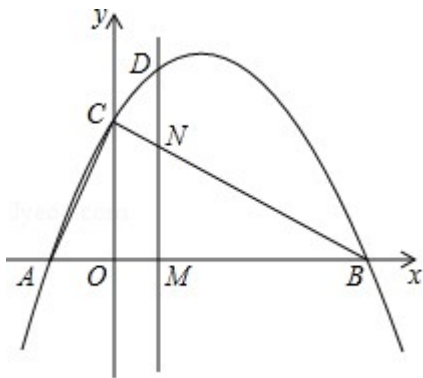
推理过程如下：



【模型迁移】

二次函数 $y = ax^2 + bx + 2$ 的图象交 x 轴于点 $(-1, 0)$ ， $B(4, 0)$ 两点，交 y 轴于点 C ．动点 M

从点 A 出发，以每秒 2 个单位长度的速度沿 AB 方向运动，过点 M 作 $MN \perp x$ 轴交直线 BC 于点 N ，交抛物线于点 D ，连接 AC ，设运动的时间为 t 秒．



（1）求二次函数 $y = ax^2 + bx + 2$ 的表达式；

（2）连接 BD ，当 $t = \frac{3}{2}$ 时，求 $\triangle DNB$ 的面积；

（3）在直线 MN 上存在一点 P ，当 $\triangle PBC$ 是以 $\angle BPC$ 为直角的等腰直角三角形时，求此

时点 D 的坐标;

(4) 当 $t = \frac{5}{4}$ 时, 在直线 MN 上存在一点 Q , 使得 $\angle AQC + \angle OAC = 90^\circ$, 求点 Q 的坐标.

【考点】 HF : 二次函数综合题

【专题】535: 二次函数图象及其性质; 25: 动点型

【分析】(1) 将点 $(-1, 0)$, $B(4, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx + 2$ 即可;

(2) 由已知分别求出 $M(2, 0)$, $N(2, 1)$, $D(2, 3)$, 根据 $\therefore \triangle DNB$ 的面积 $= \triangle DMB$ 的面积 $- \triangle MNB$ 的面积即可求解;

(3) 由已知可得 $M(2t-1, 0)$, 设 $P(2t-1, m)$, 根据勾股定理可得 $PC^2 = (2t-1)^2 + (m-2)^2$,

$PB^2 = (2t-5)^2 + m^2$, 再由 $PB = PC$, 得到 m 与 t 的关系式: $m = 4t - 5$, 因为 $PC \perp PB$,

则有 $\frac{4t-7}{2t-1} \cdot \frac{4t-5}{2t-5} = -1$ 求出 $t = 1$ 或 $t = 2$, 即可求 D 点坐标;

(4) 当 $t = \frac{5}{4}$ 时, $M(\frac{3}{2}, 0)$, 可知点 Q 在抛物线对称性 $x = \frac{3}{2}$ 上; 过点 A 作 AC 的垂线,

以 M 为圆心 AB 为直径构造圆, 圆与 $x = \frac{3}{2}$ 的交点分别为 Q_1 与 Q_2 , 由 $AB = 5$, 可得圆半径

$AM = \frac{5}{2}$, 即可求 Q 点坐标分别为 $(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$, $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$.

【解答】解: (1) 将点 $(-1, 0)$, $B(4, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx + 2$,

$$\therefore a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2},$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2;$$

(2) $C(0, 2)$,

$$\therefore BC \text{ 的直线解析式为 } y = -\frac{1}{2}x + 2,$$

当 $t = \frac{3}{2}$ 时, $AM = 3$,

$$\therefore AB = 5,$$

$$\therefore MB = 2,$$

$$\therefore M(2,0), N(2,1), D(2,3),$$

$$\therefore \triangle DNB \text{ 的面积} = \triangle DMB \text{ 的面积} - \triangle MNB \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \times MB \times DM - \frac{1}{2} \times MB \times MN = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2;$$

$$(3) \because BM = 5 - 2t,$$

$$\therefore M(2t-1,0),$$

$$\text{设 } P(2t-1, m),$$

$$\because PC^2 = (2t-1)^2 + (m-2)^2, PB^2 = (2t-5)^2 + m^2,$$

$$\because PB = PC,$$

$$\therefore (2t-1)^2 + (m-2)^2 = (2t-5)^2 + m^2,$$

$$\therefore m = 4t - 5,$$

$$\therefore P(2t-1, 4t-5),$$

$$\because PC \perp PB,$$

$$\therefore \frac{4t-7}{2t-1} \cdot \frac{4t-5}{2t-5} = -1$$

$$\therefore t=1 \text{ 或 } t=2,$$

$$\therefore M(1,0) \text{ 或 } M(3,0),$$

$$\therefore D(1,3) \text{ 或 } D(3,2);$$

$$(4) \text{ 当 } t = \frac{5}{4} \text{ 时, } M(\frac{3}{2}, 0),$$

$$\therefore \text{点 } Q \text{ 在抛物线对称性 } x = \frac{3}{2} \text{ 上,}$$

如图: 过点 A 作 AC 的垂线, 以 M 为圆心 AB 为直径构造圆, 圆与 $x = \frac{3}{2}$ 的交点分别为 Q_1

与 Q_2 ,

$$\because AB = 5,$$

$$\therefore AM = \frac{5}{2},$$

$$\because \angle AQ_1C + \angle OAC = 90^\circ, \angle OAC + \angle MAG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AQ_1C = \angle MAG,$$

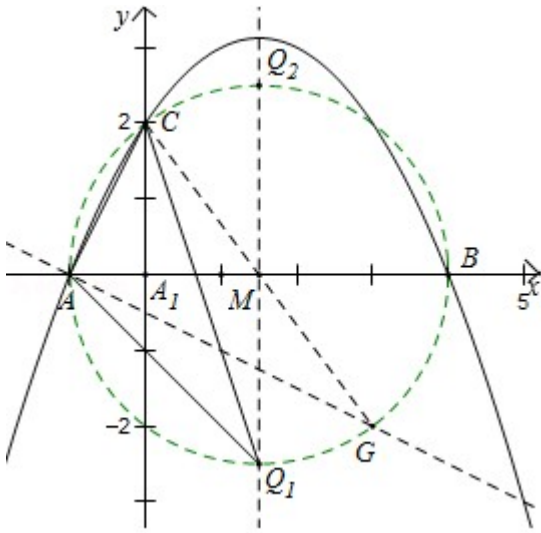
$$\text{又} \because \angle AQ_1C = \angle CGA = \angle MAG,$$

$$\therefore Q_1\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right),$$

$\therefore Q_1$ 与 Q_2 关于 x 轴对称,

$$\therefore Q_2\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right),$$

$\therefore Q$ 点坐标分别为 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$;



【点评】 本题考查二次函数的图象及性质，动点问题；能够熟练掌握二次函数解析式与相应点的求法，熟悉等腰直角三角形的性质，应用勾股定理和直线垂直的性质建立坐标之间的联系，借助圆周角的性质，等腰三角形的性质，互余角的性质将角进行转换是解题的关键。

考点卡片

1. 相反数

(1) 相反数的概念: 只有符号不同的两个数叫做互为相反数.

(2) 相反数的意义: 掌握相反数是成对出现的, 不能单独存在, 从数轴上看, 除 0 外, 互为相反数的两个数, 它们分别在原点两旁且到原点距离相等.

(3) 多重符号的化简: 与 “+” 个数无关, 有奇数个 “-” 号结果为负, 有偶数个 “-” 号, 结果为正.

(4) 规律方法总结: 求一个数的相反数的方法就是在这个数的前边添加 “-”, 如 a 的相反数是 $-a$, $m+n$ 的相反数是 $-(m+n)$, 这时 $m+n$ 是一个整体, 在整体前面添负号时, 要用小括号.

2. 实数的运算

(1) 实数的运算和在有理数范围内一样, 值得一提的是, 实数既可以进行加、减、乘、除、乘方运算, 又可以进行开方运算, 其中正实数可以开平方.

(2) 在进行实数运算时, 和有理数运算一样, 要从高级到低级, 即先算乘方、开方, 再算乘除, 最后算加减, 有括号的要先算括号里面的, 同级运算要按照从左到右的顺序进行. 另外, 有理数的运算律在实数范围内仍然适用.

【规律方法】实数运算的 “三个关键”

1. 运算法则: 乘方和开方运算、幂的运算、指数 (特别是负整数指数, 0 指数) 运算、根式运算、特殊三角函数值的计算以及绝对值的化简等.

2. 运算顺序: 先乘方, 再乘除, 后加减, 有括号的先算括号里面的, 在同一级运算中要从左到右依次运算, 无论何种运算, 都要注意先定符号后运算.

3. 运算律的使用: 使用运算律可以简化运算, 提高运算速度和准确度.

3. 单项式乘多项式

(1) 单项式与多项式相乘的运算法则: 单项式与多项式相乘, 就是用单项式去乘多项式的每一项, 再把所得的积相加.

(2) 单项式与多项式相乘时, 应注意以下几个问题:

① 单项式与多项式相乘实质上是转化为单项式乘以单项式; ② 用单项式去乘多项式中的每一项时, 不能漏乘; ③ 注意确定积的符号.

4. 平方差公式

(1) 平方差公式: 两个数的和与这两个数的差相乘, 等于这两个数的平方差.

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

(2) 应用平方差公式计算时, 应注意以下几个问题:

- ① 左边是两个二项式相乘, 并且这两个二项式中有一项完全相同, 另一项互为相反数;
- ② 右边是相同项的平方减去相反项的平方;
- ③ 公式中的 a 和 b 可以是具体数, 也可以是单项式或多项式;
- ④ 对形如两数和与这两数差相乘的算式, 都可以运用这个公式计算, 且会比用多项式乘以多项式法则简便.

5. 提公因式法与公式法的综合运用

提公因式法与公式法的综合运用.

6. 分式的加减法

(1) 同分母分式加减法法则: 同分母的分式相加减, 分母不变, 把分子相加减.

(2) 异分母分式加减法法则: 把分母不相同的几个分式化成分母相同的分式, 叫做通分, 经过通分, 异分母分式的加减就转化为同分母分式的加减.

说明:

- ① 分式的通分必须注意整个分子和整个分母, 分母是多项式时, 必须先分解因式, 分子是多项式时, 要把分母所乘的相同式子与这个多项式相乘, 而不能只同其中某一项相乘.
- ② 通分是和约分是相反的一种变换. 约分是把分子和分母的所有公因式约去, 将分式化为较简单的形式; 通分是分别把每一个分式的分子分母同乘以相同的因式, 使几个较简单的分式变成分母相同的较复杂的形式. 约分是对一个分式而言的; 通分则是对两个或两个以上的分式来说的.

7. 零指数幂

零指数幂: $a^0=1$ ($a \neq 0$)

由 $a^m \div a^m = 1$, $a^m \div a^m = a^{m-m} = a^0$ 可推出 $a^0=1$ ($a \neq 0$)

注意: $0^0 \neq 1$.

8. 二次根式的加减法

(1) 法则: 二次根式相加减, 先把各个二次根式化成最简二次根式, 再把被开方数相同的二次根式进行合并, 合并方法为系数相加减, 根式不变.

(2) 步骤:

- ① 如果有括号, 根据去括号法则去掉括号.
- ② 把不是最简二次根式的二次根式进行化简.
- ③ 合并被开方数相同的二次根式.

(3) 合并被开方数相同的二次根式的方法:

二次根式化成最简二次根式, 如果被开方数相同则可以进行合并. 合并时, 只合并根式外的因式, 即系数相加减, 被开方数和根指数不变.

9. 由实际问题抽象出二元一次方程组

(1) 由实际问题列方程组是把“未知”转化为“已知”的重要方法, 它的关键是把已知量和未知量联系起来, 找出题目中的相等关系.

(2) 一般来说, 有几个未知量就必须列出几个方程, 所列方程必须满足: ① 方程两边表示的是同类量; ② 同类量的单位要统一; ③ 方程两边的数值要相符.

(3) 找等量关系是列方程组的关键和难点, 有如下规律和方法:

① 确定应用题的类型, 按其一般规律方法找等量关系. ② 将问题中给出的条件按意思分割成两个方面, 有“: ”时一般“: ”前后各一层, 分别找出两个等量关系. ③ 借助表格提供信息的, 按横向或纵向去分别找等量关系. ④ 图形问题, 分析图形的长、宽, 从中找等量关系.

10. 一元二次方程的解

(1) 一元二次方程的解(根)的意义:

能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值是一元二次方程的解. 又因为只含有一个未知数的方程的解也叫做这个方程的根, 所以, 一元二次方程的解也称为一元二次方程的根.

(2) 一元二次方程一定有两个解, 但不一定有两个实数解. 这 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的两实数根, 则下列两等式成立, 并可利用这两个等式求解未知量.

$$ax_1^2+bx_1+c=0 \quad (a \neq 0), \quad ax_2^2+bx_2+c=0 \quad (a \neq 0).$$

11. 解一元一次不等式组

(1) 一元一次不等式组的解集: 几个一元一次不等式的解集的公共部分, 叫做由它们所组成的不等式组的解集.

(2) 解不等式组: 求不等式组的解集的过程叫解不等式组.

(3) 一元一次不等式组的解法: 解一元一次不等式组时, 一般先求出其中各不等式的解集, 再求出这些解集的公共部分, 利用数轴可以直观地表示不等式组的解集.

方法与步骤: ① 求不等式组中每个不等式的解集; ② 利用数轴求公共部分.

解集的规律: 同大取大; 同小取小; 大小小大中间找; 大大小小找不到.

12. 动点问题的函数图象

函数图象是典型的数形结合, 图象应用信息广泛, 通过看图获取信息, 不仅可以解决生活中的实际问题, 还可以提高分析问题、解决问题的能力.

用图象解决问题时, 要理清图象的含义即会识图.

13. 反比例函数的性质

反比例函数的性质

- (1) 反比例函数 $y (k \neq 0)$ 的图象是双曲线;
- (2) 当 $k > 0$, 双曲线的两支分别位于第一、第三象限, 在每一象限内 y 随 x 的增大而减小;
- (3) 当 $k < 0$, 双曲线的两支分别位于第二、第四象限, 在每一象限内 y 随 x 的增大而增大.

注意: 反比例函数的图象与坐标轴没有交点.

14. 反比例函数系数 k 的几何意义

比例系数 k 的几何意义

在反比例函数 y 图象中任取一点, 过这一点向 x 轴和 y 轴分别作垂线, 与坐标轴围成的矩形的面积是定值 $|k|$.

在反比例函数的图象上任意一点向坐标轴作垂线, 这一点和垂足以及坐标原点所构成的三角形的面积是 $|k|$, 且保持不变.

15. 反比例函数图象上点的坐标特征

反比例函数 $y = k/x$ (k 为常数, $k \neq 0$) 的图象是双曲线,

- ① 图象上的点 (x, y) 的横纵坐标的积是定值 k , 即 $xy = k$;
- ② 双曲线是关于原点对称的, 两个分支上的点也是关于原点对称;
- ③ 在 $y = k/x$ 图象中任取一点, 过这一点向 x 轴和 y 轴分别作垂线, 与坐标轴围成的矩形的面积是定值 $|k|$.

16. 待定系数法求反比例函数解析式

用待定系数法求反比例函数的解析式要注意:

- (1) 设出含有待定系数的反比例函数解析式 y (k 为常数, $k \neq 0$);
- (2) 把已知条件 (自变量与函数的对应值) 带入解析式, 得到待定系数的方程;
- (3) 解方程, 求出待定系数;
- (4) 写出解析式.

17. 二次函数图象上点的坐标特征

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象是抛物线, 顶点坐标是 $(\quad, \quad)$.

- ① 抛物线是关于对称轴 x 成轴对称, 所以抛物线上的点关于对称轴对称, 且都满足函数关系式. 顶点是抛物线的最高点或最低点.
- ② 抛物线与 y 轴交点的纵坐标是函数解析式中的 c 值.
- ③ 抛物线与 x 轴的两个交点关于对称轴对称, 设两个交点分别是 $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, 则其对称轴为 x .

18. 二次函数综合题

(1) 二次函数图象与其他函数图象相结合问题

解决此类问题时, 先根据给定的函数或函数图象判断出系数的符号, 然后判断新的函数关系式中系数的符号, 再根据系数与图象的位置关系判断出图象特征, 则符合所有特征的图象即为正确选项.

(2) 二次函数与方程、几何知识的综合应用

将函数知识与方程、几何知识有机地结合在一起. 这类试题一般难度较大. 解这类问题关键是善于将函数问题转化为方程问题, 善于利用几何图形的有关性质、定理和二次函数的知识, 并注意挖掘题目中的一些隐含条件.

(3) 二次函数在实际生活中的应用题

从实际问题中分析变量之间的关系, 建立二次函数模型. 关键在于观察、分析、创建, 建立直角坐标系下的二次函数图象, 然后数形结合解决问题, 需要注意的是自变量及函数的取值范围要使实际问题有意义.

19. 平行线的性质

1、平行线性质定理

定理 1: 两条平行线被第三条直线所截, 同位角相等. 简单说成: 两直线平行, 同位角相等.

定理 2: 两条平行线被地三条直线所截, 同旁内角互补. . 简单说成: 两直线平行, 同旁内角互补.

定理 3: 两条平行线被第三条直线所截, 内错角相等. 简单说成: 两直线平行, 内错角相等.

2、两条平行线之间的距离处处相等.

20. 全等三角形的判定与性质

(1) 全等三角形的判定是结合全等三角形的性质证明线段和角相等的重要工具. 在判定三角形全等时, 关键是选择恰当的判定条件.

(2) 在应用全等三角形的判定时, 要注意三角形间的公共边和公共角, 必要时添加适当辅助线构造三角形.

21. 线段垂直平分线的性质

(1) 定义: 经过某一条线段的中点, 并且垂直于这条线段的直线, 叫做这条线段的垂直平分线(中垂线)垂直平分线, 简称“中垂线”.

(2) 性质: ①垂直平分线垂直且平分其所在线段. ____ ②垂直平分线上任意一点, 到线段两端点的距离相等. ____ ③三角形三条边的垂直平分线相交于一点, 该点叫外心, 并且这一点到三个顶点的距离相等.

22. 等腰三角形的性质

(1) 等腰三角形的概念

有两条边相等的三角形叫做等腰三角形.

(2) 等腰三角形的性质

① 等腰三角形的两腰相等

② 等腰三角形的两个底角相等. 【简称: 等边对等角】

③ 等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高相互重合. 【三线合一】

(3) 在①等腰; ②底边上的高; ③底边上的中线; ④顶角平分线. 以上四个元素中, 从中任意取出两个元素当成条件, 就可以得到另外两个元素为结论.

23. 等边三角形的性质

(1) 等边三角形的定义: 三条边都相等的三角形叫做等边三角形, 等边三角形是特殊的等腰三角形.

① 它可以作为判定一个三角形是否为等边三角形的方法;

② 可以得到它与等腰三角形的关系: 等边三角形是等腰三角形的特殊情况. 在等边三角形中, 腰和底、顶角和底角是相对而言的.

(2) 等边三角形的性质: 等边三角形的三个内角都相等, 且都等于 60° .

等边三角形是轴对称图形, 它有三条对称轴; 它的任意一角的平分线都垂直平分对边, 三边的垂直平分线是对称轴.

24. 等边三角形的判定与性质

(1) 等边三角形是一个非常特殊的几何图形, 它的角的特殊性给有关角的计算奠定了基础, 它的边角性质为证明线段、角相等提供了便利条件. 同是等边三角形又是特殊的等腰三角形, 同样具备三线合一的性质, 解题时要善于挖掘图形中的隐含条件广泛应用.

(2) 等边三角形的特性如: 三边相等、有三条对称轴、一边上的高可以把等边三角形分成含有 30° 角的直角三角形、连接三边中点可以把等边三角形分成四个全等的小等边三角形等.

(3) 等边三角形判定最复杂, 在应用时要抓住已知条件的特点, 选取恰当的判定方法, 一般地, 若从一般三角形出发可以通过三条边相等判定、通过三个角相等判定; 若从等腰三角形出发, 则想法获取一个 60° 的角判定.

25. 菱形的判定

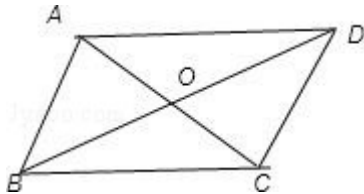
① 菱形定义: 一组邻边相等的平行四边形是菱形 (平行四边形+一组邻边相等=菱形);

② 四条边都相等的四边形是菱形.

几何语言: $\because AB=BC=CD=DA \therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形;

③ 对角线互相垂直的平行四边形是菱形 (或 “对角线互相垂直平分的四边形是菱形”).

几何语言: $\because AC \perp BD$, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 $\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是菱形



26. 矩形的性质

(1) 矩形的定义: 有一个角是直角的平行四边形是矩形.

(2) 矩形的性质

① 平行四边形的性质矩形都具有;

② 角: 矩形的四个角都是直角;

③ 边: 邻边垂直;

④ 对角线: 矩形的对角线相等;

⑤ 矩形是轴对称图形, 又是中心对称图形. 它有 2 条对称轴, 分别是每组对边中点连线所在的直线; 对称中心是两条对角线的交点.

(3) 由矩形的性质, 可以得到直角三角形的一个重要性质, 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

27. 正方形的性质

(1) 正方形的定义: 有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形叫做正方形.

(2) 正方形的性质

① 正方形的四条边都相等, 四个角都是直角;

② 正方形的两条对角线相等, 互相垂直平分, 并且每条对角线平分一组对角;

③ 正方形具有四边形、平行四边形、矩形、菱形的一切性质.

④ 两条对角线将正方形分成四个全等的等腰直角三角形, 同时, 正方形又是轴对称图形, 有四条对称轴.

28. 圆内接四边形的性质

(1) 圆内接四边形的性质:

① 圆内接四边形的对角互补.

② 圆内接四边形的任意一个外角等于它的内对角 (就是和它相邻的内角的对角).

(2) 圆内接四边形的性质是沟通角相等关系的重要依据, 在应用此性质时, 要注意与圆周角定理结合起来. 在应用时要注意是对角, 而不是邻角互补.

29. 圆的综合题

圆的综合题.

30. 轴对称图形

(1) 轴对称图形的概念:

如果一个图形沿一条直线折叠, 直线两旁的部分能够互相重合, 这个图形叫做轴对称图形. 这条直线叫做对称轴, 这时, 我们也可以说这个图形关于这条直线 (成轴) 对称.

(2) 轴对称图形是针对一个图形而言的, 是一种具有特殊性质图形, 被一条直线分割成的两部分沿着对称轴折叠时, 互相重合; 轴对称图形的对称轴可以是一条, 也可以是多条甚至无数条.

(3) 常见的轴对称图形:

等腰三角形, 矩形, 正方形, 等腰梯形, 圆等等.

31. 翻折变换 (折叠问题)

1、翻折变换 (折叠问题) 实质上就是轴对称变换.

2、折叠的性质: 折叠是一种对称变换, 它属于轴对称, 折叠前后图形的形状和大小不变, 位置变化, 对应边和对应角相等.

3、在解决实际问题时, 对于折叠较为复杂的问题可以实际操作图形的折叠, 这样便于找到图形间的关系.

首先清楚折叠和轴对称能够提供给我们隐含的并且可利用的条件. 解题时, 我们常常设要求的线段长为 x , 然后根据折叠和轴对称的性质用含 x 的代数式表示其他线段的长度, 选择适当的直角三角形, 运用勾股定理列出方程求出答案. 我们运用方程解决时, 应认真审题设出正确的未知数.

32. 坐标与图形变化-平移

(1) 平移变换与坐标变化

① 向右平移 a 个单位, 坐标 $P(x, y) \Rightarrow P(x+a, y)$

① 向左平移 a 个单位, 坐标 $P(x, y) \Rightarrow P(x-a, y)$

① 向上平移 b 个单位, 坐标 $P(x, y) \Rightarrow P(x, y+b)$

① 向下平移 b 个单位, 坐标 $P(x, y) \Rightarrow P(x, y-b)$

(2) 在平面直角坐标系内, 把一个图形各个点的横坐标都加上 (或减去) 一个整数 a , 相应的新图形就是把原图形向右 (或向左) 平移 a 个单位长度; 如果把它各个点的纵坐标都加 (或减去) 一个整数 a , 相应的新图形就是把原图形向上 (或向下) 平移 a 个单位长度.

(即: 横坐标, 右移加, 左移减; 纵坐标, 上移加, 下移减.)

33. 中心对称图形

(1) 定义

把一个图形绕某一点旋转 180° , 如果旋转后的图形能够与原来的图形重合, 那么这个图形就叫做中心对称图形, 这个点叫做对称中心.

注意: 中心对称图形和中心对称不同, 中心对称是两个图形之间的关系, 而中心对称图形是指一个图形自身的特点, 这点应注意区分, 它们性质相同, 应用方法相同.

(2) 常见的中心对称图形

平行四边形、圆形、正方形、长方形等等.

34. 相似三角形的性质

相似三角形的定义: 如果两个三角形的对应边的比相等, 对应角相等, 那么这两个三角形相似.

(1) 相似三角形的对应角相等, 对应边的比相等.

(2) 相似三角形 (多边形) 的周长的比等于相似比;

相似三角形的对应线段 (对应中线、对应角平分线、对应边上的高) 的比也等于相似比.

(3) 相似三角形的面积的比等于相似比的平方.

由三角形的面积公式和相似三角形对应线段的比等于相似比可以推出相似三角形面积的比等于相似比的平方.

35. 特殊角的三角函数值

(1) 特指 30° 、 45° 、 60° 角的各种三角函数值.

$\sin 30^\circ$; $\cos 30^\circ$; $\tan 30^\circ$;

$\sin 45^\circ$; $\cos 45^\circ$; $\tan 45^\circ = 1$;

$\sin 60^\circ$; $\cos 60^\circ$; $\tan 60^\circ$;

(2) 应用中要熟记特殊角的三角函数值, 一是按值的变化规律去记, 正弦逐渐增大, 余弦逐渐减小, 正切逐渐增大; 二是按特殊直角三角形中各边特殊值规律去记.

(3) 特殊角的三角函数值应用广泛, 一是它可以当作数进行运算, 二是具有三角函数的特点, 在解直角三角形中应用较多.

36. 解直角三角形的应用

(1) 通过解直角三角形能实际问题中的很多有关测量问.

如: 测不易直接测量的物体的高度、测河宽等, 关键在于构造出直角三角形, 通过测量角的度数和测量边的长度, 计算出所要求的物体的高度或长度.

(2) 解直角三角形的一般过程是:

① 将实际问题抽象为数学问题 (画出平面图形, 构造出直角三角形转化为解直角三角形问题).

② 根据题目已知特点选用适当锐角三角函数或边角关系去解直角三角形, 得到数学问题的答案, 再转化得到实际问题的答案.

37. 频数 (率) 分布表

1、在统计数据时, 经常把数据按照不同的范围分成几个组, 分成的组的个数称为组数, 每一组两个端点的差称为组距, 称这样画出的统计图表为频数分布表.

2、列频率分布表的步骤:

(1) 计算极差, 即计算最大值与最小值的差.

(2) 决定组距与组数 (组数与样本容量有关, 一般来说样本容量越大, 分组就越多, 样本容量不超过 100 时, 按数据的多少, 常分成 5~12 组).

(3) 将数据分组.

(4) 列频率分布表.

38. 算术平均数

(1) 平均数是指在一组数据中所有数据之和再除以数据的个数. 它是反映数据集中趋势的一项指标.

(2) 算术平均数: 对于 n 个数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 则 $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ 就叫做这 n 个数的算术平均数.

(3) 算术平均数是加权平均数的一种特殊情况, 加权平均数包含算术平均数, 当加权平均数中的权相等时, 就是算术平均数.

39. 中位数

(1) 中位数:

将一组数据按照从小到大 (或从大到小) 的顺序排列, 如果数据的个数是奇数, 则处于中间位置的数就是这组数据的中位数.

如果这组数据的个数是偶数, 则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数.

(2) 中位数代表了这组数据值大小的“中点”, 不易受极端值影响, 但不能充分利用所有数据的信息.

(3) 中位数仅与数据的排列位置有关, 某些数据的移动对中位数没有影响, 中位数可能出现在所给数据中也可能不在所给的数据中出现, 当一组数据中的个别数据变动较大时, 可用中位数描述其趋势.

40. 众数

(1) 一组数据中出现次数最多的数据叫做众数.

(2) 求一组数据的众数的方法: 找出频数最多的那个数据, 若几个数据频数都是最多且相同, 此时众数就是这多个数据.

(3) 众数不易受数据中极端值的影响. 众数也是数据的一种代表数, 反映了一组数据的集中程度, 众数可作为描述一组数据集中趋势的量.

41. 极差

(1) 极差是指一组数据中最大数据与最小数据的差.

极差 = 最大值 - 最小值.

(2) 极差是刻画数据离散程度的一个统计量. 它只能反映数据的波动范围, 不能衡量每个数据的变化情况.

(3) 极差的优势在于计算简单, 但它受极端值的影响较大.

42. 方差

(1) 方差: 一组数据中各数据与它们的平均数的差的平方的平均数, 叫做这组数据的方差.

(2) 用“先平均, 再求差, 然后平方, 最后再平均”得到的结果表示一组数据偏离平均值的情况, 这个结果叫方差, 通常用 s^2 来表示, 计算公式是:

$$s^2 = \frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]$$
 (可简单记忆为“方差等于差方的平均数”)

(3) 方差是反映一组数据的波动大小的一个量. 方差越大, 则平均值的离散程度越大, 稳定性也越小; 反之, 则它与其平均值的离散程度越小, 稳定性越好.

43. 列表法与树状图法

(1) 当试验中存在两个元素且出现的所有可能的结果较多时, 我们常用列表的方式, 列出所有可能的结果, 再求出概率.

(2) 列表的目的在于不重不漏地列举出所有可能的结果求出 n , 再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m , 求出概率.

(3) 列举法 (树形图法) 求概率的关键在于列举出所有可能的结果, 列表法是一种, 但当一事件涉及三个或更多元素时, 为不重不漏地列出所有可能的结果, 通常采用树形图.

(4) 树形图列举法一般是选择一个元素再和其他元素分别组合, 依次列出, 象树的枝丫形式, 最末端的枝丫个数就是总的可能的结果 n .

(5) 当有两个元素时, 可用树形图列举, 也可以列表列举.