

江西省 2016 年中等学校招生考试

数 学 试 题 卷

说明: 1. 本卷共有六个大题, 23 个小题, 全卷满分 120 分, 考试时间 120 分钟.

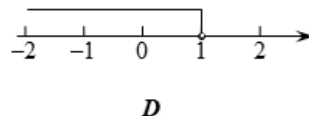
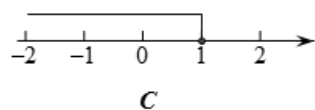
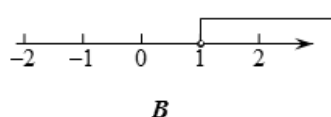
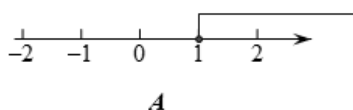
2. 本卷分为试题卷和答题卷, 答案要求写在答题卷上, 不得在试题卷上作答, 否则不给分.

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分. 每小题只有一个正确选项)

1. 下列四个数中, 最大的一个数是 ().

- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. 0 D. -2

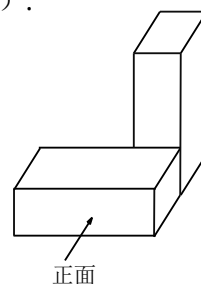
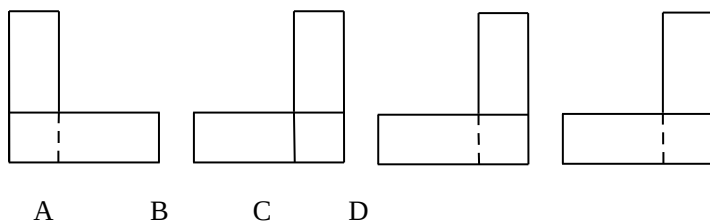
2. 将不等式 $3x-2 < 1$ 的解集表示在数轴上, 正确的是 ().



3. 下列运算正确的是 ().

- A. $a^2+a^2=a^4$ B. $(-b^2)^3=-b^6$ C. $2x \cdot 2x^2=2x^3$ D. $(m-n)^2=m^2-n^2$

4. 有两个完全相同的长方体, 按下面右图方式摆放, 其主视图是 ().



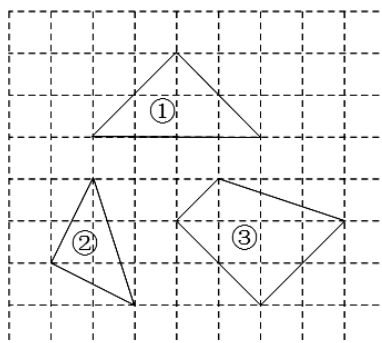
第 4 题

5. 设 α, β 是一元二次方程 $x^2+2x-1=0$ 的两个根, 则 $\alpha\beta$ 的值是 ().

- A. 2 B. 1 C. -2 D. -1

6. 如图, 在正方形网格中, 每个小正方形的边长均相等. 网格中三个多边形 (分别标记为①, ②, ③) 的顶点均在格点上. 被一个多边形覆盖的网格线中, 竖直部分线段长度之和记为 m , 水平部分线段长度之和记为 n , 则这三个多边形中满足 $m=n$ 的是 ().

- A. 只有② B. 只有③ C. ②③ D. ①②③

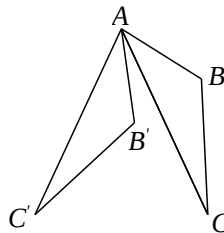


二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分) 第 6 题

7. 计算: $-3+2=$ _____.

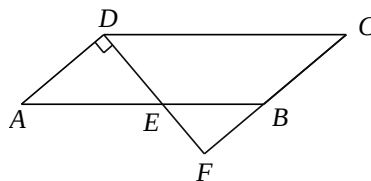
8. 分解因式: $ax^2-ay^2=$ _____.

9. 如图所示, $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=33^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 按顺时针方向旋转 50° , 对应得到 $\triangle AB'C'$, 则 $\angle B'AC$ 的度数为_____.



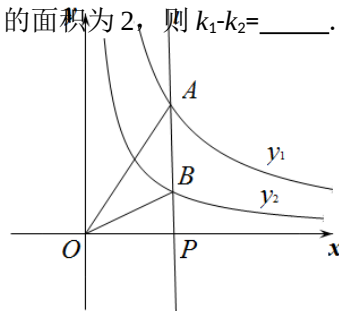
第 9 题

10. 如图所示, 在 $\square ABCD$ 中, $\angle C=40^\circ$, 过点 D 作 AD 的垂线, 交 AB 于点 E , 交 CB 的延长线于点 F , 则 $\angle BEF$ 的度数为_____.



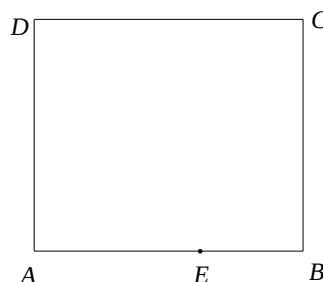
第 10 题

11. 如图, 直线 $l \perp x$ 轴于点 P , 且与反比例函数 $y_1 = \frac{k_1}{x} (x > 0)$ 及 $y_2 = \frac{k_2}{x} (x > 0)$ 的图象分别交于点 A, B , 连接 OA, OB , 已知 $\triangle OAB$ 的面积为 2, 则 $k_1 - k_2 =$ _____.



第 11 题

12. 如图是一张长方形纸片 $ABCD$, 已知 $AB=8$, $AD=7$, E 为 AB 上的一点, $AE=5$, 现要剪下一张等腰三角形纸片 (设为 $\triangle AEP$), 使点 P 落在长方形 $ABCD$ 的某一条边上, 则等腰三角形 AEP 的底边长是_____.



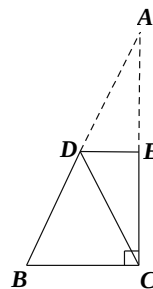
第 12 题

三、(本大题共 5 小题, 每小题 6 分, 共 30 分)

13. (本题共 2 小题, 每小题 3 分)

(1) 解方程组:
$$\begin{cases} x - y = 2, \\ x - y = y + 1. \end{cases}$$

(2) 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, 将 $\text{Rt}\triangle ABC$ 向下翻折, 使点 A 与点 C 重合, 折痕为 DE , 求证: $DE\parallel BC$.

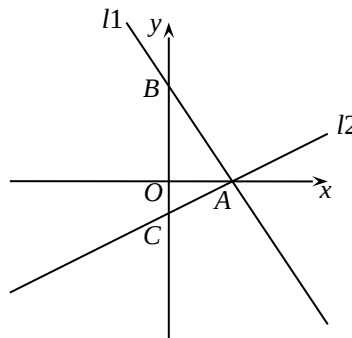


14. 先化简, 再求值: $\left(\frac{2}{x+3} + \frac{1}{3-x}\right) \div \frac{x}{x^2-9}$, 其中 $x=6$.

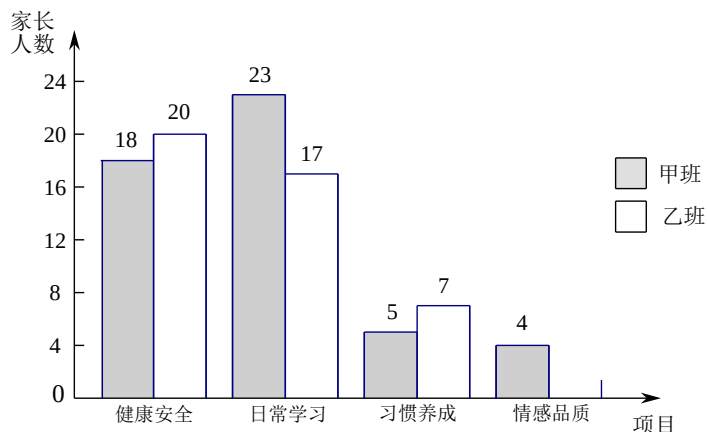
15. 如图, 过点 $A(2, 0)$ 的两条直线 l_1, l_2 分别交 y 轴于点 B, C , 其中点 B 在原点上方,

点 C 在原点下方, 已知 $AB=\sqrt{13}$.

- (1) 求点 B 的坐标;
(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 4, 求直线 l_2 的解析式.



16. 为了了解家长关注孩子成长方面的状况, 学校开展了针对学生家长的“您最关心孩子哪方面成长”的主题调查, 调查设置了“健康安全”、“日常学习”、“习惯养成”、“情感品质”四个项目, 并随机抽取甲、乙两班共 100 位学生家长进行调查, 根据调查结果, 绘制了如下不完整的条形统计图.



- (1) 补全条形统计图.
- (2) 若全校共有 3600 位学生家长, 据此估计, 有多少位家长最关心孩子“情感品质”方面的成长?
- (3) 综合以上主题调查结果, 结合自身现状, 你更希望得到以上四个项目中哪方面的关注和指导?

17. 如图, 六个完全相同的小长方形拼成了一个大长方形, AB 是其中一个小长方形的对角线, 请在大长方形中完成下列画图, 要求: ①仅用无刻度直尺, ②保留必要的画图痕迹.

- (1) 在图 1 中画出一个 45° 角, 使点 A 或点 B 是这个角的顶点, 且 AB 为这个角的一边;
- (2) 在图 2 中画出线段 AB 的垂直平分线.

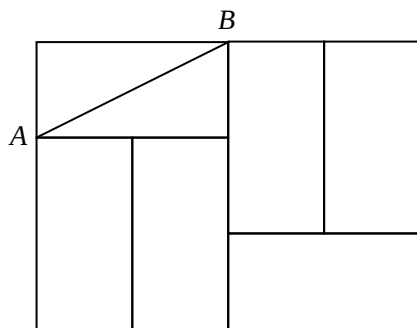


图 1

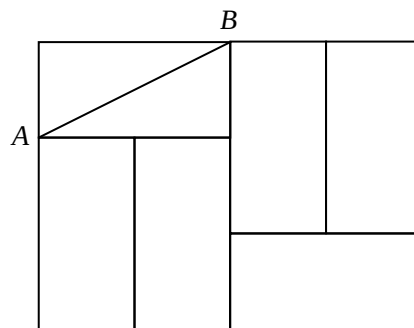


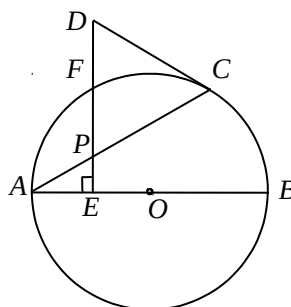
图 2

四、(本大题共 4 小题, 每小题 8 分, 共 32 分)

18. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 P 是弦 AC 上一动点 (不与点 A, C 重合), 过点 P 作

$PE \perp AB$, 垂足为 E , 射线 EP 交 $\overset{\frown}{AC}$ 于点 F , 交过点 C 的切线于点 D .

- (1) 求证: $DC = DP$;
- (2) 若 $\angle CAB = 30^\circ$, 当 F 是 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点时, 判断以 A, O, C, F 为顶点的四边形是什么特殊四边形? 说明理由.



19. 如图是一根可伸缩的鱼竿, 鱼竿是用 10 节大小不同的空心套管连接而成. 闲置时鱼竿可收缩, 完全收缩后, 鱼竿长度即为第 1 节套管的长度 (如图 1 所示); 使用时, 可将鱼竿的每一节套管都完全拉伸 (如图 2 所示). 图 3 是这根鱼竿所有套管都处于完全拉伸状态下的平面示意图. 已知第 1 节套管长 50cm, 第 2 节套管长 46cm, 以此类推, 每一节套管均比前一节套管少 4cm. 完全拉伸时, 为了使相邻两节套管连接并固定, 每相邻两节套管间均有相同长度的重叠, 设其长度为 x cm.

- (1) 请直接写出第 5 节套管的长度;
- (2) 当这根鱼竿完全拉伸时, 其长度为 311cm, 求 x 的值.



图 1



图 2



图 3

20. 甲、乙两人利用扑克牌玩“10 点”游戏. 游戏规则如下:

- ① 将牌面数字作为“点数”, 如红桃 6 的“点数”就是 6 (牌面点数与牌的花色无关);
- ② 两人摸牌结束时, 将所摸牌的“点数”相加, 若“点数”之和小于或等于 10, 此时“点数”之和就是“最终点数”; 若“点数”之和大于 10, 则“最终点数”是 0;
- ③ 游戏结束前双方均不知道对方“点数”;
- ④ 判定游戏结果的依据是: “最终点数”大的一方获胜, “最终点数”相等时不分胜负.

现甲、乙均各自摸了两张牌, 数字之和都是 5, 这时桌上还有四张背面朝上的扑克牌, 牌面数字分别是 4, 5, 6, 7.

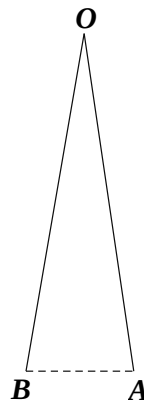
- (1) 若甲从桌上继续摸一张扑克牌, 乙不再摸牌, 则甲获胜的概率为_____;
- (2) 若甲先从桌上继续摸一张扑克牌, 接着乙从剩下的扑克牌中摸出一张牌, 然后双方不再摸牌, 请用树状图或表格表示出这次摸牌后所有可能的结果, 再列表呈现甲、乙的“最终点数”, 并求乙获胜的概率.

21. 如图 1 是一副创意卡通圆规, 图 2 是其平面示意图, OA 是支撑臂, OB 是旋转臂, 使用时以点 A 为支撑点, 铅笔芯端点 B 可绕点 A 旋转作出圆. 已知 $OA=OB=10\text{cm}$.

(1) 当 $\angle AOB=18^\circ$ 时, 求所作圆的半径; (结果精确到 0.01cm)

(2) 保持 $\angle AOB=18^\circ$ 不变, 在旋转臂 OB 末端的铅笔芯折断了一截的情况下, 作出的圆与 (1) 中所作圆的大小相等, 求铅笔芯折断部分的长度. (结果精确到 0.01cm)

(参考数据: $\sin 9^\circ \approx 0.1564$, $\cos 9^\circ \approx 0.9877$, $\sin 18^\circ \approx 0.3090$, $\cos 18^\circ \approx 0.9511$, 可使用科学计算器)



五、(本大题共 10 分)

22. 【图形定义】

如图, 将正 n 边形绕点 A 顺时针旋转 60° 后, 发现旋转前后两图形有另一交点 O , 连接 AO , 我们称 AO 为“叠弦”; 再将“叠弦” AO 所在的直线绕点 A 逆时针旋转 60° 后, 交旋转前的图形于点 P , 连接 PO , 我们称 $\angle OAB$ 为“叠弦角”, $\triangle AOP$ 为“叠弦三角形”.

【探究证明】

- (1) 请在图 1 和图 2 中选择其中一个证明: “叠弦三角形” (即 $\triangle AOP$) 是等边三角形;
- (2) 如图 2, 求证: $\angle OAB = \angle OAE'$.

【归纳猜想】

- (3) 图 1、图 2 中“叠弦角”的度数分别为 _____, _____;
- (4) 图 n 中, “叠弦三角形” _____ 等边三角形 (填“是”或“不是”);
- (5) 图 n 中, “叠弦角”的度数为 _____ (用含 n 的式子表示).

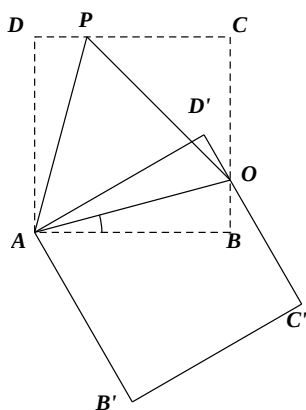


图 1 ($n=4$)

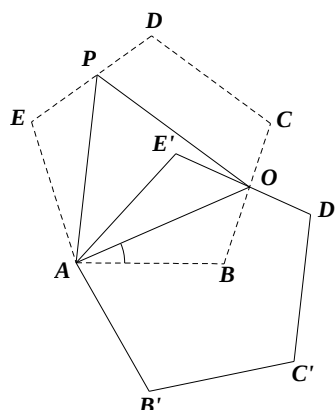


图 2

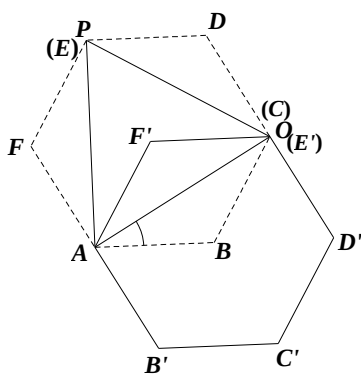


图 3 ($n=6$)

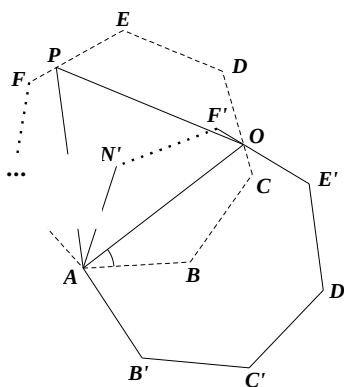


图 n

六、(本大题共 12 分)

23. 设抛物线的解析式为 $y=ax^2$, 过点 $B_1(1, 0)$ 作 x 轴的垂线, 交抛物线于点

$A_1(1, 2)$; 过点 $B_2(\frac{1}{2}, 0)$ 作 x 轴的垂线, 交抛物线于点 A_2 ; $\dots$; 过点 $B_n((\frac{1}{2})^{n-1}, 0)$ (n 为正整数) 作 x 轴的垂线, 交抛物线于点 A_n . 连接 A_nB_{n+1} , 得 $\text{Rt}\triangle A_nB_nB_{n+1}$.

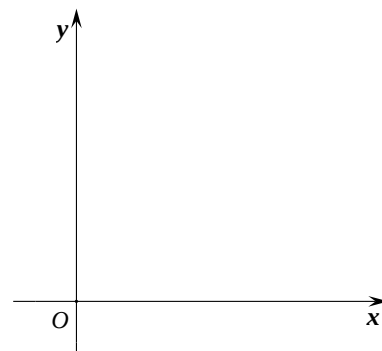
(1) 求 a 的值;

(2) 直接写出线段 A_nB_n , B_nB_{n+1} 的长 (用含 n 的式子表示);

(3) 在系列 $\text{Rt}\triangle A_nB_nB_{n+1}$ 中, 探究下列问题:

① 当 n 为何值时, $\text{Rt}\triangle A_nB_nB_{n+1}$ 是等腰直角三角形?

② 设 $1 \leq k < m \leq n$ (k, m 均为正整数), 问: 是否存在 $\text{Rt}\triangle A_kB_kB_{k+1}$ 与 $\text{Rt}\triangle A_mB_mB_{m+1}$ 相似的情形? 若存在, 求出其相似比; 若不存在, 说明理由.



机密★2016 年 6 月 19 日

江西省 2016 年中等学校招生考试

数学试题参考答案及评分意见

说明:

1. 如果考生的解答与本答案不同, 可根据试题的主要考查内容参考评分标准制定相应的评分细则后评卷.
2. 每题都要评阅到底, 不要因为考生的解答中出现错误而中断对该题的评阅, 当考生的解答在某一步出现错误, 影响了后续部分时, 如果该步以后的解答未改变这一题的内容和难度, 则可视影响的程度决定后面部分的给分, 但不得超过后面部分应给分数的一半, 如果这一步以后的解答有较严重的错误, 就不给分.
3. 解答右端所注分数, 表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分. 每小题只有一个正确选项)

1. A 2. D 3. B 4. C 5. D 6. C

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

7. -1 8.
- $a(x+y)(x-y)$
9. 17 10. 50

11. 4 12.
- $5, 5\sqrt{2}$
- 或
- $4\sqrt{5}$
- (每写对一个得 1 分, 每写错一个扣 1 分, 扣完为止)

三、(本大题共 5 小题, 每小题 6 分, 共 30 分)

$$13. (1) \begin{cases} x - y = 2, & \text{①} \\ x - y = y + 1. & \text{②} \end{cases}$$

解法一

解: 把①代入②, 得 $2 = y + 1$, 则 $y = 1$,1 分把 $y = 1$ 代入①, 得 $x - 1 = 2$, $\therefore x = 3$,2 分

$$\therefore \text{原方程组的解为 } \begin{cases} x = 3, \\ y = 1. \end{cases} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

解法二

解: ②-①, 得 $0 = y + 1 - 2$, $\therefore y = 1$1 分把 $y = 1$ 代入①, 得 $x - 1 = 2$, $\therefore x = 3$,2 分

$$\therefore \text{原方程组的解为 } \begin{cases} x = 3, \\ y = 1. \end{cases} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

(2)

证法一

证明:

$\because \triangle ADE$ 与 $\triangle CDE$ 关于直线 DE 对称, 点 A 与点 C 是对称点,

$\therefore DE \perp AC$,

$\therefore \angle AED = 90^\circ$ (或 $\angle CED = 90^\circ$),1 分

又 $\because \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \angle AED = \angle ACB$ (或 $\angle CED + \angle ACB = 180^\circ$),

$\therefore DE \parallel BC$3 分

证法二

证明:

翻折后, $\angle AED$ 与 $\angle CED$ 重合, 所以 $\angle AED = \angle CED$,

$\therefore \angle AED + \angle CED = 180^\circ$,

$\therefore \angle AED = \angle CED = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$,1 分

又 $\because \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \angle AED = \angle ACB$, (或 $\angle CED + \angle ACB = 180^\circ$)

$\therefore DE \parallel BC$3 分

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2(x-3) - (x+3)}{(x+3)(x-3)} \cdot \frac{(x+3)(x-3)}{x} \\
 14. \text{解: 原式} &= \frac{2x-6-x-3}{x} \\
 &= \frac{x-9}{x}. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{6-9}{6} = -\frac{1}{2}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分} \\
 \text{当 } x=6 \text{ 时, 原式} &
 \end{aligned}$$

15. 解: (1) $\because$ 点 A 的坐标为 $(2, 0)$, $\therefore AO = 2$.

在 $Rt\triangle AOB$ 中,

$$2^2 + OB^2 = (\sqrt{13})^2,$$

$\therefore OB = 3$,

$\therefore B(0, 3)$2 分

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} BC \cdot OA, \text{ 即 } 4 = \frac{1}{2} BC \times 2, \\
 (2) \because S_{\triangle ABC} &
 \end{aligned}$$

$\therefore BC = 4$,

$\therefore OC = BC - OB = 4 - 3 = 1$,

$\therefore C(0, -1)$4 分

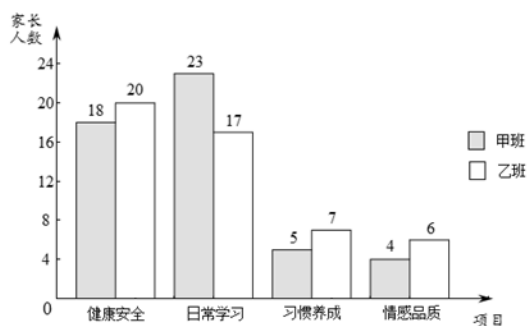
设直线 l_2 的解析式为 $y = kx + b$.

$\because$ 直线 l_2 经过点 $A(2, 0)$, $C(0, -1)$.

$$\therefore \begin{cases} 0 = 2k + b, \\ -1 = b, \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} k = \frac{1}{2}, \\ b = -1. \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 l_2 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x - 1$6 分

16. 解: (1) 补全条形统计图后的图形如下图所示.2 分

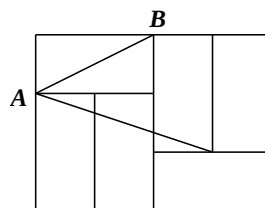
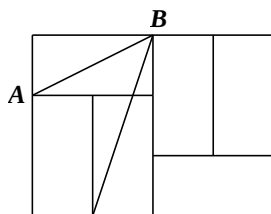


$$(2) \quad 3600 \times \frac{4+6}{100} = 360$$

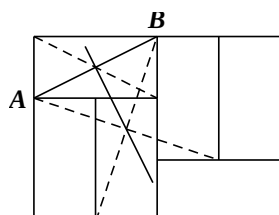
答: 估计有 360 位家长最关心孩子“情感品质”方面的成长.4 分

(3) (合理即可).6 分

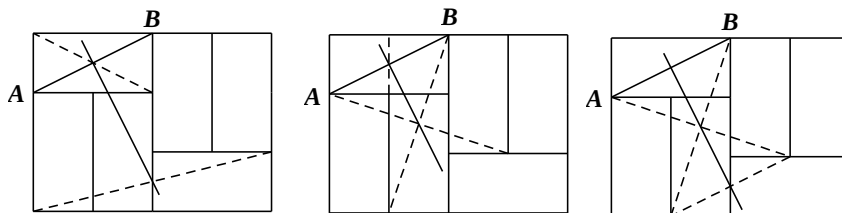
17. (1) 如下图. (画法有两种, 正确画出其中一种即可)3 分



(2) 如下图.6 分



(画法不唯一, 以下为其它几种画法, 供阅卷时参考)



四、(本大题共 4 小题, 每小题 8 分, 共 32 分)

18. 证明: (1) 连接 OC .

$\because DC$ 是 $\odot O$ 的切线, OC 为半径,

$\therefore \angle OCD = 90^\circ$,

即 $\angle OCA + \angle ACD = 90^\circ$.

$\because OA = OC$,

$\therefore \angle OAC = \angle OCA$.

又 $\because PE \perp AB$,

$\therefore \angle OAC + \angle APE = 90^\circ$,

$\therefore \angle APE = \angle ACD$.

又 $\because \angle DPC = \angle APE$,

$\therefore \angle DPC = \angle ACD$,

$\therefore DC = DP$3 分

(2) 答: 四边形 $AOCF$ 是菱形.4 分

证明: 连接 AF , FC , OF .

$\because AO = CO$, $\angle CAB = 30^\circ$,

$\therefore \angle ACO = \angle CAB = 30^\circ$,

$\therefore \angle AOC = 120^\circ$.

$\because F$ 是 AC 的中点,

$\therefore \angle AOF = \angle FOC = \frac{1}{2} \angle AOC = 60^\circ$,6 分

$\because AO = FO = CO$,

$\therefore \triangle AOF, \triangle FOC$ 均为等边三角形,

$\therefore AO = AF = FC = CO$,

$\therefore$ 四边形 $AOCF$ 是菱形.8 分

19. 解: (1) 第 5 节套管的长度为 34cm.3 分

(2) 解法一

$50 \times 10 - 4 \times (1 + 2 + \dots + 9) - 9x = 311$,6 分

解得 $x = 1$.

答: x 的值是 1.8 分

解法二

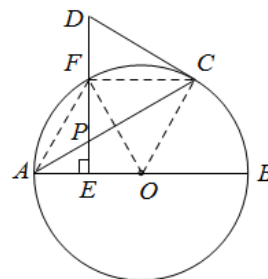
$50 + (46 - x) + (42 - x) + (38 - x) + (34 - x) + (30 - x) + (26 - x) + (22 - x) + (18 - x) + (14 - x) = 311$,

.....6 分

解得 $x = 1$.

答: x 的值是 1.8 分

解法三

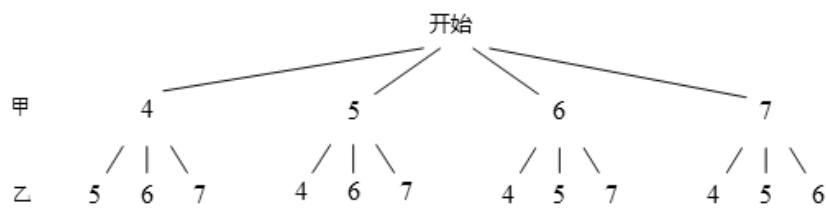


$$x = \frac{(50 + 46 + \cdots + 18 + 14) - 311}{9} = \frac{320 - 311}{9} = 1.$$

答: x 的值是 1.8 分

20. 解: (1) $\frac{1}{2}$2 分

(2) 解法一



.....4 分

由树状图可以得出, 所有可能出现的结果共有 12 种, 他们的最终点数如下表:

甲	“最终点数”	9	9	9	10	10	10	0	0	0	0	0	0
乙	“最终点数”	10	0	0	9	0	0	9	10	0	9	10	0

.....6 分

所以, $P_{\text{乙获胜}} = \frac{5}{12}$8 分

解法二

甲 \ 乙	4	5	6	7
4		(4, 5)	(4, 6)	(4, 7)
5	(5, 4)		(5, 6)	(5, 7)
6	(6, 4)	(6, 5)		(6, 7)
7	(7, 4)	(7, 5)	(7, 6)	

.....4 分

由上表得出, 所有可能出现的结果共有 12 种, 他们的最终点数如下表:

甲	“最终点数”	9	9	9	10	10	10	0	0	0	0	0	0
乙	“最终点数”	10	0	0	9	0	0	9	10	0	9	10	0

.....6 分

所以, $P_{(\text{乙获胜})} = \frac{5}{12}$ 8 分

21. (1) 过点 O 作 $OC \perp AB$ 于点 C ,

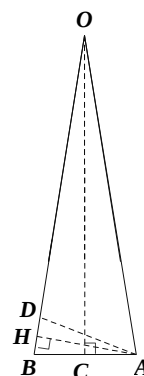
则 $AB = 2 BC$, $\angle BOC = \frac{1}{2} \angle AOB = 9^\circ$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle OBC$ 中,

$$BC = OB \times \sin 9^\circ = 10 \times 0.1564 = 1.564,$$

$$\therefore AB = 2 \times 1.564 = 3.128 \approx 3.13.$$

答: 所作圆的半径为 3.13cm. 4 分



(2) 解法一

$\frac{1}{2}$
因为 $\angle B = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle AOB) = 81^\circ$, 所以 $\angle B < 90^\circ$,

故可在 BO 上找到一点 D , 使得 $AD = AB$, 此时所作圆的大小与 (1) 中所作圆的大小相等. 5 分

过 A 作 $AH \perp OB$ 于点 H , 则 $BD = 2BH$.

在 $\text{Rt}\triangle AOH$ 中,

$$OH = AO \times \cos 18^\circ = 10 \times 0.9511 = 9.511,$$

$$\therefore BH = 10 - 9.511 = 0.489,$$

$$\therefore BD = 2 \times 0.489 \approx 0.98.$$

答: 铅笔芯折断部分的长度为 0.98 cm. 8 分

解法二

$\frac{1}{2}$
因为 $\angle B = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle AOB) = 81^\circ$, 所以 $\angle B < 90^\circ$, 故可在 BO 上找到一点 D , 使得

$AD = AB$, 此时所作圆的大小与 (1) 中所作圆的大小相等. 5 分

过 A 作 $AH \perp OB$ 于点 H , 则 $BD = 2BH$.

在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 中, $\angle BAH = 90^\circ - \angle B = 9^\circ$,

$$\therefore BH = AB \times \sin 9^\circ = 3.13 \times 0.1564 \approx 0.490,$$

$$\therefore BD = 2 \times 0.490 \approx 0.98.$$

答: 铅笔芯折断部分的长度为 0.98 cm. 8 分

解法三

$\frac{1}{2}$
因为 $\angle B = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle AOB) = 81^\circ$, 所以 $\angle B < 90^\circ$, 故可在 BO 上找到一点 D , 使得

$AD = AB$, 此时所作圆的大小与 (1) 中所作圆的大小相等. 5 分

$\therefore \angle B = \angle ADB$ 5 分

又 $\because OA = OB$,

$$\therefore \angle B = \angle OAB,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle ADB,$$

又 $\because \angle B = \angle B$,

$$\therefore \triangle OBA \sim \triangle ABD,$$

$$\frac{OB}{AB} = \frac{BA}{BD},$$

$$\text{即 } \frac{10}{3.13} = \frac{3.13}{BD},$$

$$\therefore BD = \frac{3.13 \times 3.13}{10} \approx 0.98.$$

答: 铅笔芯折断部分的长度为 0.98 cm.8 分

五、(本大题共 10 分)

22. (1) 选择图 1.

证明: 依题意得 $\angle DAD' = 60^\circ$, $\angle PAO = 60^\circ$.

$$\therefore \angle DAP = \angle DAD' - \angle PAD' = 60^\circ - \angle PAD',$$

$$\angle D'AO = \angle PAO - \angle PAD' = 60^\circ - \angle PAD',$$

$$\therefore \angle DAP = \angle D'AO.$$

$$\therefore \angle D = \angle D', AD = AD',$$

$$\therefore \triangle DAP \cong \triangle D'AO,$$

$$\therefore AP = AO.$$

$$\therefore \triangle AOP \text{ 是等边三角形} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

选择图 2.

证明: 依题意得 $\angle EAE' = 60^\circ$, $\angle PAO = 60^\circ$.

$$\therefore \angle EAP = \angle EAE' - \angle PAE' = 60^\circ - \angle PAE',$$

$$\angle E'AO = \angle PAO - \angle PAE' = 60^\circ - \angle PAE',$$

$$\therefore \angle EAP = \angle E'AO.$$

$$\therefore \angle E = \angle E', AE = AE',$$

$$\therefore \triangle EAP \cong \triangle E'AO,$$

$$\therefore AP = AO.$$

$$\therefore \triangle AOP \text{ 是等边三角形} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

(2) 证法一

证明: 连接 AC , AD' , CD' .

$$\therefore AE' = AB, \angle E' = \angle B = 108^\circ, E'D' = BC,$$

$$\therefore \triangle AE'D' \cong \triangle ABC,$$

$$\therefore AD' = AC, \angle AD'E' = \angle ACB,$$

由 $AD' = AC$, 得 $\angle AD'C = \angle ACD'$,

$$\therefore \angle OD'C = \angle OCD',$$

$$\therefore OC = OD',$$

$$\therefore BC - OC = E'D' - OD', \text{ 即 } BO = E'O.$$

$$\therefore AB = AE', \angle B = \angle E',$$

$$\therefore \triangle ABO \cong \triangle AE'O,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle OAE' \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

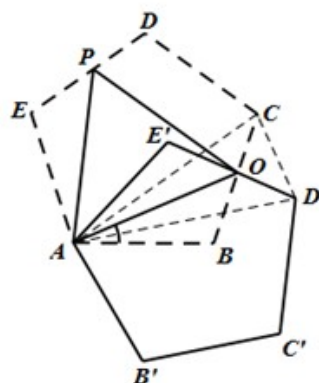


图2 (n=5)

证法二

证明: 连接 AC , AD' , CD' .

$\therefore AE' = AB, \angle E' = \angle B = 108^\circ, E'D' = BC,$
 $\therefore \triangle AE'D' \cong \triangle ABC,$
 $\therefore AD' = AC, \angle AD'E' = \angle ACB, \angle E'AD' = \angle BAC,$
 $\therefore$ 点 A 在线段 CD' 的垂直平分线上,
 $\angle AD'C = \angle ACD',$
 $\therefore \angle OD'C = \angle OCD',$
 $\therefore OC = OD',$
 $\therefore$ 点 O 在线段 CD' 的垂直平分线上,
 $\therefore$ 直线 AO 是线段 CD' 的垂直平分线,
 $\therefore \angle CAO = \angle D'AO,$
 $\therefore \angle BAC - \angle CAO = \angle E'AD' - \angle D'AO,$
 即 $\angle OAB = \angle OAE'.$ 5 分

(3) 15, 247 分

(4) 是8 分

(5) $60 - \frac{180}{n}$ 10 分

六、(本大题共 12 分)

23. (1) $\because$ 点 $A_1(1, 2)$ 在抛物线上,
 $\therefore 2 = a \times 1^2$, 得 $a = 2$2 分

(2) $A_n B_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3},$

$$B_n B_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

.....5 分

说明: ① 本小题共 3 分, 写出其中一个正确答案得 2 分, 写出两个正确答案得 3 分;

② 若考生的答案写成以下形式, 不扣分. 若考生的答案写成其他形式, 阅卷时可参考给分.

$$A_n B_n = 2^{3-2n}, 2 \times \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]^2, 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2} \text{ 或 } 2 \times 2^{2n-2}$$

$$B_n B_{n+1} = 2^{-n} \text{ 或 } \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(3) ① 由 $A_n B_n = B_n B_{n+1}$, 得 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, 解得: $n = 3$.

所以, 当 $n = 3$ 时, $\text{Rt} \triangle A_n B_n B_{n+1}$ 是等腰直角三角形.7 分

② 依题意得 $\angle A_k B_k B_{k+1} = \angle A_m B_m B_{m+1} = 90^\circ$,

i) 当 $\text{Rt} \triangle A_k B_k B_{k+1} \sim \text{Rt} \triangle A_m B_m B_{m+1}$ 时,

$$\frac{A_k B_k}{A_m B_m} = \frac{B_k B_{k+1}}{B_m B_{m+1}}, \quad \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-3}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{\left(\frac{1}{2}\right)^m}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-2m} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-m},$$

所以, $k=m$. (舍去)8 分

ii) 当 $\text{Rt}\triangle A_k B_k B_{k+1} \sim \text{Rt}\triangle B_{m+1} B_m A_m$ 时,

$$\frac{A_k B_k}{B_{m+1} B_m} = \frac{B_{k+1} B_k}{A_m B_m}, \quad \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^m} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-3}}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-3-m} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2m+3},$$

$$\therefore 2k-3-m=k-2m+3,$$

$$\therefore m+k=6.$$

$\therefore 1 \leq k < m \leq n$ (k, m 均为正整数),

$$\therefore \text{取} \begin{cases} k=1, \\ m=5, \end{cases} \text{或} \begin{cases} k=2, \\ m=4, \end{cases}$$

$$\therefore \text{当} \begin{cases} k=1, \\ m=5 \end{cases} \text{时, } \text{Rt}\triangle A_1 B_1 B_2 \sim \text{Rt}\triangle B_6 B_5 A_5,$$

$$\frac{A_1 B_1}{B_6 B_5} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^5} = 2^6 = 64$$

相似比为:10 分

$$\text{当} \begin{cases} k=2, \\ m=4 \end{cases} \text{时, } \text{Rt}\triangle A_2 B_2 B_3 \sim \text{Rt}\triangle B_5 B_4 A_4,$$

$$\frac{A_2 B_2}{B_5 B_4} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = 2^3 = 8$$

相似比为:12 分

