

2019 年甘肃省天水市中考数学试卷

一、选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分, 每小题给出的四个选项中只有一个选项是正确的, 请把正确的选项选出来)

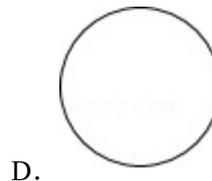
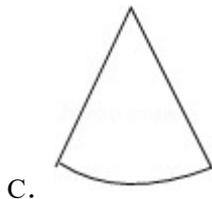
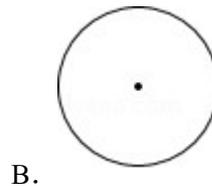
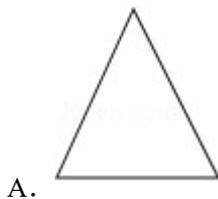
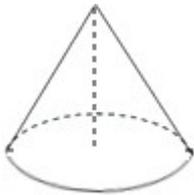
1. (4 分) (2019•天水) 已知 $|a|=1$, b 是 2 的相反数, 则 $a+b$ 的值为 ()

- A. -3 B. -1 C. -1 或 -3 D. 1 或 -3

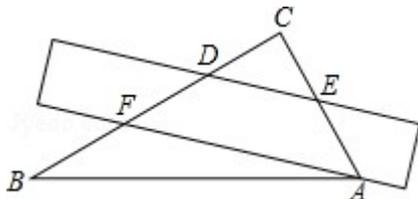
2. (4 分) (2019•天水) 自然界中的数学不胜枚举, 如蜜蜂建造的蜂房既坚固又省料, 其厚度为 0.000073 米, 将 0.000073 用科学记数法表示为 ()

- A. 73×10^{-6} B. 0.73×10^{-4} C. 7.3×10^{-4} D. 7.3×10^{-5}

3. (4 分) (2019•天水) 如图所示, 圆锥的主视图是 ()



4. (4 分) (2019•天水) 一把直尺和一块三角板 ABC (含 30° 、 60° 角) 如图所示摆放, 直尺一边与三角板的两直角边分别交于点 D 和点 E , 另一边与三角板的两直角边分别交于点 F 和点 A , 且 $\angle CED=50^\circ$, 那么 $\angle BFA$ 的大小为 ()



- A. 145° B. 140° C. 135° D. 130°

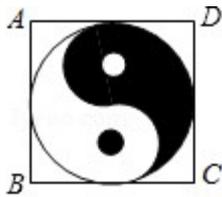
5. (4分) (2019•天水) 下列运算正确的是 ()

- A. $(ab)^2 = a^2b^2$ B. $a^2 + a^2 = a^4$ C. $(a^2)^3 = a^5$ D. $a^2 \cdot a^3 = a^6$

6. (4分) (2019•天水) 已知 $a+b = \frac{1}{2}$, 则代数式 $2a+2b-3$ 的值是 ()

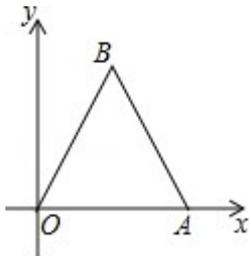
- A. 2 B. -2 C. -4 D. $-3\frac{1}{2}$

7. (4分) (2019•天水) 如图, 正方形 $ABCD$ 内的图形来自中国古代的太极图, 现随机向正方形内掷一枚小针, 则针尖落在黑色区域内的概率为 ()



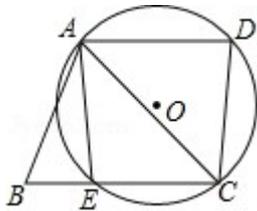
- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\pi}{8}$ D. $\frac{\pi}{4}$

8. (4分) (2019•天水) 如图, 等边 $\triangle OAB$ 的边长为 2, 则点 B 的坐标为 ()



- A. (1, 1) B. $(1, \sqrt{3})$ C. $(\sqrt{3}, 1)$ D. $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$

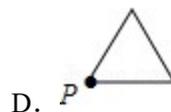
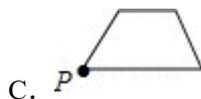
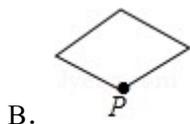
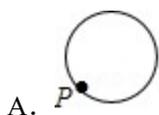
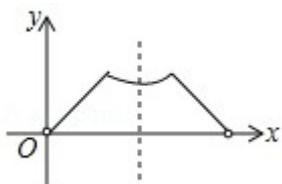
9. (4分) (2019•天水) 如图, 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\odot O$ 经过点 A, C, D , 与 BC 相交于点 E , 连接 AC, AE . 若 $\angle D = 80^\circ$, 则 $\angle EAC$ 的度数为 ()



- A. 20° B. 25° C. 30° D. 35°

10. (4分) (2019•天水) 已知点 P 为某个封闭图形边界上一定点, 动点 M 从点 P 出发, 沿其边界顺时针匀速运动一周, 设点 M 的运动时间为 x , 线段 PM 的长度为 y , 表示 y 与

x 的函数图象大致如图所示, 则该封闭图形可能是 ()



二、填空题 (本大题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分。只要求填写最后结果)

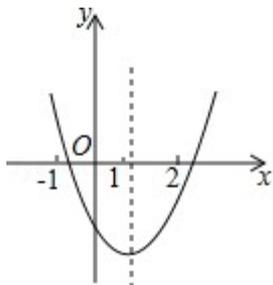
11. (4 分) (2019·天水) 函数 $y = \sqrt{x-2}$ 中, 自变量 x 的取值范围是_____.

12. (4 分) (2019·天水) 分式方程 $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x} = 0$ 的解是_____.

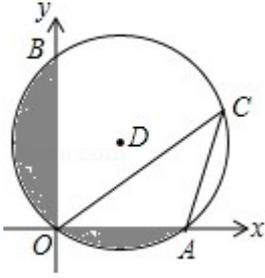
13. (4 分) (2019·天水) 一组数据 2.2, 3.3, 4.4, 11.1, a . 其中整数 a 是这组数据中的中位数, 则这组数据的平均数是_____.

14. (4 分) (2019·天水) 中国“一带一路”给沿线国家和地区带来很大的经济效益, 沿线某地区居民 2016 年人均年收入 20000 元, 到 2018 年人均年收入达到 39200 元. 则该地区居民人均收入平均增长率为_____. (用百分数表示)

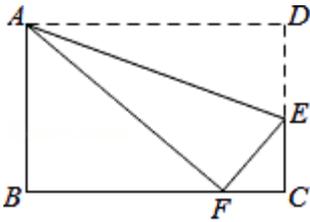
15. (4 分) (2019·天水) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示, 若 $M = 4a + 2b$, $N = a - b$. 则 M 、 N 的大小关系为 M _____ N . (填“>”、“=”或“<”)



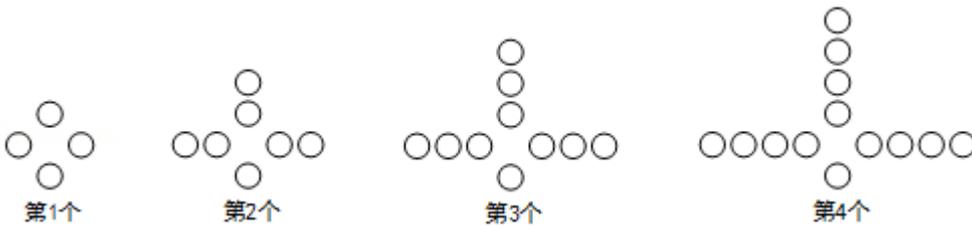
16. (4 分) (2019·天水) 如图, 在平面直角坐标系中, 已知 $\odot D$ 经过原点 O , 与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B 两点, 点 B 坐标为 $(0, 2\sqrt{3})$, OC 与 $\odot D$ 交于点 C , $\angle OCA = 30^\circ$, 则圆中阴影部分的面积为_____.



17. (4分) (2019•天水) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=3$, $AD=5$, 点 E 在 DC 上, 将矩形 $ABCD$ 沿 AE 折叠, 点 D 恰好落在 BC 边上的点 F 处, 那么 $\sin \angle EFC$ 的值为_____.



18. (4分) (2019•天水) 观察下列图中所示的一系列图形, 它们是按一定规律排列的, 依照此规律, 第 2019 个图形中共有_____个 \bigcirc .



三、解答题 (本大题共 3 小题, 共 28 分, 解答时写出必要的文字说明及演算过程)

19. (10分) (2019•天水) (1) 计算: $(-2)^3 + \sqrt{16} - 2\sin 30^\circ + (2019 - \pi)^0 + |\sqrt{3} - 4|$

(2) 先化简, 再求值: $(\frac{x}{x^2+x} - 1) \div \frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$, 其中 x 的值从不等式组 $\begin{cases} -x \leq 1 \\ 2x-1 < 5 \end{cases}$

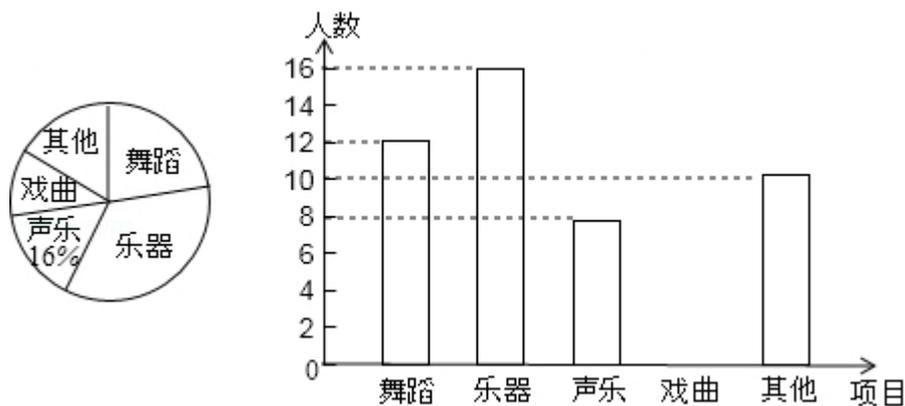
的整数解中选取.

20. (8分) (2019•天水) 天水市某中学为了解学校艺术社团活动的开展情况, 在全校范围内随机抽取了部分学生, 在“舞蹈、乐器、声乐、戏曲、其它活动”项目中, 围绕你最喜欢哪一项活动 (每人只限一项) 进行了问卷调查, 并将调查结果绘制成如下两幅不完整的统计图.

请你根据统计图解答下列问题:

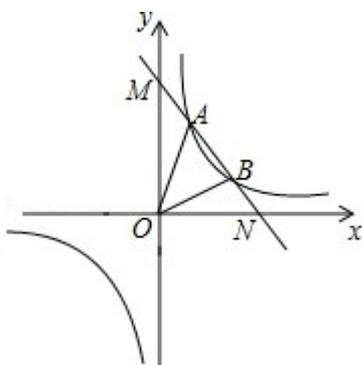
- (1) 在这次调查中, 一共抽查了_____名学生.

- (2) 请你补全条形统计图.
- (3) 扇形统计图中喜欢“乐器”部分扇形的圆心角为_____度.
- (4) 请根据样本数据, 估计该校 1200 名学生中喜欢“舞蹈”项目的共多少名学生?



21. (10分) (2019·天水) 如图, 一次函数 $y=kx+b$ 与反比例函数 $y=\frac{4}{x}$ 的图象交于 $A(m, 4)$ 、 $B(2, n)$ 两点, 与坐标轴分别交于 M 、 N 两点.

- (1) 求一次函数的解析式;
- (2) 根据图象直接写出 $kx+b - \frac{4}{x} > 0$ 中 x 的取值范围;
- (3) 求 $\triangle AOB$ 的面积.

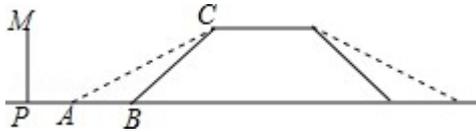


四、解答题 (本大题共 50 分解答时写出必要的演算步骤及推理过程) 第 21 题图

22. (7分) (2019·天水) 某地的一座人行天桥如图所示, 天桥高为 6 米, 坡面 BC 的坡度为 1:1, 文化墙 PM 在天桥底部正前方 8 米处 (PB 的长), 为了方便行人推车过天桥, 有关部门决定降低坡度, 使新坡面的坡度为 1: $\sqrt{3}$. (参考数据: $\sqrt{2}=1.414$, $\sqrt{3}=1.732$)

- (1) 若新坡面坡角为 α , 求坡角 α 度数;

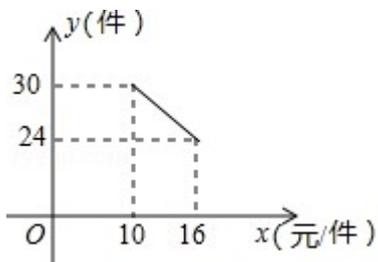
(2) 有关部门规定, 文化墙距天桥底部小于 3 米时应拆除, 天桥改造后, 该文化墙 PM 是否需要拆除? 请说明理由.



23. (10分) (2019·天水) 天水某景区商店销售一种纪念品, 这种商品的成本价 10 元/件. 已知销售价不低于成本价, 且物价部门规定这种商品的销售价不高于 16 元/件, 市场调查发现, 该商品每天的销售量 y (件) 与销售价 x (元/件) 之间的函数关系如图所示.

(1) 求 y 与 x 之间的函数关系式, 并写出自变量 x 的取值范围;

(2) 求每天的销售利润 W (元) 与销售价 x (元/件) 之间的函数关系式, 并求出每件销售价为多少元时, 每天的销售利润最大? 最大利润是多少?

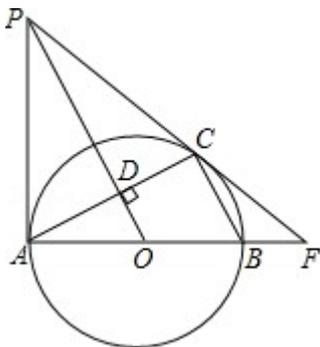


24. (10分) (2019·天水) 如图, AB 、 AC 分别是 $\odot O$ 的直径和弦, $OD \perp AC$ 于点 D . 过点 A 作 $\odot O$ 的切线与

OD 的延长线交于点 P , PC 、 AB 的延长线交于点 F .

(1) 求证: PC 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $\angle ABC = 60^\circ$, $AB = 10$, 求线段 CF 的长.



25. (10分) (2019·天水) 如图 1, 对角线互相垂直的四边形叫做垂美四边形.

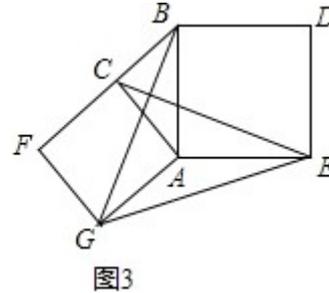
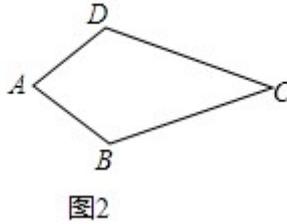
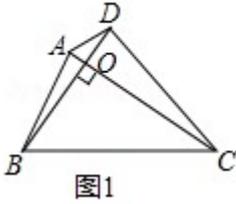
(1) 概念理解: 如图 2, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $CB = CD$, 问四边形 $ABCD$ 是

垂美四边形吗? 请说明理由;

(2) 性质探究: 如图 1, 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 交于点 O , $AC \perp BD$.

试证明: $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$;

(3) 解决问题: 如图 3, 分别以 $\text{Rt}\triangle ACB$ 的直角边 AC 和斜边 AB 为边向外作正方形 $ACFG$ 和正方形 $ABDE$, 连结 CE 、 BG 、 GE . 已知 $AC=4$, $AB=5$, 求 GE 的长.

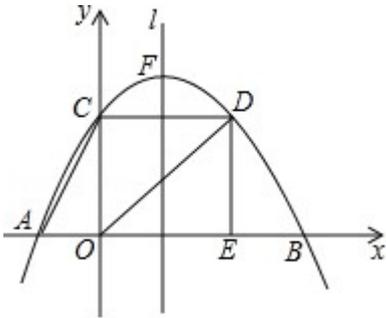


26. (13 分) (2019·天水) 如图, 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 $A(-3, 0)$ 、 $B(9, 0)$ 和 $C(0, 4)$, CD 垂直于 y 轴, 交抛物线于点 D , DE 垂直于 x 轴, 垂足为 E , 直线 l 是该抛物线的对称轴, 点 F 是抛物线的顶点.

(1) 求出该二次函数的表达式及点 D 的坐标;

(2) 若 $\text{Rt}\triangle AOC$ 沿 x 轴向右平移, 使其直角边 OC 与对称轴 l 重合, 再沿对称轴 l 向上平移到点 C 与点 F 重合, 得到 $\text{Rt}\triangle A_1O_1F$, 求此时 $\text{Rt}\triangle A_1O_1F$ 与矩形 $OCDE$ 重叠部分图形的面积;

(3) 若 $\text{Rt}\triangle AOC$ 沿 x 轴向右平移 t 个单位长度 ($0 < t \leq 6$) 得到 $\text{Rt}\triangle A_2O_2C_2$, $\text{Rt}\triangle A_2O_2C_2$ 与 $\text{Rt}\triangle OED$ 重叠部分图形的面积记为 S , 求 S 与 t 之间的函数表达式, 并写出自变量 t 的取值范围.



2019 年甘肃省天水市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分, 每小题给出的四个选项中只有一个选项是正确的, 请把正确的选项选出来)

1. (4 分) (2019•天水) 已知 $|a|=1$, b 是 2 的相反数, 则 $a+b$ 的值为 ()

- A. -3 B. -1 C. -1 或 -3 D. 1 或 -3

【考点】 14: 相反数; 15: 绝对值; 19: 有理数的加法.

【专题】 511: 实数.

【分析】 先根据绝对值和相反数得出 a 、 b 的值, 再分别计算可得.

【解答】 解: $\because |a|=1$, b 是 2 的相反数,

$$\therefore a=1 \text{ 或 } a=-1, b=-2,$$

$$\text{当 } a=1 \text{ 时, } a+b=1-2=-1;$$

$$\text{当 } a=-1 \text{ 时, } a+b=-1-2=-3;$$

综上, $a+b$ 的值为 -1 或 -3,

故选: C.

【点评】 本题主要考查有理数的加法, 解题的关键是根据相反数和绝对值的性质得出 a 、 b 的值.

2. (4 分) (2019•天水) 自然界中的数学不胜枚举, 如蜜蜂建造的蜂房既坚固又省料, 其厚度为 0.000073 米, 将 0.000073 用科学记数法表示为 ()

- A. 73×10^{-6} B. 0.73×10^{-4} C. 7.3×10^{-4} D. 7.3×10^{-5}

【考点】 1J: 科学记数法—表示较小的数.

【专题】 511: 实数.

【分析】 绝对值小于 1 的正数也可以利用科学记数法表示, 一般形式为 $a \times 10^{-n}$, 与较大数的科学记数法不同的是其所使用的是负指数幂, 指数由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定.

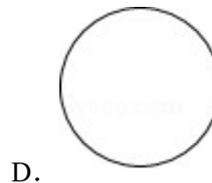
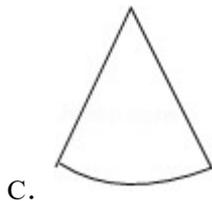
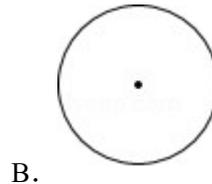
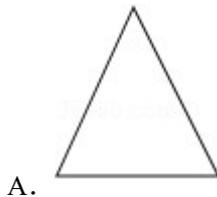
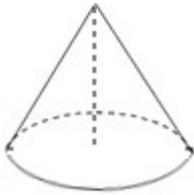
【解答】 解: 0.000073 用科学记数法表示为 7.3×10^{-5} ,

故选: D.

【点评】 本题考查用科学记数法表示较小的数, 一般形式为 $a \times 10^{-n}$, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n

为由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定.

3. (4分) (2019•天水) 如图所示, 圆锥的主视图是 ()



【考点】 U1: 简单几何体的三视图.

【专题】 55F: 投影与视图.

【分析】 主视图是从正面看所得到的图形即可, 可根据圆锥的特点作答.

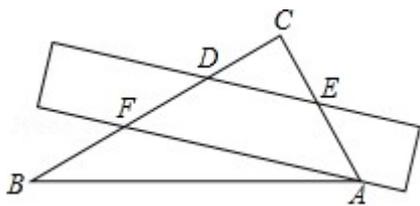
【解答】 解: 圆锥的主视图是等腰三角形, 如图所示:



故选: A.

【点评】 本题考查了三视图的知识, 俯视图是从物体的上面看得到的视图, 主视图是从物体的正面看得到的视图.

4. (4分) (2019•天水) 一把直尺和一块三角板 ABC (含 30° 、 60° 角) 如图所示摆放, 直尺一边与三角板的两直角边分别交于点 D 和点 E , 另一边与三角板的两直角边分别交于点 F 和点 A , 且 $\angle CED=50^\circ$, 那么 $\angle BFA$ 的大小为 ()



- A. 145° B. 140° C. 135° D. 130°

【考点】JA: 平行线的性质.

【专题】551: 线段、角、相交线与平行线.

【分析】先利用三角形外角性质得到 $\angle FDE = \angle C + \angle CED = 140^\circ$, 然后根据平行线的性质得到 $\angle BFA$ 的度数.

【解答】解: $\angle FDE = \angle C + \angle CED = 90^\circ + 50^\circ = 140^\circ$,

$\because DE \parallel AF$,

$\therefore \angle BFA = \angle FDE = 140^\circ$.

故选: B.

【点评】本题考查了平行线的性质: 两直线平行, 同位角相等; 两直线平行, 同旁内角互补; 两直线平行, 内错角相等.

5. (4分) (2019•天水) 下列运算正确的是 ()

- A. $(ab)^2 = a^2b^2$ B. $a^2 + a^2 = a^4$ C. $(a^2)^3 = a^5$ D. $a^2 \cdot a^3 = a^6$

【考点】35: 合并同类项; 46: 同底数幂的乘法; 47: 幂的乘方与积的乘方.

【专题】11: 计算题; 512: 整式; 62: 符号意识.

【分析】根据合并同类项法则, 同底数幂相乘, 底数不变指数相加; 幂的乘方, 底数不变指数相乘; 对各选项分析判断后利用排除法求解.

【解答】解:

A 选项, 积的乘方: $(ab)^2 = a^2b^2$, 正确

B 选项, 合并同类项: $a^2 + a^2 = 2a^2$, 错误

C 选项, 幂的乘方: $(a^2)^3 = a^6$, 错误

D 选项, 同底数幂相乘: $a^2 \cdot a^3 = a^5$, 错误

故选: A.

【点评】本题考查合并同类项、同底数幂的乘法、幂的乘方, 积的乘方, 熟练掌握运算性质和法则是解题的关键.

6. (4分) (2019•天水) 已知 $a+b=\frac{1}{2}$, 则代数式 $2a+2b-3$ 的值是 ()

A. 2

B. -2

C. -4

D. $-3\frac{1}{2}$

【考点】33: 代数式求值.

【专题】36: 整体思想; 512: 整式.

【分析】注意到 $2a+2b-3$ 只需变形得 $2(a+b)-3$, 再将 $a+b=\frac{1}{2}$, 整体代入即可

【解答】解:

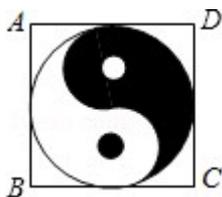
$$\because 2a+2b-3=2(a+b)-3,$$

$$\therefore \text{将 } a+b=\frac{1}{2} \text{ 代入得: } 2 \times \frac{1}{2} - 3 = -2$$

故选: B.

【点评】此题考查代数式求值的整体代入, 只需通过因式解进行变形, 再整体代入即可.

7. (4分) (2019•天水) 如图, 正方形 $ABCD$ 内的图形来自中国古代的太极图, 现随机向正方形内掷一枚小针, 则针尖落在黑色区域内的概率为 ()

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\pi}{8}$ D. $\frac{\pi}{4}$

【考点】X5: 几何概率.

【专题】543: 概率及其应用.

【分析】用正方形的内切圆的面积的一半除以正方形的面积得到针尖落在黑色区域内的概率.

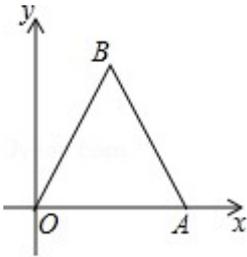
【解答】解: 设正方形 $ABCD$ 的边长为 $2a$,

$$\text{针尖落在黑色区域内的概率} = \frac{\frac{1}{2} \times \pi \times a^2}{4a^2} = \frac{\pi}{8}.$$

故选: C.

【点评】本题考查了几何概率: 某事件的概率 = 某事件所占有的面积与总面积之比.

8. (4分) (2019•天水) 如图, 等边 $\triangle OAB$ 的边长为2, 则点 B 的坐标为 ()



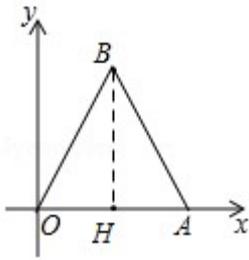
- A. (1, 1) B. (1, $\sqrt{3}$) C. ($\sqrt{3}$, 1) D. ($\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$)

【考点】D5: 坐标与图形性质; KK: 等边三角形的性质.

【专题】554: 等腰三角形与直角三角形.

【分析】过点 B 作 $BH \perp AO$ 于 H 点, $\because \triangle OAB$ 是等边三角形, 所以可求出 OH 和 BH 长.

【解答】解: 过点 B 作 $BH \perp AO$ 于 H 点, $\because \triangle OAB$ 是等边三角形,



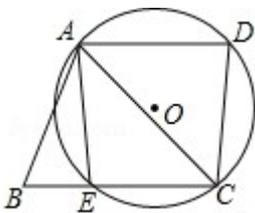
$$\therefore OH=1, BH=\sqrt{3}.$$

$$\therefore \text{点 } B \text{ 的坐标为 } (1, \sqrt{3}).$$

故选: B.

【点评】本题主要考查了等边三角形的性质, 以坐标系为背景, 综合考查了勾股定理和坐标与图形的性质.

9. (4分) (2019•天水) 如图, 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\odot O$ 经过点 A 、 C 、 D , 与 BC 相交于点 E , 连接 AC 、 AE . 若 $\angle D=80^\circ$, 则 $\angle EAC$ 的度数为 ()



- A. 20° B. 25° C. 30° D. 35°

【考点】L8: 菱形的性质; M5: 圆周角定理.

【专题】 559: 圆的有关概念及性质.

【分析】 根据菱形的性质得到 $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle DCB = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle D) = 50^\circ$, 根据圆内接四边形的性质得到 $\angle AEB = \angle D = 80^\circ$, 由三角形的外角的性质即可得到结论.

【解答】 解: \because 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle D = 80^\circ$,

$$\therefore \angle ACB = \frac{1}{2} \angle DCB = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle D) = 50^\circ,$$

\because 四边形 $AECD$ 是圆内接四边形,

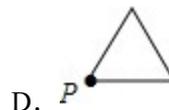
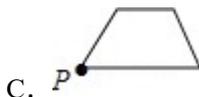
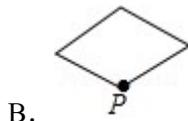
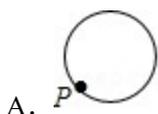
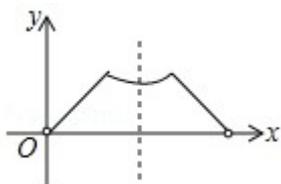
$$\therefore \angle AEB = \angle D = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle AEB - \angle ACE = 30^\circ,$$

故选: C .

【点评】 本题考查了菱形的性质, 三角形的内角和, 圆内接四边形的性质, 熟练掌握菱形的性质是解题的关键.

10. (4分) (2019•天水) 已知点 P 为某个封闭图形边界上一定点, 动点 M 从点 P 出发, 沿其边界顺时针匀速运动一周, 设点 M 的运动时间为 x , 线段 PM 的长度为 y , 表示 y 与 x 的函数图象大致如图所示, 则该封闭图形可能是 ()



【考点】 E7: 动点问题的函数图象.

【专题】 532: 函数及其图像.

【分析】 先观察图象得到 y 与 x 的函数图象分三个部分, 则可对有 4 边的封闭图形进行淘汰, 利用圆的定义, P 点在圆上运动时, 开始 y 随 x 的增大而增大, 然后 y 随 x 的减小而减小, 则可对 D 进行判断, 从而得到正确选项.

【解答】 解: y 与 x 的函数图象分三个部分, 而 B 选项和 C 选项中的封闭图形都有 4 条线段, 其图象要分四个部分, 所以 B 、 C 选项不正确;

A 选项中的封闭图形为圆, 开始 y 随 x 的增大而增大, 然后 y 随 x 的减小而减小, 所以 A

选项不正确;

D 选项为三角形, M 点在三边上运动对应三段图象, 且 M 点在 P 点的对边上运动时 PM 的长有最小值.

故选: D .

【点评】 本题考查了动点问题的函数图象: 函数图象是典型的数形结合, 图象应用信息广泛, 通过看图获取信息, 不仅可以解决生活中的实际问题, 还可以提高分析问题、解决问题的能力. 用图象解决问题时, 要理清图象的含义即会识图.

二、填空题 (本大题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 只要求填写最后结果)

11. (4 分) (2019·天水) 函数 $y = \sqrt{x-2}$ 中, 自变量 x 的取值范围是 $x \geq 2$.

【考点】 E4: 函数自变量的取值范围.

【分析】 根据二次根式的性质, 被开方数大于等于 0, 就可以求解.

【解答】 解: 依题意, 得 $x - 2 \geq 0$,

解得: $x \geq 2$,

故答案为: $x \geq 2$.

【点评】 本题主要考查函数自变量的取值范围, 考查的知识点为: 二次根式的被开方数是非负数.

12. (4 分) (2019·天水) 分式方程 $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x} = 0$ 的解是 $x = 2$.

【考点】 B3: 解分式方程.

【专题】 11: 计算题; 513: 分式.

【分析】 先通分再去分母, 再求解, 最后进行检验即可

【解答】 解:

$$\text{原式通分得: } \frac{x-2(x-1)}{x(x-1)} = 0$$

$$\text{去分母得: } x - 2(x - 1) = 0$$

$$\text{去括号解得, } x = 2$$

经检验, $x = 2$ 为原分式方程的解

故答案为 $x = 2$

【点评】 本题主要考查解分式方程, 解分式方程主要将方程两边都乘最简公分母, 可以把分式方程转化为整式方程求解.

13. (4 分) (2019·天水) 一组数据 2.2, 3.3, 4.4, 11.1, a . 其中整数 a 是这组数据中的

中位数, 则这组数据的平均数是 5 .

【考点】 W1: 算术平均数; W4: 中位数.

【专题】 542: 统计的应用.

【分析】 先利用中位数的定义得到 $a=4$, 然后根据平均线的计算方法计算这组数据的平均数.

【解答】 解: \because 整数 a 是这组数据中的中位数,

$$\therefore a=4,$$

$$\therefore \text{这组数据的平均数} = \frac{1}{5} (2.2+3.3+4.4+4+11.1) = 5.$$

故答案为 5.

【点评】 本题考查了中位数: 将一组数据按照从小到大 (或从大到小) 的顺序排列, 如果数据的个数是奇数, 则处于中间位置的数就是这组数据的中位数. 如果这组数据的个数是偶数, 则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数. 也考查了算术平方根.

14. (4分) (2019•天水) 中国“一带一路”给沿线国家和地区带来很大的经济效益, 沿线某地区居民 2016 年人均年收入 20000 元, 到 2018 年人均年收入达到 39200 元. 则该地区居民年人均收入平均增长率为 40%. (用百分数表示)

【考点】 AD: 一元二次方程的应用.

【专题】 523: 一元二次方程及应用.

【分析】 根据题意可以列出相应的方程, 从而可以求得该地区居民年人均收入平均增长率, 本题得以解决.

【解答】 解: 设该地区居民年人均收入平均增长率为 x ,

$$20000(1+x)^2 = 39200,$$

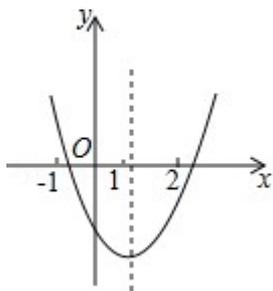
解得, $x_1=0.4$, $x_2=-2.4$ (舍去),

\therefore 该地区居民年人均收入平均增长率为 40%,

故答案为: 40%.

【点评】 本题考查一元二次方程的应用, 解答本题的关键是明确题意, 列出相应的方程, 求出相应的增长率.

15. (4分) (2019•天水) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示, 若 $M=4a+2b$, $N=a-b$. 则 M 、 N 的大小关系为 M < N . (填“>”、“=”或“<”)



【考点】H4: 二次函数图象与系数的关系.

【专题】535: 二次函数图象及其性质.

【分析】根据二次函数的图象与性质即可求出答案.

【解答】解: 当 $x = -1$ 时, $y = a - b + c > 0$,

当 $x = 2$ 时, $y = 4a + 2b + c < 0$,

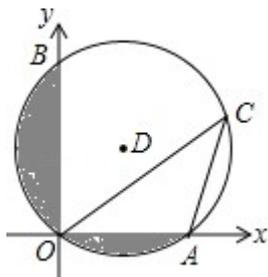
$$\begin{aligned} M - N &= 4a + 2b - (a - b) \\ &= 4a + 2b + c - (a - b + c) < 0, \end{aligned}$$

即 $M < N$,

故答案为: $<$

【点评】本题考查二次函数, 解题的关键是熟练运用二次函数的图象与性质, 本题属于中等题型.

16. (4分) (2019•天水) 如图, 在平面直角坐标系中, 已知 $\odot D$ 经过原点 O , 与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B 两点, 点 B 坐标为 $(0, 2\sqrt{3})$, OC 与 $\odot D$ 交于点 C , $\angle OCA = 30^\circ$, 则圆中阴影部分的面积为 $2\pi - 2\sqrt{3}$.



【考点】D5: 坐标与图形性质; M5: 圆周角定理; MO: 扇形面积的计算.

【分析】连接 AB , 根据 $\angle AOB = 90^\circ$ 可知 AB 是直径, 再由圆周角定理求出 $\angle OBA = \angle C = 30^\circ$, 由锐角三角函数的定义得出 OA 及 AB 的长, 根据 $S_{\text{阴影}} = S_{\text{半圆}} - S_{\triangle ABO}$ 即可得出结论.

【解答】解: 连接 AB ,

$\because \angle AOB = 90^\circ,$

$\therefore AB$ 是直径,

根据同弧对的圆周角相等得 $\angle OBA = \angle C = 30^\circ,$

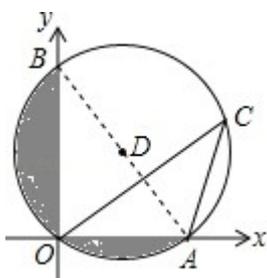
$\therefore OB = 2\sqrt{3},$

$\therefore OA = OB \tan \angle ABO = OB \tan 30^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2, AB = AO \div \sin 30^\circ = 4,$ 即圆的半径为

2,

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{半圆}} - S_{\triangle ABO} = \frac{\pi \times 2^2}{2} - \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\pi - 2\sqrt{3}.$$

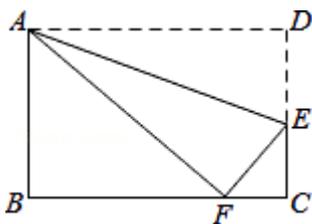
故答案为: $2\pi - 2\sqrt{3}.$



【点评】 本题考查的是扇形面积的计算, 根据题意作出辅助线, 构造出直角三角形是解答此题的关键.

17. (4分) (2019•天水) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=3, AD=5,$ 点 E 在 DC 上, 将

矩形 $ABCD$ 沿 AE 折叠, 点 D 恰好落在 BC 边上的点 F 处, 那么 $\sin \angle EFC$ 的值为 $\frac{4}{5}.$



【考点】 LB: 矩形的性质; PB: 翻折变换 (折叠问题); T7: 解直角三角形.

【专题】 558: 平移、旋转与对称.

【分析】 先根据矩形的性质得 $AD=BC=5, AB=CD=3,$ 再根据折叠的性质得 $AF=AD=5, EF=DE,$ 在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中, 利用勾股定理计算出 $BF=4,$ 则 $CF=BC-BF=1,$ 设 $CE=x,$ 则 $DE=EF=3-x,$ 然后在 $\text{Rt}\triangle ECF$ 中根据勾股定理得到 $x^2+1^2=(3-x)^2,$

解方程即可得到 x , 进一步得到 EF 的长, 再根据正弦函数的定义即可求解.

【解答】解: \because 四边形 $ABCD$ 为矩形,

$$\therefore AD=BC=5, AB=CD=3,$$

\because 矩形 $ABCD$ 沿直线 AE 折叠, 顶点 D 恰好落在 BC 边上的 F 处,

$$\therefore AF=AD=5, EF=DE,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中, $\because BF=\sqrt{AF^2-AB^2}=4,$

$$\therefore CF=BC-BF=5-4=1,$$

设 $CE=x$, 则 $DE=EF=3-x$

在 $\text{Rt}\triangle ECF$ 中, $\because CE^2+FC^2=EF^2,$

$$\therefore x^2+1^2=(3-x)^2, \text{ 解得 } x=\frac{4}{3},$$

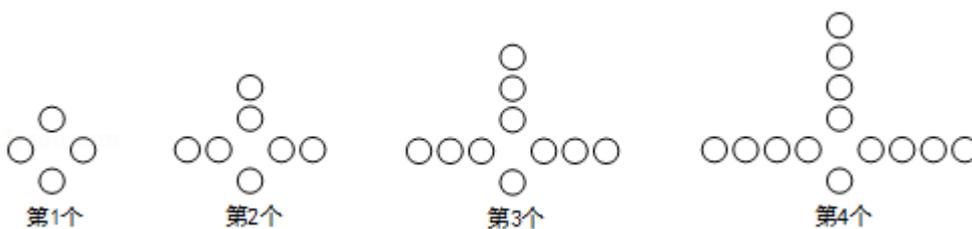
$$\therefore EF=3-x=\frac{5}{3},$$

$$\therefore \sin \angle EFC=\frac{CE}{EF}=\frac{4}{5}.$$

故答案为: $\frac{4}{5}$.

【点评】本题考查了折叠的性质: 折叠是一种对称变换, 它属于轴对称, 折叠前后图形的形状和大小不变, 位置变化, 对应边和对应角相等. 也考查了矩形的性质和勾股定理.

18. (4分) (2019•天水) 观察下列图中所示的一系列图形, 它们是按一定规律排列的, 依照此规律, 第 2019 个图形中共有 6058 个 \bigcirc .



【考点】38: 规律型: 图形的变化类.

【专题】2A: 规律型; 64: 几何直观.

【分析】根据题目中的图形, 可以发现 \bigcirc 的变化规律, 从而可以得到第 2019 个图形中 \bigcirc 的个数.

【解答】解: 由图可得,

第 1 个图象中○的个数为: $1+3\times 1=4$,

第 2 个图象中○的个数为: $1+3\times 2=7$,

第 3 个图象中○的个数为: $1+3\times 3=10$,

第 4 个图象中○的个数为: $1+3\times 4=13$,

.....

∴第 2019 个图形中共有: $1+3\times 2019=1+6057=6058$ 个○,

故答案为: 6058.

【点评】 本题考查图形的变化类, 解答本题的关键是明确题意, 发现图形中○的变化规律, 利用数形结合的思想解答.

三、解答题 (本大题共 3 小题, 共 28 分, 解答时写出必要的文字说明及演算过程)

19. (10 分) (2019·天水) (1) 计算: $(-2)^3 + \sqrt{16} - 2\sin 30^\circ + (2019 - \pi)^0 + |\sqrt{3} - 4|$

(2) 先化简, 再求值: $(\frac{x}{x^2+x} - 1) \div \frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$, 其中 x 的值从不等式组 $\begin{cases} -x \leq 1 \\ 2x-1 < 5 \end{cases}$

的整数解中选取.

【考点】 2C: 实数的运算; 6D: 分式的化简求值; CC: 一元一次不等式组的整数解; T5: 特殊角的三角函数值.

【专题】 513: 分式; 524: 一元一次不等式(组)及应用.

【分析】 (1) 根据实数的混合运算顺序和运算法则计算可得;

(2) 先根据分式的混合运算顺序和运算法则化简原式, 解不等式组求出其整数解, 再选取使分式有意义的 x 的值代入计算可得.

$$\begin{aligned} \text{【解答】解: (1) 原式} &= -8+4 - 2\times\frac{1}{2}+1+4 - \sqrt{3} \\ &= -8+4 - 1+1+4 - \sqrt{3} \\ &= -\sqrt{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2) 原式} &= \frac{x-x^2-x}{x(x+1)} \cdot \frac{x+1}{x-1} \\ &= -\frac{x}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x-1} \\ &= \frac{x}{1-x}, \end{aligned}$$

解不等式组 $\begin{cases} -x \leq 1 \\ 2x-1 < 5 \end{cases}$ 得 $-1 \leq x < 3$,

则不等式组的整数解为 -1、0、1、2,

$\because x \neq \pm 1, x \neq 0,$

$\therefore x = 2,$

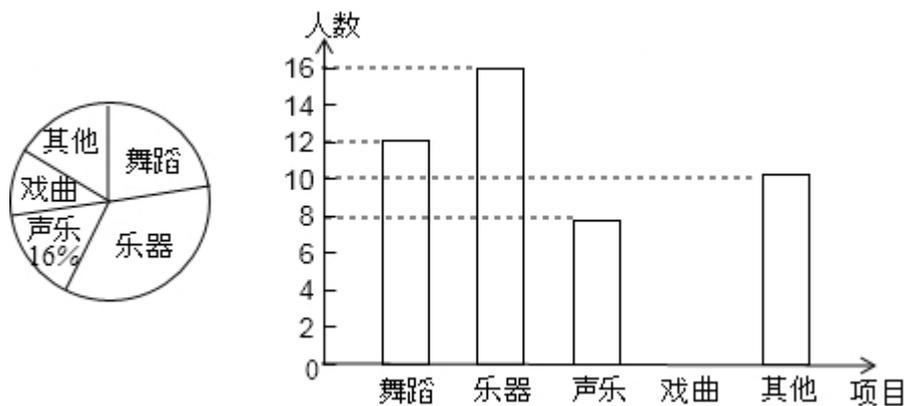
则原式 $= \frac{2}{1-2} = -2.$

【点评】本题主要考查分式的化简求值, 解题的关键是熟练掌握分式和实数的混合运算顺序和运算法则及解一元一次不等式组的能力.

20. (8分) (2019•天水)天水市某中学为了解学校艺术社团活动的开展情况, 在全校范围内随机抽取了部分学生, 在“舞蹈、乐器、声乐、戏曲、其它活动”项目中, 围绕你最喜欢哪一项活动(每人只限一项)进行了问卷调查, 并将调查结果绘制成如下两幅不完整的统计图.

请你根据统计图解答下列问题:

- (1) 在这次调查中, 一共抽查了 50 名学生.
- (2) 请你补全条形统计图.
- (3) 扇形统计图中喜欢“乐器”部分扇形的圆心角为 115.2 度.
- (4) 请根据样本数据, 估计该校 1200 名学生中喜欢“舞蹈”项目的共多少名学生?



【考点】 V5: 用样本估计总体; VB: 扇形统计图; VC: 条形统计图.

【专题】 542: 统计的应用.

- 【分析】** (1) 用喜欢声乐的人数除以它所占的百分比得到调查的总人数;
- (2) 先计算出喜欢戏曲的人数, 然后补全条形统计图;
- (3) 用 360 度乘以喜欢乐器的人数所占得到百分比得到扇形统计图中喜欢“乐器”部

分扇形的圆心角的度数;

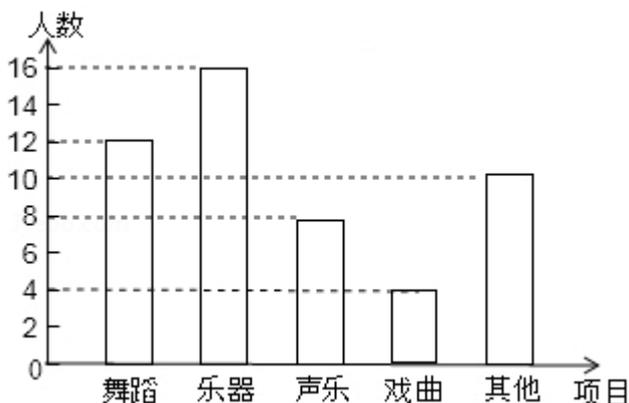
(4) 用 1200 乘以样本中喜欢舞蹈的人数所占的百分比即可.

【解答】解: (1) $8 \div 16\% = 50$,

所以在本次调查中, 一共抽查了 50 名学生;

(2) 喜欢戏曲的人数为 $50 - 8 - 10 - 12 - 16 = 4$ (人),

条形统计图为:



(3) 扇形统计图中喜欢“乐器”部分扇形的圆心角的度数为 $360^\circ \times \frac{16}{50} = 115.2^\circ$;

故答案为 50; 115.2;

(4) $1200 \times \frac{12}{50} = 288$,

所以估计该校 1200 名学生中喜欢“舞蹈”项目的共 288 名学生.

【点评】本题考查了条形统计图: 条形统计图是用线段长度表示数据, 根据数量的多少画成长短不同的矩形直条, 然后按顺序把这些直条排列起来. 从条形图可以很容易看出数据的大小, 便于比较. 也考查了扇形统计图.

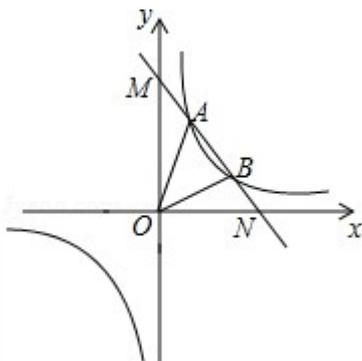
21. (10 分) (2019·天水) 如图, 一次函数 $y = kx + b$ 与反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图象交于

$A(m, 4)$ 、 $B(2, n)$ 两点, 与坐标轴分别交于 M 、 N 两点.

(1) 求一次函数的解析式;

(2) 根据图象直接写出 $kx + b - \frac{4}{x} > 0$ 中 x 的取值范围;

(3) 求 $\triangle AOB$ 的面积.



【考点】 G8: 反比例函数与一次函数的交点问题.

【专题】 533: 一次函数及其应用; 534: 反比例函数及其应用.

【分析】 (1) 将点 A 、点 B 的坐标分别代入解析式即可求出 m 、 n 的值, 从而求出两点坐标;

(2) 根据题意, 结合图象确定出 x 的范围即可;

(3) 将 $\triangle AOB$ 的面积转化为 $S_{\triangle AON} - S_{\triangle BON}$ 的面积即可.

【解答】 解: (1) \because 点 A 在反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 上,

$$\therefore \frac{4}{m} = 4, \text{ 解得 } m = 1,$$

\therefore 点 A 的坐标为 $(1, 4)$,

又 \because 点 B 也在反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 上,

$$\therefore \frac{4}{2} = n, \text{ 解得 } n = 2,$$

\therefore 点 B 的坐标为 $(2, 2)$,

又 \because 点 A 、 B 在 $y = kx + b$ 的图象上,

$$\therefore \begin{cases} k + b = 4 \\ 2k + b = 2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = -2 \\ b = 6 \end{cases},$$

\therefore 一次函数的解析式为 $y = -2x + 6$.

(2) 根据图象得: $kx + b - \frac{4}{x} > 0$ 时, x 的取值范围为 $x < 0$ 或 $1 < x < 2$;

(3) \because 直线 $y = -2x + 6$ 与 x 轴的交点为 N ,

\therefore 点 N 的坐标为 $(3, 0)$,

$$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AON} - S_{\triangle BON} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 - \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3.$$

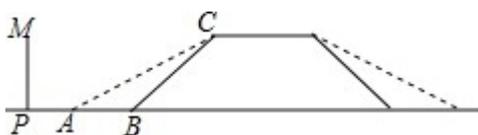
【点评】此题考查了反比例函数与一次函数的交点问题, 利用了数形结合的思想, 熟练掌握待定系数法是解本题的关键.

四、解答题 (本大题共 50 分解答时写出必要的演算步骤及推理过程) 第 21 题图

22. (7分) (2019·天水) 某地的一座人行天桥如图所示, 天桥高为 6 米, 坡面 BC 的坡度为 1:1, 文化墙 PM 在天桥底部正前方 8 米处 (PB 的长), 为了方便行人推车过天桥, 有关部门决定降低坡度, 使新坡面的坡度为 1: $\sqrt{3}$. (参考数据: $\sqrt{2}=1.414$, $\sqrt{3}=1.732$)

(1) 若新坡面坡角为 α , 求坡角 α 度数;

(2) 有关部门规定, 文化墙距天桥底部小于 3 米时应拆除, 天桥改造后, 该文化墙 PM 是否需要拆除? 请说明理由.



【考点】 T9: 解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题.

【专题】 55E: 解直角三角形及其应用.

【分析】 (1) 根据新的坡度, 可以求得坡角的正切值, 从而可以解答本题;

(2) 根据题意和题目中的数据可以求得 PA 的长度, 然后与 3 比较大小即可解答本题.

【解答】 解: (1) \because 新坡面坡角为 α , 新坡面的坡度为 1: $\sqrt{3}$,

$$\therefore \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \alpha = 30^\circ;$$

(2) 该文化墙 PM 不需要拆除,

理由: 作 $CD \perp AB$ 于点 D , 则 $CD = 6$ 米,

\because 新坡面的坡度为 1: $\sqrt{3}$,

$$\therefore \tan \angle CAD = \frac{CD}{AD} = \frac{6}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

解得, $AD = 6\sqrt{3}$ 米,

\because 坡面 BC 的坡度为 1: 1, $CD = 6$ 米,

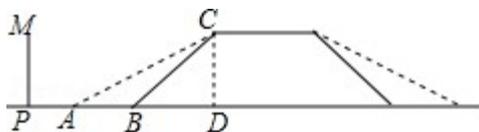
$$\therefore BD = 6 \text{ 米},$$

$$\therefore AB = AD - BD = (6\sqrt{3} - 6) \text{ 米},$$

又 $\because PB = 8$ 米,

$$\therefore PA = PB - AB = 8 - (6\sqrt{3} - 6) = 14 - 6\sqrt{3} \approx 14 - 6 \times 1.732 \approx 3.6 \text{ 米} > 3 \text{ 米},$$

\therefore 该文化墙 PM 不需要拆除.

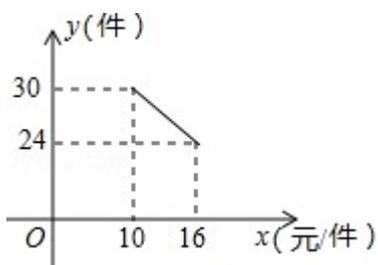


【点评】 本题考查解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题, 解答本题的关键是明确题意, 利用特殊角的三角函数值和数形结合的思想解答.

23. (10分) (2019·天水) 天水某景区商店销售一种纪念品, 这种商品的成本价 10 元/件, 已知销售价不低于成本价, 且物价部门规定这种商品的销售价不高于 16 元/件, 市场调查发现, 该商品每天的销售量 y (件) 与销售价 x (元/件) 之间的函数关系如图所示.

(1) 求 y 与 x 之间的函数关系式, 并写出自变量 x 的取值范围;

(2) 求每天的销售利润 W (元) 与销售价 x (元/件) 之间的函数关系式, 并求出每件销售价为多少元时, 每天的销售利润最大? 最大利润是多少?



【考点】 HE: 二次函数的应用.

【专题】 536: 二次函数的应用.

【分析】 (1) 利用待定系数法求解可得 y 关于 x 的函数解析式;

(2) 根据“总利润 = 每件的利润 \times 销售量”可得函数解析式, 将其配方成顶点式, 利用二次函数的性质进一步求解可得.

【解答】 解: (1) 设 y 与 x 的函数解析式为 $y = kx + b$,

$$\text{将 } (10, 30)、(16, 24) \text{ 代入, 得: } \begin{cases} 10k + b = 30 \\ 16k + b = 24 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -1 \\ b = 40 \end{cases}$$

所以 y 与 x 的函数解析式为 $y = -x + 40$ ($10 \leq x \leq 16$) ;

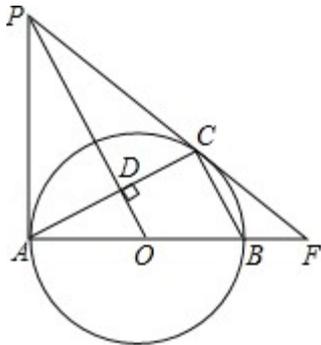
$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 根据题意知, } W &= (x - 10)y \\
 &= (x - 10)(-x + 40) \\
 &= -x^2 + 50x - 400 \\
 &= -(x - 25)^2 + 225, \\
 \because a &= -1 < 0, \\
 \therefore \text{当 } x < 25 \text{ 时, } W &\text{ 随 } x \text{ 的增大而增大,} \\
 \because 10 &\leq x \leq 16, \\
 \therefore \text{当 } x = 16 \text{ 时, } W &\text{ 取得最大值, 最大值为 } 144,
 \end{aligned}$$

答: 每件销售价为 16 元时, 每天的销售利润最大, 最大利润是 144 元.

【点评】 本题主要考查二次函数的应用, 解题的关键是熟练掌握待定系数法求函数解析式及根据相等关系列出二次函数解析式及二次函数的性质.

24. (10 分) (2019·天水) 如图, AB 、 AC 分别是 $\odot O$ 的直径和弦, $OD \perp AC$ 于点 D . 过点 A 作 $\odot O$ 的切线与 OD 的延长线交于点 P , PC 、 AB 的延长线交于点 F .

- (1) 求证: PC 是 $\odot O$ 的切线;
- (2) 若 $\angle ABC = 60^\circ$, $AB = 10$, 求线段 CF 的长.



【考点】 KQ: 勾股定理; M2: 垂径定理; M5: 圆周角定理; ME: 切线的判定与性质.

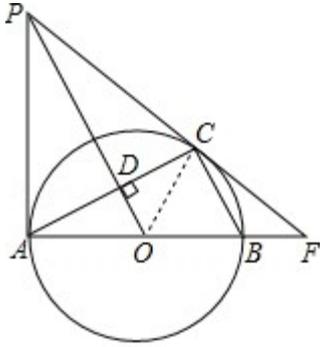
【专题】 1: 常规题型; 55A: 与圆有关的位置关系.

【分析】 (1) 连接 OC , 可以证得 $\triangle OAP \cong \triangle OCP$, 利用全等三角形的对应角相等, 以及切线的性质定理可以得到: $\angle OCP = 90^\circ$, 即 $OC \perp PC$, 即可证得;

(2) 先证 $\triangle OBC$ 是等边三角形得 $\angle COB = 60^\circ$, 再由 (1) 中所证切线可得 $\angle OCF =$

90° , 结合半径 $OC=5$ 可得答案.

【解答】解: (1) 连接 OC ,



$\because OD \perp AC$, OD 经过圆心 O ,

$\therefore AD = CD$,

$\therefore PA = PC$,

在 $\triangle OAP$ 和 $\triangle OCP$ 中,

$$\because \begin{cases} OA = OC \\ PA = PC, \\ OP = OP \end{cases}$$

$\therefore \triangle OAP \cong \triangle OCP$ (SSS),

$\therefore \angle OCP = \angle OAP$

$\because PA$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore \angle OAP = 90^\circ$.

$\therefore \angle OCP = 90^\circ$,

即 $OC \perp PC$

$\therefore PC$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) $\because OB = OC$, $\angle OBC = 60^\circ$,

$\therefore \triangle OBC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle COB = 60^\circ$,

$\because AB = 10$,

$\therefore OC = 5$,

由 (1) 知 $\angle OCF = 90^\circ$,

$\therefore CF = OC \tan \angle COB = 5\sqrt{3}$.

【点评】 本题考查了切线的性质定理以及判定定理, 以及直角三角形三角函数的应用, 证明圆的切线的问题常用的思路是根据切线的判定定理转化成证明垂直的问题.

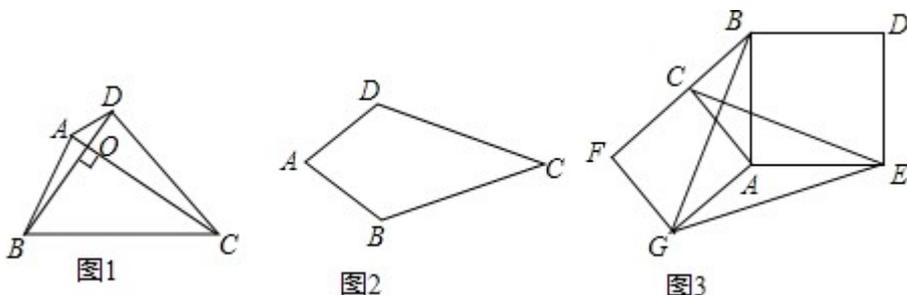
25. (10分) (2019•天水) 如图 1, 对角线互相垂直的四边形叫做垂美四边形.

(1) 概念理解: 如图 2, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB=AD$, $CB=CD$, 问四边形 $ABCD$ 是垂美四边形吗? 请说明理由;

(2) 性质探究: 如图 1, 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 交于点 O , $AC \perp BD$.

试证明: $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$;

(3) 解决问题: 如图 3, 分别以 $\text{Rt}\triangle ACB$ 的直角边 AC 和斜边 AB 为边向外作正方形 $ACFG$ 和正方形 $ABDE$, 连结 CE 、 BG 、 GE . 已知 $AC=4$, $AB=5$, 求 GE 的长.



【考点】 LO: 四边形综合题.

【专题】 152: 几何综合题.

【分析】 (1) 根据垂直平分线的判定定理证明即可;

(2) 根据垂直的定义和勾股定理解答即可;

(3) 根据垂美四边形的性质、勾股定理、结合 (2) 的结论计算.

【解答】 解: (1) 四边形 $ABCD$ 是垂美四边形.

证明: $\because AB=AD$,

\therefore 点 A 在线段 BD 的垂直平分线上,

$\because CB=CD$,

\therefore 点 C 在线段 BD 的垂直平分线上,

\therefore 直线 AC 是线段 BD 的垂直平分线,

$\therefore AC \perp BD$, 即四边形 $ABCD$ 是垂美四边形;

(2) 猜想结论: 垂美四边形的两组对边的平方和相等.

如图 2, 已知四边形 $ABCD$ 中, $AC \perp BD$, 垂足为 E ,

求证: $AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$

证明: $\because AC \perp BD$,

$$\therefore \angle AED = \angle AEB = \angle BEC = \angle CED = 90^\circ,$$

由勾股定理得, $AD^2+BC^2=AE^2+DE^2+BE^2+CE^2$,

$$AB^2+CD^2=AE^2+BE^2+CE^2+DE^2,$$

$$\therefore AD^2+BC^2=AB^2+CD^2;$$

故答案为: $AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$.

(3) 连接 CG 、 BE ,

$$\because \angle CAG = \angle BAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAG + \angle BAC = \angle BAE + \angle BAC, \text{ 即 } \angle GAB = \angle CAE,$$

$$\text{在 } \triangle GAB \text{ 和 } \triangle CAE \text{ 中, } \begin{cases} AG=AC \\ \angle GAB=\angle CAE, \\ AB=AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle GAB \cong \triangle CAE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle ABG = \angle AEC, \text{ 又 } \angle AEC + \angle AME = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABG + \angle AME = 90^\circ, \text{ 即 } CE \perp BG,$$

\therefore 四边形 $CGEB$ 是垂美四边形,

由 (2) 得, $CG^2+BE^2=CB^2+GE^2$,

$$\because AC=4, AB=5,$$

$$\therefore BC=3, CG=4\sqrt{2}, BE=5\sqrt{2},$$

$$\therefore GE^2=CG^2+BE^2 - CB^2=73,$$

$$\therefore GE=\sqrt{73}.$$

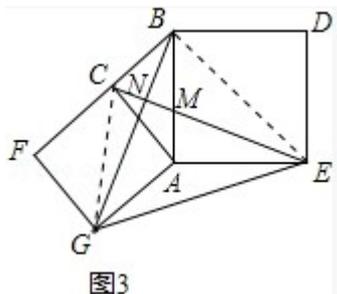


图3

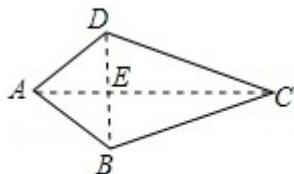


图2

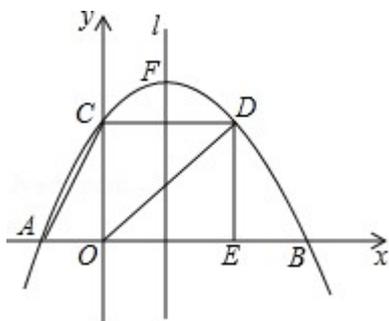
【点评】 本题考查的是正方形的性质、全等三角形的判定和性质、垂直的定义、勾股定理的应用, 正确理解垂美四边形的定义、灵活运用勾股定理是解题的关键.

26. (13分) (2019•天水) 如图, 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 $A(-3, 0)$ 、 $B(9, 0)$ 和 $C(0, 4)$, CD 垂直于 y 轴, 交抛物线于点 D , DE 垂直于 x 轴, 垂足为 E , 直线 l 是该抛物线的对称轴, 点 F 是抛物线的顶点.

(1) 求出该二次函数的表达式及点 D 的坐标;

(2) 若 $Rt\triangle AOC$ 沿 x 轴向右平移, 使其直角边 OC 与对称轴 l 重合, 再沿对称轴 l 向上平移到点 C 与点 F 重合, 得到 $Rt\triangle A_1O_1F$, 求此时 $Rt\triangle A_1O_1F$ 与矩形 $OCDE$ 重叠部分图形的面积;

(3) 若 $Rt\triangle AOC$ 沿 x 轴向右平移 t 个单位长度 ($0 < t \leq 6$) 得到 $Rt\triangle A_2O_2C_2$, $Rt\triangle A_2O_2C_2$ 与 $Rt\triangle OED$ 重叠部分图形的面积记为 S , 求 S 与 t 之间的函数表达式, 并写出自变量 t 的取值范围.



【考点】 HF: 二次函数综合题.

【专题】 15: 综合题.

【分析】 (1) 将点 $A(-3, 0)$ 、 $B(9, 0)$ 和 $C(0, 4)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$ 即可求出该二次函数表达式, 因为 CD 垂直于 y 轴, 所以令 $y = 4$, 求出 x 的值, 即可写出点 D 坐标;

(2) 设 A_1F 交 CD 于点 G , O_1F 交 CD 于点 H , 求出顶点坐标, 证 $\triangle FGH \sim \triangle FA_1O_1$, 求出 GH 的长, 因为 $Rt\triangle A_1O_1F$ 与矩形 $OCDE$ 重叠部分的图形是梯形 A_1O_1HG , 所以 $S_{重}$

叠部分 = $S_{\triangle A_1O_1F} - S_{\triangle FGH}$, 即可求出结果;

(3) 当 $0 < t \leq 3$ 时, 设 O_2C_2 交 OD 于点 M , 证 $\triangle OO_2M \sim \triangle OED$, 求出 $O_2M = \frac{2}{3}t$, 可

直接求出 $S = S_{\triangle OO_2M} = \frac{1}{2}OO_2 \times O_2M = \frac{1}{3}t^2$; 当 $3 < t \leq 6$ 时, 设 A_2C_2 交 OD 于点

M , O_2C_2 交 OD 于点 N , 分别求出直线 OD 与直线 A_2C_2 的解析式, 再求出其交点 M 的坐

标, 证 $\triangle DC_2N \sim \triangle DCO$, 求出 $C_2N = \frac{2}{3}(6-t)$, 由 $S = S_{\text{四边形}A_2O_2NM} =$

$$S_{\triangle A_2O_2C_2} - S_{\triangle C_2MN}$$

可求出 S 与 t 的函数表达式.

【解答】解: (1) \because 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 $A(-3, 0)$ 、 $B(9, 0)$ 和 $C(0, 4)$,

\therefore 抛物线的解析式为 $y = a(x+3)(x-9)$,

\because 点 $C(0, 4)$ 在抛物线上,

$$\therefore 4 = -27a,$$

$$\therefore a = -\frac{4}{27},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为: } y = -\frac{4}{27}(x+3)(x-9) = -\frac{4}{27}x^2 + \frac{8}{9}x + 4,$$

$\because CD$ 垂直于 y 轴, $C(0, 4)$,

$$\text{令 } -\frac{4}{27}x^2 + \frac{8}{9}x + 4 = 4,$$

解得, $x=0$ 或 $x=6$,

\therefore 点 D 的坐标为 $(6, 4)$;

(2) 如图 1 所示, 设 A_1F 交 CD 于点 G , O_1F 交 CD 于点 H ,

\because 点 F 是抛物线 $y = -\frac{4}{27}x^2 + \frac{8}{9}x + 4$ 的顶点,

$$\therefore F\left(3, \frac{16}{3}\right),$$

$$\therefore FH = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3},$$

$$\because GH \parallel A_1O_1,$$

$$\therefore \triangle FGH \sim \triangle FA_1O_1,$$

$$\therefore \frac{GH}{A_1O_1} = \frac{FH}{FO_1},$$

$$\therefore \frac{GH}{3} = \frac{\frac{4}{3}}{4},$$

解得, $GH = 1$,

\therefore Rt $\triangle A_1O_1F$ 与矩形 $OCDE$ 重叠部分的图形是梯形 A_1O_1HG ,

$$\therefore S_{\text{重叠部分}} = S_{\triangle A_1O_1F} - S_{\triangle FGH}$$

$$= \frac{1}{2} A_1O_1 \cdot O_1F - \frac{1}{2} GH \cdot FH$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 - \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{4}{3}$$

$$= \frac{16}{3};$$

(3) ① 当 $0 < t \leq 3$ 时, 如图 2 所示, 设 O_2C_2 交 OD 于点 M ,

$$\because C_2O_2 \parallel DE,$$

$$\therefore \triangle OO_2M \sim \triangle OED,$$

$$\therefore \frac{O_2M}{DE} = \frac{OO_2}{OE},$$

$$\therefore \frac{O_2M}{4} = \frac{t}{6},$$

$$\therefore O_2M = \frac{2}{3}t,$$

$$\therefore S = S_{\triangle OO_2M} = \frac{1}{2} OO_2 \times O_2M = \frac{1}{2} t \times \frac{2}{3} t = \frac{1}{3} t^2;$$

② 当 $3 < t \leq 6$ 时, 如图 3 所示, 设 A_2C_2 交 OD 于点 M , O_2C_2 交 OD 于点 N ,

将点 $D(6, 4)$ 代入 $y=kx$,

$$\text{得, } k = \frac{2}{3},$$

$$\therefore y_{OD} = \frac{2}{3}x,$$

将点 $(t-3, 0)$, $(t, 4)$ 代入 $y=kx+b$,

$$\text{得, } \begin{cases} k(t-3)+b=0 \\ kt+b=4 \end{cases},$$

$$\text{解得, } k = \frac{4}{3}, b = -\frac{4}{3}t+4,$$

$$\therefore \text{直线 } A_2C_2 \text{ 的解析式为: } y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}t+4,$$

$$\text{联立 } y_{OD} = \frac{2}{3}x \text{ 与 } y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}t+4,$$

$$\text{得, } \frac{2}{3}x = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}t+4,$$

$$\text{解得, } x = -6+2t,$$

$$\therefore \text{两直线交点 } M \text{ 坐标为 } (-6+2t, -4+\frac{4}{3}t),$$

故点 M 到 O_2C_2 的距离为 $6-t$,

$$\because C_2N \parallel OC,$$

$$\therefore \triangle DC_2N \sim \triangle DCO,$$

$$\therefore \frac{DC_2}{CD} = \frac{C_2N}{OC},$$

$$\therefore \frac{6-t}{6} = \frac{C_2N}{4},$$

$$\therefore C_2N = \frac{2}{3}(6-t),$$

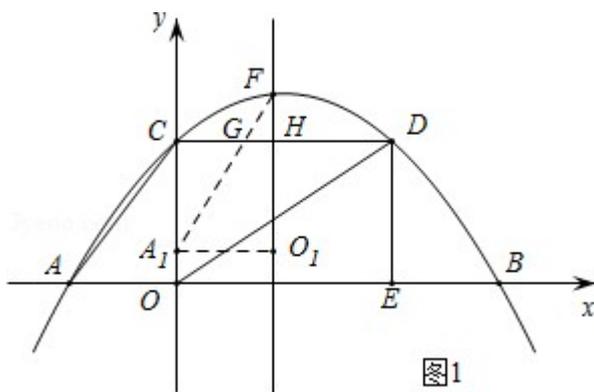
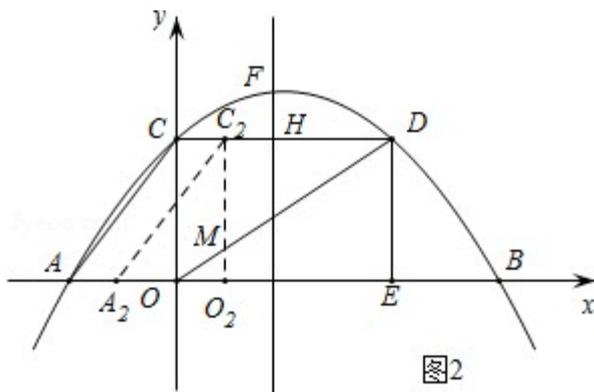
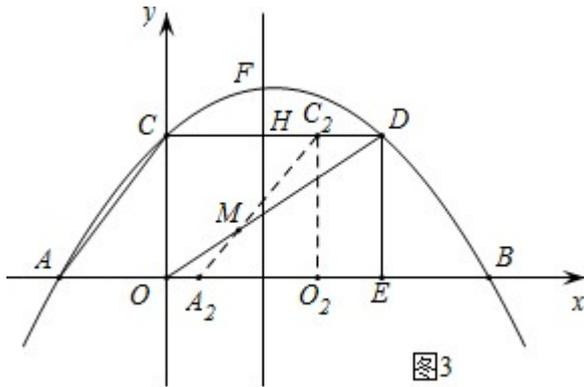
$$\therefore S = S_{\text{四边形 } A_2O_2NM} = S_{\triangle A_2O_2C_2} - S_{\triangle C_2MN}$$

$$= \frac{1}{2}OA \cdot OC - \frac{1}{2}C_2N(6-t)$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 - \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}(6-t)(6-t)$$

$$= -\frac{1}{3}t^2 + 4t - 6;$$

$$\therefore S \text{ 与 } t \text{ 的函数关系式为: } S = \begin{cases} \frac{1}{3}t^2 & (0 < t \leq 3) \\ -\frac{1}{3}t^2 + 4t - 6 & (3 < t \leq 6) \end{cases}$$



【点评】本题考查了待定系数法求解析式，相似三角形的判定与性质，三角形的面积等，解题关键是能够根据题意画图，知道有些不规则图形的面积可转化为几个规则图形的面

积和或差来求出.

考点卡片

1. 相反数

(1) 相反数的概念: 只有符号不同的两个数叫做互为相反数.

(2) 相反数的意义: 掌握相反数是成对出现的, 不能单独存在, 从数轴上看, 除 0 外, 互为相反数的两个数, 它们分别在原点两旁且到原点距离相等.

(3) 多重符号的化简: 与 “+” 个数无关, 有奇数个 “-” 号结果为负, 有偶数个 “-” 号, 结果为正.

(4) 规律方法总结: 求一个数的相反数的方法就是在这个数的前边添加 “-”, 如 a 的相反数是 $-a$, $m+n$ 的相反数是 $-(m+n)$, 这时 $m+n$ 是一个整体, 在整体前面添负号时, 要用小括号.

2. 绝对值

(1) 概念: 数轴上某个数与原点的距离叫做这个数的绝对值.

① 互为相反数的两个数绝对值相等;

② 绝对值等于一个正数的数有两个, 绝对值等于 0 的数有一个, 没有绝对值等于负数的数.

③ 有理数的绝对值都是非负数.

(2) 如果用字母 a 表示有理数, 则数 a 绝对值要由字母 a 本身的取值来确定:

① 当 a 是正有理数时, a 的绝对值是它本身 a ;

② 当 a 是负有理数时, a 的绝对值是它的相反数 $-a$;

③ 当 a 是零时, a 的绝对值是零.

即 $|a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$

3. 有理数的加法

(1) 有理数加法法则:

① 同号相加, 取相同符号, 并把绝对值相加.

② 绝对值不等的异号加减, 取绝对值较大的加数符号, 并用较大的绝对值减去较小的绝对值. 互为相反数的两个数相加得 0.

③ 一个数同 0 相加, 仍得这个数.

(在进行有理数加法运算时, 首先判断两个加数的符号: 是同号还是异号, 是否有 0. 从而确定用那一条法则. 在应用过程中, 要牢记 “先符号, 后绝对值”.)

(2) 相关运算律

交换律: $a+b=b+a$; 结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$.

4. 科学记数法—表示较小的数

用科学记数法表示较小的数, 一般形式为 $a \times 10^{-n}$, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定.

【规律方法】用科学记数法表示有理数 x 的规律

x 的取值范围	表示方法	a 的取值	n 的取值
$ x \geq 10$	$a \times 10^n$	$1 \leq a $	整数的位数 - 1
$ x < 1$	$a \times 10^{-n}$	< 10	第一位非零数字前所有 0 的个数 (含小数点前的 0)

5. 实数的运算

(1) 实数的运算和在有理数范围内一样, 值得一提的是, 实数既可以进行加、减、乘、除、乘方运算, 又可以进行开方运算, 其中正实数可以开平方.

(2) 在进行实数运算时, 和有理数运算一样, 要从高级到低级, 即先算乘方、开方, 再算乘除, 最后算加减, 有括号的要先算括号里面的, 同级运算要按照从左到右的顺序进行. 另外, 有理数的运算律在实数范围内仍然适用.

【规律方法】实数运算的“三个关键”

- 运算法则: 乘方和开方运算、幂的运算、指数 (特别是负整数指数, 0 指数) 运算、根式运算、特殊三角函数值的计算以及绝对值的化简等.
- 运算顺序: 先乘方, 再乘除, 后加减, 有括号的先算括号里面的, 在同一级运算中要从左到右依次运算, 无论何种运算, 都要注意先定符号后运算.
- 运算律的使用: 使用运算律可以简化运算, 提高运算速度和准确度.

6. 代数式求值

(1) 代数式的值: 用数值代替代数式里的字母, 计算后所得的结果叫做代数式的值.

(2) 代数式的求值: 求代数式的值可以直接代入、计算. 如果给出的代数式可以化简, 要先化简再求值.

题型简单总结以下三种:

- ① 已知条件不化简, 所给代数式化简;
- ② 已知条件化简, 所给代数式不化简;

③ 已知条件和所给代数式都要化简.

7. 合并同类项

(1) 定义: 把多项式中同类项合成一项, 叫做合并同类项.

(2) 合并同类项的法则: 把同类项的系数相加, 所得结果作为系数, 字母和字母的指数不变.

(3) 合并同类项时要注意以下三点:

① 要掌握同类项的概念, 会辨别同类项, 并准确地掌握判断同类项的两条标准: 带有相同系数的代数项; 字母和字母指数;

② 明确合并同类项的含义是把多项式中的同类项合并成一项, 经过合并同类项, 式的项数会减少, 达到化简多项式的目的;

③ “合并”是指同类项的系数的相加, 并把得到的结果作为新的系数, 要保持同类项的字母和字母的指数不变.

8. 规律型: 图形的变化类

图形的变化类的规律题

首先应找出图形哪些部分发生了变化, 是按照什么规律变化的, 通过分析找到各部分的变化规律后直接利用规律求解. 探寻规律要认真观察、仔细思考, 善用联想来解决这类问题.

9. 同底数幂的乘法

(1) 同底数幂的乘法法则: 同底数幂相乘, 底数不变, 指数相加.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (m, n \text{ 是正整数})$$

(2) 推广: $a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}$ (m, n, p 都是正整数)

在应用同底数幂的乘法法则时, 应注意: ① 底数必须相同, 如 2^3 与 2^5 , $(a^2b^2)^3$ 与 $(a^2b^2)^4$, $(x-y)^2$ 与 $(x-y)^3$ 等; ② a 可以是单项式, 也可以是多项式; ③ 按照运算性质, 只有相乘时才是底数不变, 指数相加.

(3) 概括整合: 同底数幂的乘法, 是学习整式乘除运算的基础, 是学好整式运算的关键.

在运用时要抓住“同底数”这一关键点, 同时注意, 有的底数可能并不相同, 这时可以适当变形为同底数幂.

10. 幂的乘方与积的乘方

(1) 幂的乘方法则: 底数不变, 指数相乘.

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (m, n \text{ 是正整数})$$

注意: ① 幂的乘方的底数指的是幂的底数; ② 性质中“指数相乘”指的是幂的指数与乘方

的指数相乘, 这里注意与同底数幂的乘法中“指数相加”的区别.

(2) 积的乘方法则: 把每一个因式分别乘方, 再把所得的幂相乘.

$(ab)^n = a^n b^n$ (n 是正整数)

注意: ①因式是三个或三个以上积的乘方, 法则仍适用; ②运用时数字因数的乘方应根据乘方的意义, 计算出最后的结果.

11. 分式的化简求值

先把分式化简后, 再把分式中未知数对应的值代入求出分式的值.

在化简的过程中要注意运算顺序和分式的化简. 化简的最后结果分子、分母要进行约分, 注意运算的结果要化成最简分式或整式.

【规律方法】分式化简求值时需注意的问题

1. 化简求值, 一般是先化简为最简分式或整式, 再代入求值. 化简时不能跨度太大, 而缺少必要的步骤, 代入求值的模式一般为“当...时, 原式=...”.
2. 代入求值时, 有直接代入法, 整体代入法等常用方法. 解题时可根据题目的具体条件选择合适的方法. 当未知数的值没有明确给出时, 所选取的未知数的值必须使原式中的各分式都有意义, 且除数不能为 0.

12. 一元二次方程的应用

1、列方程解决实际问题的步骤是: 审清题意设未知数, 列出方程, 解所列方程求所列方程的解, 检验和作答.

2、列一元二次方程解应用中常见问题:

(1) 数字问题: 个位数为 a , 十位数是 b , 则这个两位数表示为 $10b+a$.

(2) 增长率问题: 增长率 = 增长数量/原数量 $\times 100\%$. 如: 若原数是 a , 每次增长的百分率为 x , 则第一次增长后为 $a(1+x)$; 第二次增长后为 $a(1+x)^2$, 即 原数 $\times (1 + \text{增长百分率})^2 = \text{后来数}$.

(3) 形积问题: ①利用勾股定理列一元二次方程, 求三角形、矩形的边长. ②利用三角形、矩形、菱形、梯形和圆的面积, 以及柱体体积公式建立等量关系列一元二次方程. ③利用相似三角形的对应比例关系, 列比例式, 通过两内项之积等于两外项之积, 得到一元二次方程.

(4) 运动点问题: 物体运动将会沿着一条路线或形成一条痕迹, 运行的路线与其他条件会构成直角三角形, 可运用直角三角形的性质列方程求解.

【规律方法】列一元二次方程解应用题的“六字诀”

1. 审：理解题意，明确未知量、已知量以及它们之间的数量关系.
2. 设：根据题意，可以直接设未知数，也可以间接设未知数.
3. 列：根据题中的等量关系，用含所设未知数的代数式表示其他未知量，从而列出方程.
4. 解：准确求出方程的解.
5. 验：检验所求出的根是否符合所列方程和实际问题.
6. 答：写出答案.

13. 解分式方程

(1) 解分式方程的步骤：①去分母；②求出整式方程的解；③检验；④得出结论.

(2) 解分式方程时，去分母后所得整式方程的解有可能使原方程中的分母为 0，所以应如下检验：

① 将整式方程的解代入最简公分母，如果最简公分母的值不为 0，则整式方程的解是原分式方程的解.

② 将整式方程的解代入最简公分母，如果最简公分母的值为 0，则整式方程的解不是原分式方程的解.

所以解分式方程时，一定要检验.

14. 一元一次不等式组的整数解

(1) 利用数轴确定不等式组的解（整数解）.

解决此类问题的关键在于正确解得不等式组或不等式的解集，然后再根据题目中对于解集的限制得到下一步所需要的条件，再根据得到的条件进而求得不等式组的整数解.

(2) 已知解集（整数解）求字母的取值.

一般思路为：先把题目中除未知数外的字母当做常数看待解不等式组或方程组等，然后再根据题目中对结果的限制的条件得到有关字母的代数式，最后解代数式即可得到答案.

15. 坐标与图形性质

1、点到坐标轴的距离与这个点的坐标是有区别的，表现在两个方面：①到 x 轴的距离与纵坐标有关，到 y 轴的距离与横坐标有关；②距离都是非负数，而坐标可以是负数，在由距离求坐标时，需要加上恰当的符号.

2、有图形中一些点的坐标求面积时，过已知点向坐标轴作垂线，然后求出相关的线段长，是解决这类问题的基本方法和规律.

3、若坐标系内的四边形是非规则四边形，通常用平行于坐标轴的辅助线用“割、补”法去

解决问题.

16. 函数自变量的取值范围

自变量的取值范围必须使含有自变量的表达式都有意义.

- ① 当表达式的分母不含有自变量时, 自变量取全体实数. 例如 $y=2x+13$ 中的 x .
- ② 当表达式的分母中含有自变量时, 自变量取值要使分母不为零. 例如 $y=x+2x-1$.
- ③ 当函数的表达式是偶次根式时, 自变量的取值范围必须使被开方数不小于零.
- ④ 对于实际问题中的函数关系式, 自变量的取值除必须使表达式有意义外, 还要保证实际问题有意义.

17. 动点问题的函数图象

函数图象是典型的数形结合, 图象应用信息广泛, 通过看图获取信息, 不仅可以解决生活中的实际问题, 还可以提高分析问题、解决问题的能力.

用图象解决问题时, 要理清图象的含义即会识图.

18. 反比例函数与一次函数的交点问题

反比例函数与一次函数的交点问题

(1) 求反比例函数与一次函数的交点坐标, 把两个函数关系式联立成方程组求解, 若方程组有解则两者有交点, 方程组无解, 则两者无交点.

(2) 判断正比例函数 $y=k_1x$ 和反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 在同一直角坐标系中的交点个数可总结为:

① 当 k_1 与 k_2 同号时, 正比例函数 $y=k_1x$ 和反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 在同一直角坐标系中有 2 个交点;

② 当 k_1 与 k_2 异号时, 正比例函数 $y=k_1x$ 和反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 在同一直角坐标系中有 0 个交点.

19. 二次函数图象与系数的关系

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$)

① 二次项系数 a 决定抛物线的开口方向和大小.

当 $a > 0$ 时, 抛物线向上开口; 当 $a < 0$ 时, 抛物线向下开口; $|a|$ 还可以决定开口大小, $|a|$ 越大开口就越小.

② 一次项系数 b 和二次项系数 a 共同决定对称轴的位置.

当 a 与 b 同号时 (即 $ab > 0$), 对称轴在 y 轴左; 当 a 与 b 异号时 (即 $ab < 0$), 对称轴在 y 轴右. (简称: 左同右异)

③. 常数项 c 决定抛物线与 y 轴交点. 抛物线与 y 轴交于 $(0, c)$.

④ 抛物线与 x 轴交点个数.

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 时, 抛物线与 x 轴有 2 个交点; $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ 时, 抛物线与 x 轴有 1 个交点; $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 时, 抛物线与 x 轴没有交点.

20. 二次函数的应用

(1) 利用二次函数解决利润问题

在商品经营活动中, 经常会遇到求最大利润, 最大销量等问题. 解此类题的关键是通过题意, 确定出二次函数的解析式, 然后确定其最大值, 实际问题中自变量 x 的取值要使实际问题有意义, 因此在求二次函数的最值时, 一定要注意自变量 x 的取值范围.

(2) 几何图形中的最值问题

几何图形中的二次函数问题常见的有: 几何图形中面积的最值, 用料的最佳方案以及动态几何中的最值的讨论.

(3) 构建二次函数模型解决实际问题

利用二次函数解决抛物线形的隧道、大桥和拱门等实际问题时, 要恰当地把这些实际问题中的数据落实到平面直角坐标系中的抛物线上, 从而确定抛物线的解析式, 通过解析式可解决一些测量问题或其他问题.

21. 二次函数综合题

(1) 二次函数图象与其他函数图象相结合问题

解决此类问题时, 先根据给定的函数或函数图象判断出系数的符号, 然后判断新的函数关系式中系数的符号, 再根据系数与图象的位置关系判断出图象特征, 则符合所有特征的图象即为正确选项.

(2) 二次函数与方程、几何知识的综合应用

将函数知识与方程、几何知识有机地结合在一起. 这类试题一般难度较大. 解这类问题关键是善于将函数问题转化为方程问题, 善于利用几何图形的有关性质、定理和二次函数的知识, 并注意挖掘题目中的一些隐含条件.

(3) 二次函数在实际生活中的应用题

从实际问题中分析变量之间的关系, 建立二次函数模型. 关键在于观察、分析、创建, 建立

直角坐标系下的二次函数图象, 然后数形结合解决问题, 需要注意的是自变量及函数的取值范围要使实际问题有意义.

22. 平行线的性质

1、平行线性质的定理

定理 1: 两条平行线被第三条直线所截, 同位角相等. 简单说成: 两直线平行, 同位角相等.

定理 2: 两条平行线被地三条直线所截, 同旁内角互补. . 简单说成: 两直线平行, 同旁内角互补.

定理 3: 两条平行线被第三条直线所截, 内错角相等. 简单说成: 两直线平行, 内错角相等.

2、两条平行线之间的距离处处相等.

23. 等边三角形的性质

(1) 等边三角形的定义: 三条边都相等的三角形叫做等边三角形, 等边三角形是特殊的等腰三角形.

① 它可以作为判定一个三角形是否为等边三角形的方法;

② 可以得到它与等腰三角形的关系: 等边三角形是等腰三角形的特殊情况. 在等边三角形中, 腰和底、顶角和底角是相对而言的.

(2) 等边三角形的性质: 等边三角形的三个内角都相等, 且都等于 60° .

等边三角形是轴对称图形, 它有三条对称轴; 它的任意一角的平分线都垂直平分对边, 三边的垂直平分线是对称轴.

24. 勾股定理

(1) 勾股定理: 在任何一个直角三角形中, 两条直角边长的平方之和一定等于斜边长的平方.

如果直角三角形的两条直角边长分别是 a , b , 斜边长为 c , 那么 $a^2+b^2=c^2$.

(2) 勾股定理应用的前提条件是在直角三角形中.

(3) 勾股定理公式 $a^2+b^2=c^2$ 的变形有: $a=\sqrt{c^2-b^2}$, $b=\sqrt{c^2-a^2}$ 及 $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

(4) 由于 $a^2+b^2=c^2 > a^2$, 所以 $c > a$, 同理 $c > b$, 即直角三角形的斜边大于该直角三角形中的每一条直角边.

25. 菱形的性质

(1) 菱形的定义: 有一组邻边相等的平行四边形叫做菱形.

(2) 菱形的性质

- ① 菱形具有平行四边形的一切性质;
- ② 菱形的四条边都相等;
- ③ 菱形的两条对角线互相垂直, 并且每一条对角线平分一组对角;
- ④ 菱形是轴对称图形, 它有 2 条对称轴, 分别是两条对角线所在直线.

(3) 菱形的面积计算

- ① 利用平行四边形的面积公式.
- ② 菱形面积 $= \frac{1}{2}ab$. (a 、 b 是两条对角线的长度)

26. 矩形的性质

(1) 矩形的定义: 有一个角是直角的平行四边形是矩形.

(2) 矩形的性质

- ① 平行四边形的性质矩形都具有;
- ② 角: 矩形的四个角都是直角;
- ③ 边: 邻边垂直;
- ④ 对角线: 矩形的对角线相等;
- ⑤ 矩形是轴对称图形, 又是中心对称图形. 它有 2 条对称轴, 分别是每组对边中点连线所在的直线; 对称中心是两条对角线的交点.

(3) 由矩形的性质, 可以得到直角三角形的一个重要性质, 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

27. 四边形综合题

四边形综合题.

28. 垂径定理

(1) 垂径定理

垂直于弦的直径平分这条弦, 并且平分弦所对的两条弧.

(2) 垂径定理的推论

推论 1: 平分弦 (不是直径) 的直径垂直于弦, 并且平分弦所对的两条弧.

推论 2: 弦的垂直平分线经过圆心, 并且平分弦所对的两条弧.

推论 3: 平分弦所对一条弧的直径, 垂直平分弦, 并且平分弦所对的另一条弧.

29. 圆周角定理

(1) 圆周角的定义: 顶点在圆上, 并且两边都与圆相交的角叫做圆周角.

注意: 圆周角必须满足两个条件: ① 顶点在圆上. ② 角的两条边都与圆相交, 二者缺一不可.

(2) 圆周角定理: 在同圆或等圆中, 同弧或等弧所对的圆周角相等, 都等于这条弧所对的圆心角的一半.

推论: 半圆 (或直径) 所对的圆周角是直角, 90° 的圆周角所对的弦是直径.

(3) 在解圆的有关问题时, 常常需要添加辅助线, 构成直径所对的圆周角, 这种基本技能技巧一定要掌握.

(4) 注意: ① 圆周角和圆心角的转化可通过作圆的半径构造等腰三角形. 利用等腰三角形的顶点和底角的关系进行转化. ② 圆周角和圆周的转化可利用其“桥梁”——圆心角转化. ③ 定理成立的条件是“同一条弧所对的”两种角, 在运用定理时不要忽略了这个条件, 把不同弧所对的圆周角与圆心角错当成同一条弧所对的圆周角和圆心角.

30. 切线的判定与性质

(1) 切线的性质

- ① 圆的切线垂直于经过切点的半径.
- ② 经过圆心且垂直于切线的直线必经过切点.
- ③ 经过切点且垂直于切线的直线必经过圆心.

(2) 切线的判定定理: 经过半径的外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

(3) 常见的辅助线的:

- ① 判定切线时“连圆心和直线与圆的公共点”或“过圆心作这条直线的垂线”;
- ② 有切线时, 常常“遇到切点连圆心得半径”.

31. 扇形面积的计算

(1) 圆面积公式: $S = \pi r^2$

(2) 扇形: 由组成圆心角的两条半径和圆心角所对的弧所围成的图形叫做扇形.

(3) 扇形面积计算公式: 设圆心角是 n° , 圆的半径为 R 的扇形面积为 S , 则

$$S_{\text{扇形}} = \frac{n}{360} \pi R^2 \text{ 或 } S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2} l R \text{ (其中 } l \text{ 为扇形的弧长)}$$

(4) 求阴影面积常用的方法:

- ① 直接用公式法;
- ② 和差法;

③ 割补法.

(5) 求阴影面积的主要思路是将不规则图形面积转化为规则图形的面积.

32. 翻折变换 (折叠问题)

1、翻折变换 (折叠问题) 实质上就是轴对称变换.

2、折叠的性质: 折叠是一种对称变换, 它属于轴对称, 折叠前后图形的形状和大小不变, 位置变化, 对应边和对应角相等.

3、在解决实际问题时, 对于折叠较为复杂的问题可以实际操作图形的折叠, 这样便于找到图形间的关系.

首先清楚折叠和轴对称能够提供给我们隐含的并且可利用的条件. 解题时, 我们常常设要求的线段长为 x , 然后根据折叠和轴对称的性质用含 x 的代数式表示其他线段的长度, 选择适当的直角三角形, 运用勾股定理列出方程求出答案. 我们运用方程解决时, 应认真审题设出正确的未知数.

33. 特殊角的三角函数值

(1) 特指 30° 、 45° 、 60° 角的各种三角函数值.

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \tan 45^\circ = 1;$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}; \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3};$$

(2) 应用中要熟记特殊角的三角函数值, 一是按值的变化规律去记, 正弦逐渐增大, 余弦逐渐减小, 正切逐渐增大; 二是按特殊直角三角形中各边特殊值规律去记.

(3) 特殊角的三角函数值应用广泛, 一是它可以当作数进行运算, 二是具有三角函数的特点, 在解直角三角形中应用较多.

34. 解直角三角形

(1) 解直角三角形的定义

在直角三角形中, 由已知元素求未知元素的过程就是解直角三角形.

(2) 解直角三角形要用到的关系

① 锐角直角的关系: $\angle A + \angle B = 90^\circ$;

② 三边之间的关系: $a^2 + b^2 = c^2$;

③ 边角之间的关系:

$\sin A = \angle A$ 的对边斜边 $= \frac{a}{c}$, $\cos A = \angle A$ 的邻边斜边 $= \frac{b}{c}$, $\tan A = \angle A$ 的对边 $\angle A$ 的邻边 $= \frac{a}{b}$.

(a, b, c 分别是 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边)

35. 解直角三角形的应用-坡度坡角问题

(1) 坡度是坡面的铅直高度 h 和水平宽度 l 的比, 又叫做坡比, 它是一个比值, 反映了斜坡的陡峭程度, 一般用 i 表示, 常写成 $i=1:m$ 的形式.

(2) 把坡面与水平面的夹角 α 叫做坡角, 坡度 i 与坡角 α 之间的关系为: $i = h/l = \tan \alpha$.

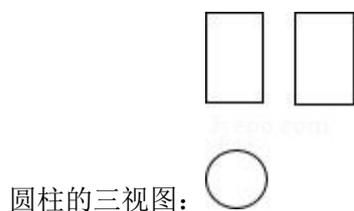
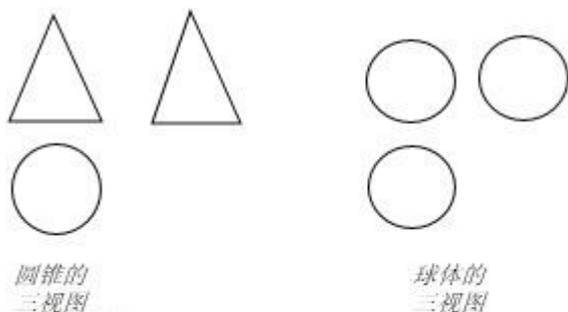
(3) 在解决坡度的有关问题中, 一般通过作高构成直角三角形, 坡角即是一锐角, 坡度实际就是一锐角的正切值, 水平宽度或铅直高度都是直角边, 实质也是解直角三角形问题.

应用领域: ①测量领域; ②航空领域 ③航海领域: ④工程领域等.

36. 简单几何体的三视图

(1) 画物体的主视图的口诀为: 主、俯: 长对正; 主、左: 高平齐; 俯、左: 宽相等.

(2) 常见的几何体的三视图:



37. 用样本估计总体

用样本估计总体是统计的基本思想.

1、用样本的频率分布估计总体分布:

从一个总体得到一个包含大量数据的样本, 我们很难从一个个数字中直接看出样本所包含的信息. 这时, 我们用频率分布直方图来表示相应样本的频率分布, 从而去估计总体的分布情况.

2、用样本的数字特征估计总体的数字特征 (主要数据有众数、中位数、平均数、标准差与方差).

一般来说, 用样本去估计总体时, 样本越具有代表性、容量越大, 这时对总体的估计也就越精确.

38. 扇形统计图

(1) 扇形统计图是用整个圆表示总数用圆内各个扇形的大小表示各部分数量占总数的百分数. 通过扇形统计图可以很清楚地表示出各部分数量同总数之间的关系. 用整个圆的面积表示总数 (单位 1), 用圆的扇形面积表示各部分占总数的百分数.

(2) 扇形图的特点: 从扇形图上可以清楚地看出各部分数量和总数量之间的关系.

(3) 制作扇形图的步骤

- ① 根据有关数据先算出各部分在总体中所占的百分数, 再算出各部分圆心角的度数, 公式是各部分扇形圆心角的度数 = 部分占总体的百分比 $\times 360^\circ$. ____
- ② 按比例取适当半径画一个圆; 按扇形圆心角的度数用量角器在圆内量出各个扇形的圆心角的度数;
- ④ 在各扇形内写上相应的名称及百分数, 并用不同的标记把各扇形区分开来.

39. 条形统计图

(1) 定义: 条形统计图是用线段长度表示数据, 根据数量的多少画成长短不同的矩形直条, 然后按顺序把这些直条排列起来.

(2) 特点: 从条形图可以很容易看出数据的大小, 便于比较.

(3) 制作条形图的一般步骤:

- ① 根据图纸的大小, 画出两条互相垂直的射线.
- ② 在水平射线上, 适当分配条形的位置, 确定直条的宽度和间隔.
- ③ 在与水平射线垂直的射线上, 根据数据大小的具体情况, 确定单位长度表示多少.
- ④ 按照数据大小, 画出长短不同的直条, 并注明数量.

40. 算术平均数

(1) 平均数是指在一组数据中所有数据之和再除以数据的个数. 它是反映数据集中趋势的一项指标.

(2) 算术平均数: 对于 n 个数 x_1, x_2, \dots, x_n , 则 $\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ 就叫做这 n 个数

的算术平均数.

(3) 算术平均数是加权平均数的一种特殊情况, 加权平均数包含算术平均数, 当加权平均数中的权相等时, 就是算术平均数.

41. 中位数

(1) 中位数:

将一组数据按照从小到大 (或从大到小) 的顺序排列, 如果数据的个数是奇数, 则处于中间位置的数就是这组数据的中位数.

如果这组数据的个数是偶数, 则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数.

(2) 中位数代表了这组数据值大小的“中点”, 不易受极端值影响, 但不能充分利用所有数据的信息.

(3) 中位数仅与数据的排列位置有关, 某些数据的移动对中位数没有影响, 中位数可能出现在所给数据中也可能不在所给的数据中出现, 当一组数据中的个别数据变动较大时, 可用中位数描述其趋势.

42. 几何概率

所谓几何概型的概率问题, 是指具有下列特征的一些随机现象的概率问题: 设在空间上有一区域 G , 又区域 g 包含在区域 G 内 (如图), 而区域 G 与 g 都是可以度量的 (可求面积), 现随机地向 G 内投掷一点 M , 假设点 M 必落在 G 中, 且点 M 落在区域 G 的任何部分区域 g 内的概率只与 g 的度量 (长度、面积、体积等) 成正比, 而与 g 的位置和形状无关. 具有这种性质的随机试验 (掷点), 称为几何概型. 关于几何概型的随机事件 “向区域 G 中任意投掷一个点 M , 点 M 落在 G 内的部分区域 g ” 的概率 P 定义为: g 的度量与 G 的度量之比, 即 $P = \frac{g \text{ 的测度}}{G \text{ 的测度}}$

简单来说: 求概率时, 已知和未知与几何有关的就是几何概率. 计算方法是长度比, 面积比, 体积比等.