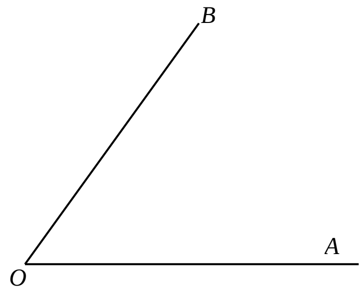
2016 年北京市中考数学试卷

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．）

1．如图所示，用量角器度量∠*AOB*，可以读出∠*AOB* 的度数为(　　)

A． 45°　B．55°　C．125°　D．135°



【答案】B

【详细解答】解：∵∠*AOB* 的边 *OA* 在 0 刻度线，边 *OB* 在 50°和 60°之间，所以度数应为 55°，故选择 B．

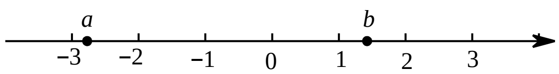
2．神舟十号飞船是我国“神舟”系列飞船之一，每小时飞行约 28 000 公里．将 28 000 用科学计数法表示应为(　　)

A．2.8×10^3　B．28×10^3　C．2.8×10^4　D．0.28×10^5

【答案】C

【详细解答】解：将 28 000 用科学计数法表示应为 2.8×10^4，故选择 C．

3．实数 *a*，*b* 在数轴上的对应点的位置如图所示，则正确的结论是(　　)

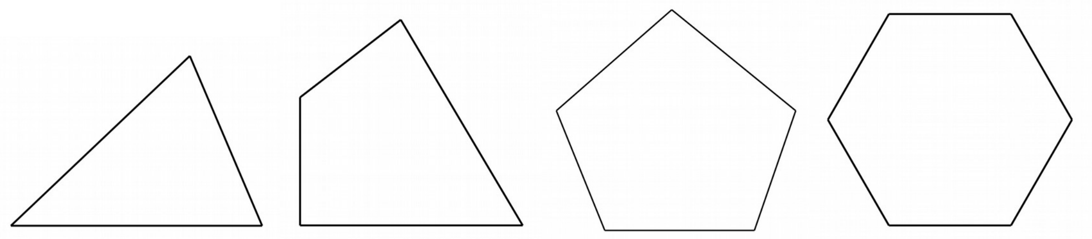


A．$a>-2$　B．$a<-3$　C．$a>-b$　D．$a<-b$

【答案】D

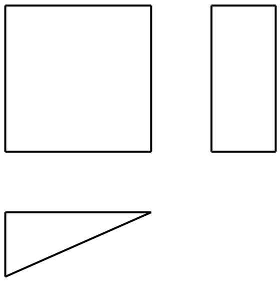
【详细解答】解：由数轴可知，$-3<a<-2$，故 *A*、*B* 错误；$1<b<2$，$-2<-b<-1$，即 $-b$ 在 -2 与 -1 之间，所以，$a<-b$，故选择 D．

4．内角和为 540° 的多边形是(　　)



A．　　B．　　C．　　D．

【答案】C
【详细解答】解：设多边形边数为 n，则$(n-2)\times180=540$，解得 $n=5$，故选择 C.
5．右图是某个几何体的三视图，该几何体是(　　)
A．圆锥　B．　三棱锥　C．圆柱　D．三棱柱



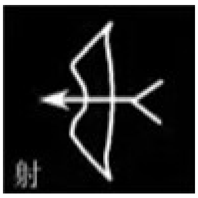
【答案】D
【详细解答】解：该三视图的俯视为三角形，正视图和侧视图都是矩形，所以，这个几何体是三棱柱，故选择 D .

6.__如果 $a+b=2$，那么代数式 $\left(a-\frac{b^2}{a}\right)\cdot\frac{a}{a-b}$ 的值是(　　)

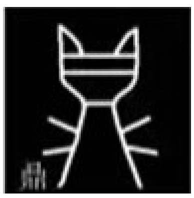
A．2　　B．-2　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$-\frac{1}{2}$

【答案】A

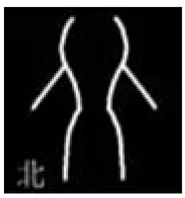
【详细解答】解：$(a-\frac{b^2}{a})\cdot\frac{a}{a-b}=\frac{a^2-b^2}{a}\cdot\frac{a}{a-b}=\frac{(a-b)(a+b)}{a}\cdot\frac{a}{a-b}=a+b=2$，故选择 A .
7．甲骨文是我国的一种古代文字，是汉字的早期形式，下列甲骨文中，不是轴对称的是(
)



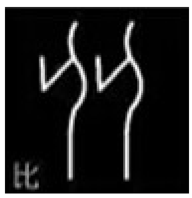
A.



B.

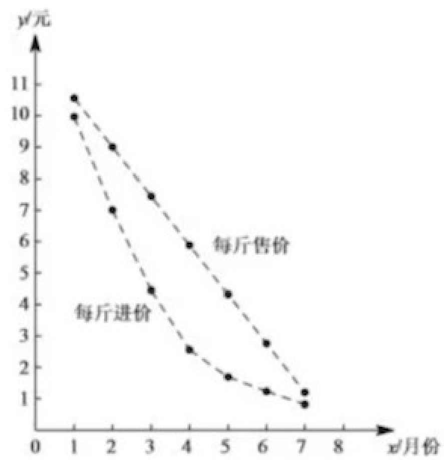


C.



D.

【答案】D
【详细解答】解：A、能作一条对称轴，上下翻折完全重合，B 和 C 也能作一条对称轴，沿这条对称轴翻折，左右两部分完全重合，只有 D 不是轴对称图形，故选择 D.
8．在 1～7 月份，某种水果的每斤进价与每斤售价的信息如图所示，则出售该种水果每斤利润最大的月份是(　　)
A．3 月份　B．　4 月份　C．　5 月份　D．6 月份



【答案】B

【详细解答】解：各月每斤利润：

3 月：7．5－4．5＝3 元，

4 月：6－2．5＝3．5 元，

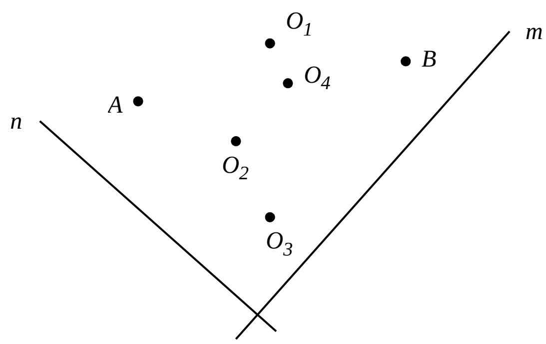
5 月：4．5－2＝2．5 元，

6 月：3－1．5＝1．5 元，

所以，4 月利润最大，故选择 B .

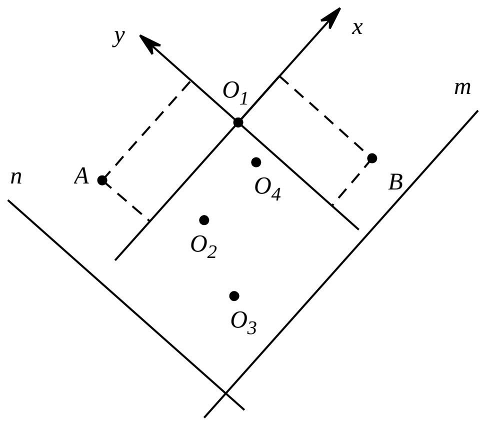
9．如图，直线 $m\perp n$，在某平面直角坐标系中，x 轴 // m，y 轴 // n，点 A 的坐标为 $(-4,2)$，点 B 的坐标为 $(2,-4)$，则坐标原点为(　　)

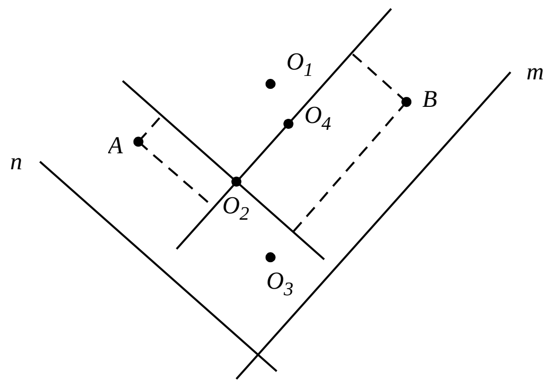
A．O_1　B．O_2　C．O_3　D．O_4

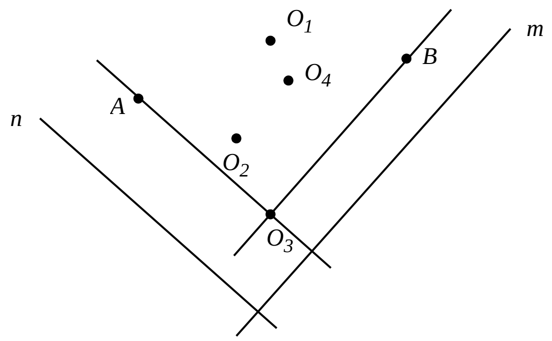


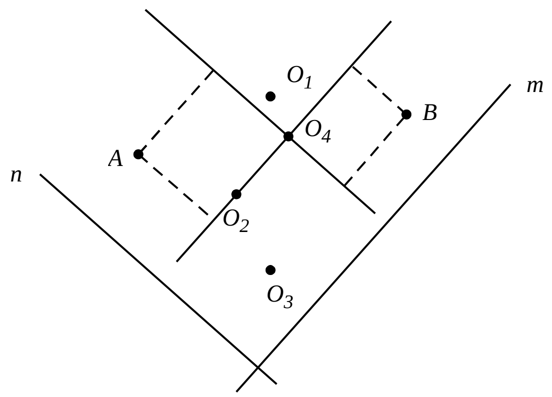
【答案】A

【详细解答】解：如图，分别过点 O_1，O_2，O_3，O_4 作直线 m，n 的平行线，∵点 A 的坐标为 $(-4,2)$，点 B 的坐标为 $(2,-4)$，∴选项 A 最接近建立坐标系的要求，故选择 A．



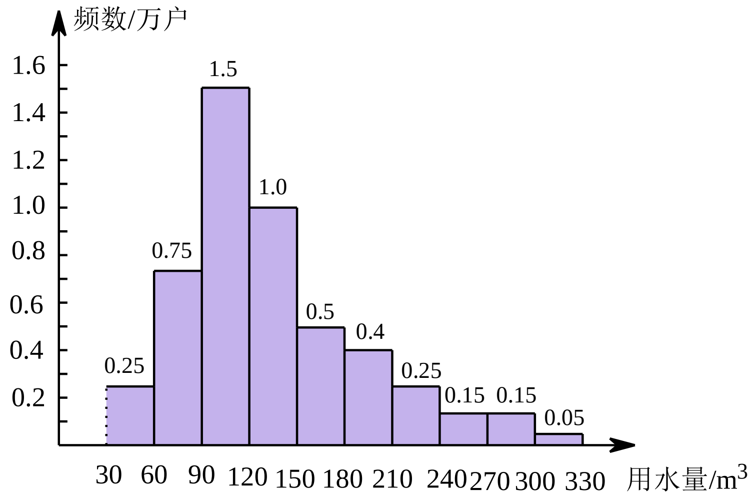






10．为了节约水资源，某市准备按照居民家庭年用水量实行阶梯水价，水价分档递增．计划使第一档、第二档和第三档的水价分别覆盖全市居民家庭的 80%，15%和 5%．为合理确定各档之间的界限，随机抽查了该市 5 万户居民家庭上一年的年用水量（单位：m^3），绘

制了统计图，如图所示.



下面有四个推断：

① 年用水量不超过 180 m^3 的该市居民家庭按第一档水价交费

② 年用水量超过 240m^3 的该市居民家庭按第三档水价交费

③ 该市居民家庭年用水量的中位数在 150～180 之间

④ 该市居民家庭年用水量的平均数不超过 180

其中合理的是(　　)

A．①③　B．①④　C．②③　D．②④

【答案】B

【详细解答】解：年用水量不超过 180 m^3 的居民家庭有：0．25＋0．75＋1．5＋1＋0．5＝4（万），$\frac{4}{5}$＝80%，∴年用水量不超过 180 m^3 的该市居民家庭按第一档水价交费，∴①正确；年用水量超过 240 m^3 的居民家庭有：0．15＋0．15＋0．05＝0．35（万），$\frac{0.35}{5}$＝7%，超过计划第三档水价覆盖比例 5%，故②不正确；

30－120 的有 2．5 万人，120－330 的有 2．5 万人，中位数为第 3 组中最大值与第 4 组中最小值的平均数，约为 120，一定不在 150~180 之间，故③不正确；

年用水量不超过 180 m^3 的居民家庭有 4 万户，其中每一组的频数均高于年用水量超过 180m^3 的各组频数，所以该市居民家庭年用水量的平均数不超过 180，④正确，故选择 B.

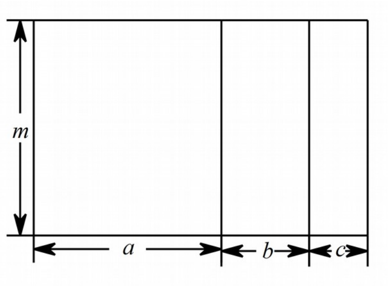
二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分．）

11．如果分式$\frac{2}{x-1}$有意义，那么 x 的取值范围是____________.

【答案】$x≠1$

【详细解答】解：由分式的意义，知 $x-1\neq0$，解得 $x\neq1$，故答案为 $x\neq1$ ．

12．右图中四边形均为矩形，根据图形，写出一个正确的等式：___________________.



【答案】$am+bm+cm=m(a+b+c)$

【详细解答】解：最大矩形的长为$(a+b+c)$，宽为 m，所以，它的面积为 $m(a+b+c)$；又最大矩形的面积为三个小矩形面积之和，三个小矩形的面积分别为：am，bm，cm，所以，有 $am+bm+cm=m(a+b+c)$，故答案为 $am+bm+cm=m(a+b+c)$.

13.__林业部门要考察某种幼树在一定条件下的移植成活率，下表是这种幼树在移植过程中的一组统计数据：

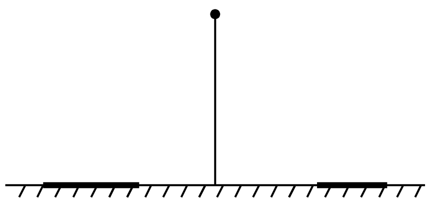
移植的棵数 n	1000	1500	2500	4000	8000	15000	20000	30000
成活的棵数 m	865	1356	2220	3500	7056	13170	17580	26430
成活的频率 $\frac{m}{n}$	0．865	0．904	0．888	0．875	0．882	0．878	0．879	0．881

估计该种幼树在此条件下移植成活的概率为__________.

【答案】0．881

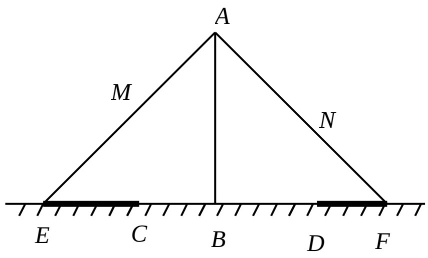
【详细解答】解：表中移植的棵树最多的是 30000 棵，对应的频率是 0．881，因此 0．881 可作为估计值，故答案为 0．881.

14．如图，小军、小珠之间的距离为 2．7m，他们在同一盏路灯下的影长分别为 1．8m，1．5m，已知小军、小珠的身高分别为 1．8m，1．5m，则路灯的高为__________m.

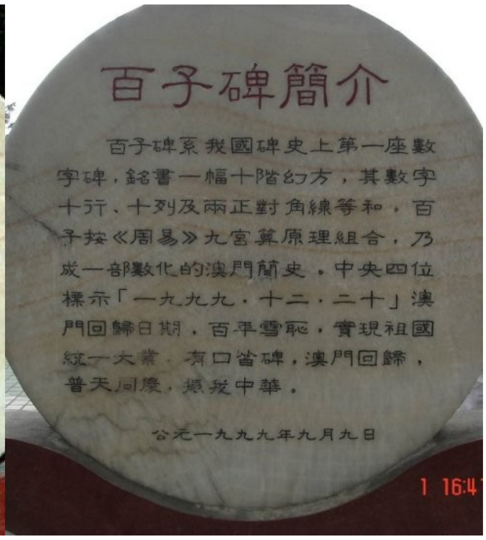


【答案】3

【详细解答】解：如下图，因为小军、小珠都身高与影长相等，∴$EC=MC$，$FD=ND$，∴△ECM 和△FDN 都是等腰直角三角形，∴$\angle E=\angle F=45°$，∴$AE=AF$，∵$AB\perp EF$，∴$\angle EAF=180°-\angle E-\angle F=90°$，∴△$AEF$ 是等腰直角三角形，∴$\angle EAB=\angle FAB=45°$，∴$AB=BE=BF$，设路灯的高 AB 为 xm，则 $BD=x-1.5$，$BC=x-1.8$，又 $CD=2.7$，所以，$x-1.5+x-1.8=2.7$，解得：$x=3$（m），故答案为 3.



15．百子回归图是由 1，2，3，．．．．，100 无重复排列而成的正方形数表，它是一部数化的澳门简史，如：中央四位“19 99 12 20”标示澳门回归日期，最后一行中间两位“23 50”标示澳门面积，……，同时它也是十阶幻方，其每行 10 个数之和、每列 10 个数之和、每条对角线 10 个数之和均相等，则这个和为________．



【答案】505

【详细解答】解：1＋2＋3＋⋯＋100＝（1＋100）＋（2＋99）＋（3＋98）＋⋯＋（50＋51）＝5050，设每行 10 个数字相加结果为 a，共 10 行，每一行的 10 个数之和相等，所以，1＋2＋3＋⋯＋100＝10a，即 5050＝10a，a＝505，故答案为 505．

16.＿下面是“经过已知直线外一点作这条直线的垂线“的尺规作图过程．

已知：直线 l 和 l 外一点 P．

求作：直线 l 的垂线，使它经过点 P．

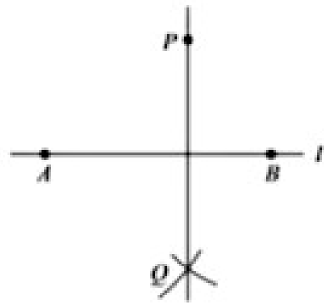
作法：如图，

（1）在直线 l 上任取两点 A，B；

（2）分别以点 A，B 为圆心，AP，BP 长为半径作弧，两弧相交于点 Q；

（3）作直线 PQ．

所以直线 PQ 就是所求的垂线．



请回答：该作图的依据是__________

【答案】到线段两端距离相等的点在线段的垂直平分线上（A，B 都在 PQ 的垂直平分线上）；两点确定一条直线（$AB\perp PQ$）（其他正确依据也可以）

【详细解答】解：由作图可知，$AP=AQ$，所以，点 A 在线段 PQ 的垂直平分线上，同理，点 B 也在线段 PQ 的垂直平分线上，所以，有 $AB\perp PQ$，故答案为到线段两端距离相等的点在线段的垂直平分线上；两点确定一条直线．

三、解答题（本题共 72 分，第 17—26 题，每小题 5 分，第 27 题 7 分，第 28 分 7 分，第 29 题 8 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程．

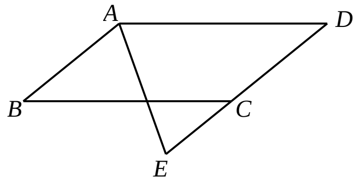
17．计算：$(3-\pi)^0+4\sin 45^\circ-\sqrt{8}+\left|1-\sqrt{3}\right|$．

解：原式$=1+4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{2}+\sqrt{3}-1=\sqrt{3}$．．

18．解不等式组：$\begin{cases}2x+5>3(x-1)\\ 4x>\dfrac{x+7}{2}\end{cases}$．

解：解不等式 $2x+5>3(x-1)$ 得 $x<8$，解不等式 $4x>\dfrac{x+7}{2}$ 得 $x>1$，∴原不等式组的解集为 $1<x<8$．

19．如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，AE 平分 $\angle BAD$，交 DC 的延长线于点 E．求证：$DA=DE$．



证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴$AB\parallel CD$，∴$\angle E=\angle BAE$，∵AE 平分 $\angle BAD$，∴$\angle BAE=\angle DAE$，∴$\angle E=\angle DAE$，∴$DA=DE$.

20．关于 x 的一元二次方程 $x^2+(2m+1)x+m^2-1=0$ 有两个不相等的实数根.

（1）求 m 的取值范围；

（2）写出一个满足条件的 m 的值，并求此时方程的根.

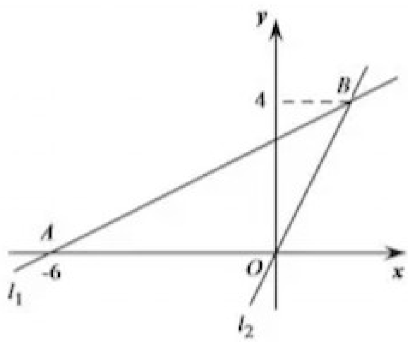
解：（1）∵原方程有两个不相等实数根，∴$\Delta=(2m+1)^2-4(m^2-1)=4m+5>0$，解得 $m>-\dfrac{5}{4}$；

（2）$m=1$，则原方程为 $x^2+3x=0$，即 $x(x+3)=0$，∴$x_1=0$，$x_2=-3$．（m 取其他符合题意的值也可以）

21．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，过点 $A(-6,0)$ 的直线 l_1 与直线 l_2：$y=2x$ 相交于点 $B(m,4)$.

(1)求直线 l_1 的表达式；

（2）过动点 $P(n,0)$ 且垂直于 x 轴的直线与 l_1，l_2 的交点分别为 C，D，当点 C 位于点 D 上方时，写出 n 的取值范围.



解：（1）∵点 B 在直线 l_2 上，∴$4=2m$，∴$m=2$，

设 l_1 的表达式为 $y=kx+b$，由 A、B 两点均在直线 l_1 上得到，$\begin{cases}4=2k+b\\0=-6k+b\end{cases}$，

解得 $\begin{cases} k=\dfrac{1}{2} \\ b=3 \end{cases}$，则 l_1 的表达式为 $y=\dfrac{1}{2}x+3$．

（2）∵点 P（n，0），∴$C(\dfrac{n}{2}+3,n)$，$D(2n，n)$，

由图可知：点 C 在点 D 的上方，∴ $\dfrac{n}{2}+3>2n$，解得：$n<2$．

22．调查作业：了解你所住小区家庭 5 月份用气量情况．

小天、小东和小芸三位同学住在同一小区，该小区共有 300 户家庭，每户家庭人数在 2~5 之间，这 300 户家庭的平均人数约为 3．4．

小天、小东和小芸各自对该小区家庭 5 月份用气量情况进行了抽样调查，将收集的数据进行了整理，绘制的统计表分别为表 1、表 2 和表 3．

表 1 抽样调查小区 4 户家庭 5 月份用气量统计表（单位：m^3）

家庭人数	2	3	4	5
用气量	14	19	21	26

表 2 抽样调查小区 15 户家庭 5 月份用气量统计表（单位：m^3）

家庭人数	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4
用气量	10	11	15	13	14	15	15	17	17	18	18	18	18	20	22

表 3 抽样调查小区 15 户家庭 5 月份用气量统计表（单位：m^3）

家庭人数	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5
用气量	10	12	13	14	17	17	18	19	20	20	22	26	31	28	31

根据以上材料回答问题：

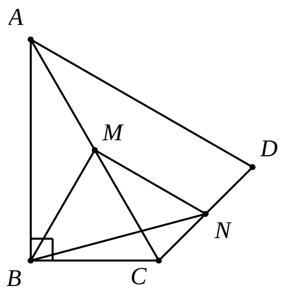
小天、小东和小芸三人中，哪一位同学抽样调查的数据能较好地反映出该小区家庭 5 月份用气量情况，并简要说明其他两位同学抽样调查的不足之处．

解： 小天调查的样本容量较少；小东抽样的调查数据中，家庭人数的平均值为（2×3＋3×11＋4）÷15＝2．87，远远偏离了平均人数的 3．4，所以他的数据抽样有明显问题；小芸抽样的调查数据中，家庭人数的平均值为（2×2＋3×7＋4×4＋5×2）÷15＝3．4，说明小芸抽样数据质量较好，因此小芸的抽样调查的数据能较好的反映出该小区家庭 5 月份用气量情况．

23．如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=90°$，$AC=AD$，M，N 分别为 AC，CD 的中点，连接 BM，MN，BN．

（1）求证：$BM=MN$；

（2）若 $\angle BAD=60°$，AC 平分 $\angle BAD$，$AC=2$，求 BN 的长．



解：（1）证明：在△*CAD* 中，∵点 *M*，*N* 分别是 *AC*，*CD* 的中点，∴$MN\parallel AD$，且 $MN=\frac{1}{2}AD$，在 Rt△*ABC* 中，∵点 *M* 是 *AC* 中点，∴$BM=\frac{1}{2}AC$，又∵$AC=AD$，∴$MN=BM$.

（2）解：∵$\angle BAD=60°$，*AC* 平分∠*BAD*，∴$\angle BAC=\angle DAC=30°$．由（1）知，$BM=\frac{1}{2}AC=AM=MC$，∴$\angle BMC=\angle BAM+\angle ABM=2\angle BAM=60°$．∵$MN\parallel AD$，∴$\angle NMC=\angle DAC=30°$，∴$\angle BMN=\angle BMC+\angle NMC=90°$，∴$BN^2=BM^2+MN^2$，∵$AC=2$，∴$MN=BM=\frac{1}{2}AC=1$，∴$BN=\sqrt{2}$.

24．阅读下列材料：

北京市正围绕“政治中心、文化中心、国际交往中心、科技创新中心”的定位，深入实施“人文北京、科技北京、绿色北京”的发展战略，“十二五”期间，北京市文化创意产业展现了良好的发展基础和巨大的发展潜力，已经成为首都经济增长的支柱产业.

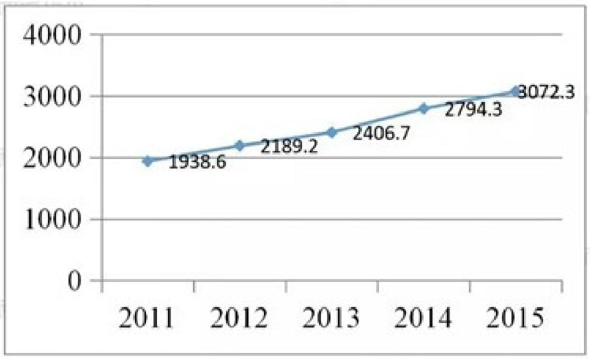
2011 年，北京文化创意产业实现增加值 1938．6 亿元，占地区生产总值的 12．1%．2012 年，北京市文化创意产业继续呈现平稳发展态势，实现产业增加值 2189．2 亿元，占地区生产总值的 12．3%，是第三产业中仅次于金融业、批发和零售业的第三大支柱产业．2013 年，北京市文化创意产业实现增加值 2406．7 亿元，比上年增长 9．1%．文化创意产业作为北京市支柱产业已经排到了第二位．2014 年，北京市文化创意产业实现增加值 2794．3 亿元，占地区生产总值的 13．1%，创历史新高．2015 年，北京市文化创意产业发展总体平稳，实现产业增加值 3072．3 亿元，占地区生产总值的 13．4%．（以上数据来源于北京市统计局）

根据以上材料解答下列问题：

（1）用折线图将 2011－2015 年北京市文化创意产业实现增加值表示出来，并在图中标明相应数据；

（2）根据绘制的折线图中提供的信息，预估 2016 年北京市文化创意产业实现增加值约________亿元，你的预估理由是_______________.

解：（1）如下图：

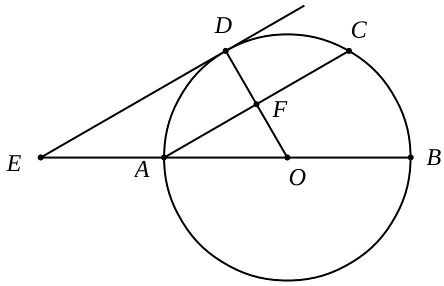


（2）3440（预估值在 3376~3563 之间都可以），近三年平均增长率作为预测 2016 年数据的依据（只要给出符合预测数据的合理的预测方法即可）

25．如图，AB 为 $\odot O$ 的直径，F 为弦 AC 的中点，连接 OF 并延长交 $\overset{\frown}{AC}$ 于点 D，过点 D 作 $\odot O$ 的切线，交 BA 的延长线于点 E.

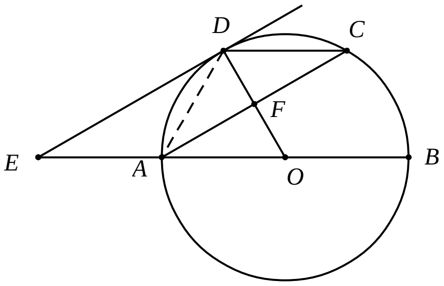
（1）求证：$AC \parallel DE$；

（2）连接 CD，若 $OA=AE=a$，写出求四边形 $ACDE$ 面积的思路.



解：（1）证明：∵ ED 与 $\odot O$ 相切于 D，∴ $OD\perp DE$，∵ F 为弦 AC 的中点，∴$OD\perp AC$，∴$AC\parallel DE$；

（2）解：①根据点 A 是 OE 中点，$AC\parallel ED$，可得点 F 是 OD 中点，结合其它条件，可证得△AOF≌△CDF，∴△CDF 的面积等于△AOF 的面积，∴问题转化为求△EOD 的面积；②连接 AD，易知 $AD=AO$，又 $OA=OD$，∴可得△AOD 是等边三角形，且边长为 a，∴可以进一步求出△AOD 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$；③根据点 A 是 EO 中点，可知△EOD 的面积是△AOD 面积的 2 倍，∴可得△EOD 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$；④等量代换可得四边形 $ACDE$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.



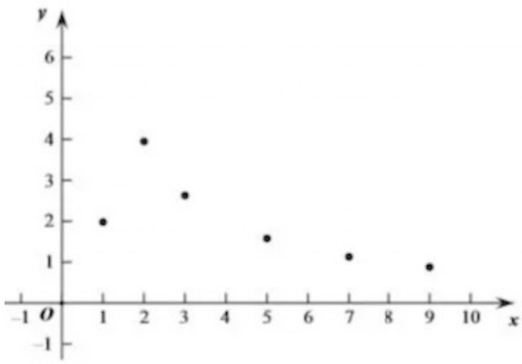
26. 已知 y 是 x 的函数，自变量 x 的取值范围是 $x>0$，下表是 y 与 x 的几组对应值．

x	…	1	2	3	5	7	9	…
y	…	1.98	3.95	2.63	1.58	1.13	0.88	…

小腾根据学习函数的经验，利用上述表格所反映出的 y 与 x 之间的变化规律，对该函数的图象与性质进行了探究．

下面是小腾的探究过程，请补充完整：

（1）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，描出了以上表中各对对应值为坐标的点．根据描出的点，画出该函数的图象；

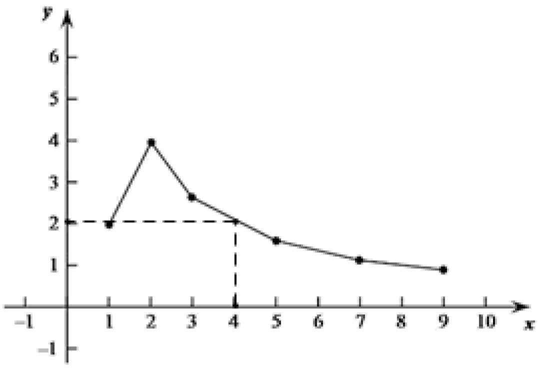


（2）根据画出的函数图象，写出：

①x＝4 对应的函数值 y 约为________；

② 该函数的一条性质：____．

解：（1）如图所示，顺次连接各点：



（2）①如图，过 x 轴上点（4，0）作 x 轴的垂线，交函数图象于一点，过该点作 y 轴的垂线，交 y 轴于另一点，从图中观察可知，该点的纵坐标约为 2，故填 2（2．2 到 1．8 之间都正确）

②从图象上观察，该函数有最大值为 4，故填该函数有最大值．（其他正确性质都可以，例如，当 $x>2$ 时，y 随 x 的增大而减小．）

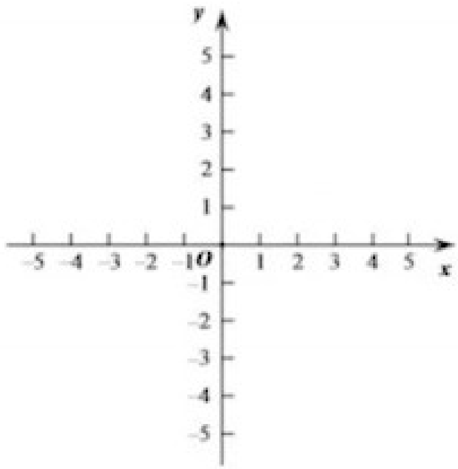
27．在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=mx^2-2mx+m-1(m>0)$ 与 x 轴的交点为 A，B．

（1）求抛物线的顶点坐标；

（2）横、纵坐标都是整数的点叫整点．

①当 $m=1$ 时，求线段 AB 上整点的个数；

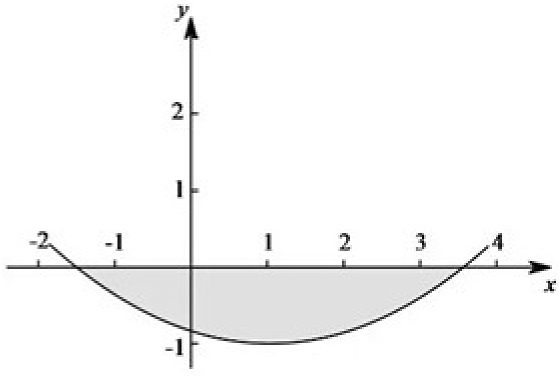
②若抛物线在点 A，B 之间的部分与线段 AB 所围成的区域内（包括边界）恰有 6 个整点，结合函数的图象，求 m 的取值范围．



解：（1）解：将抛物线表达式变为顶点式 $y=m(x-1)^2-1$，则抛物线顶点坐标为(1，－1)．

（2）解：① $m=1$ 时，抛物线表达式为 $y=x^2-2x$，因此 A、B 的坐标分别为(0，0)和(2，0)，则线段 AB 上的整点有(0，0)，(1，0)，(2，0)共 3 个；

②抛物线顶点为(1，－1)，则由线段 AB 之间的部分及线段 AB 所围成的区域的整点的纵坐标只能为－1 或者 0，所以即要求 AB 线段上（含 AB 两点）必须有 5 个整点；又有抛物线表达式，令 $y=0$，则 $mx^2-2mx+m-1=0$，得到 A、B 两点坐标分别为 $(1-\frac{1}{\sqrt{m}},0)$，$(1+\frac{1}{\sqrt{m}},0)$，即 5 个整点是以(1，0)为中心向两侧分散，进而得到 $2\le\frac{1}{\sqrt{m}}<3$，∴ $\frac{1}{9}<m\le\frac{1}{4}$．



28．在等边△ABC 中，

（1）如图 1，P，Q 是 BC 边上两点，$AP=AQ$，$\angle BAP=20°$，求$\angle AQB$ 的度数；

（2）点 P，Q 是 BC 边上的两个动点（不与点 B，C 重合），点 P 在点 Q 的左侧，且 $AP=AQ$，点 Q 关于直线 AC 的对称点为 M，连接 AM，PM.

① 依题意将图 2 补全；

② 小茹通过观察、实验，提出猜想：在点 P，Q 运动的过程中，始终有 $PA=PM$ 小茹把这个猜想与同学们进行交流，通过讨论，形成了证明该猜想的几种想法：

想法 1：要证 $PA=PM$，只需证△APM 是等边三角形.

想法 2：在 BA 上取一点 N，使得 $BN=BP$，要证 $PA=PM$，只需证△$ANP\cong$△PCM.

想法 3：将线段 BP 绕点 B 顺时针旋转 60°，得到线段 BK，要证 $PA=PM$，只需证 $PA=CK$，$PM=CK$.

……

请你参考上面的想法，帮助小茹证明 $PA=PM$（一种方法即可）

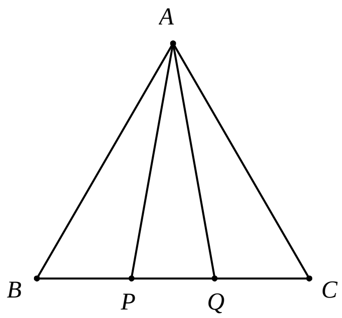


图 1

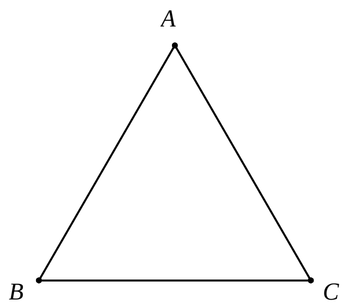
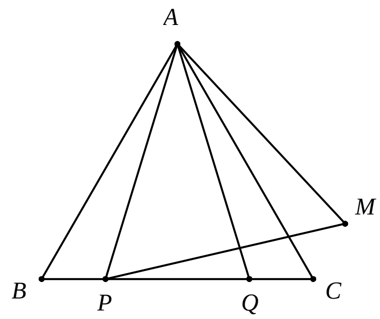


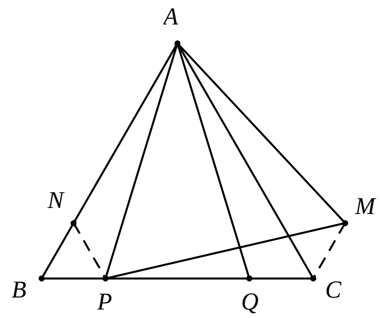
图 2

解：（1）解：∵$AP=AQ$，∴$\angle APQ=\angle AQP$，∴$\angle APB=\angle AQC$，又∵△ABC 是等边三角形，∴$\angle A=\angle B=\angle C=60°$，∴$\angle BAP=\angle CAQ$，∵$\angle BAP=20°$，∴$\angle CAQ=20°$，∴$\angle PAQ=\angle BAC-\angle BAP-\angle CAQ=20°$，∴$\angle BAQ=\angle BAP+\angle PAQ=40°$，∴$\angle AQB=180°-\angle B-\angle BAQ=80°$.

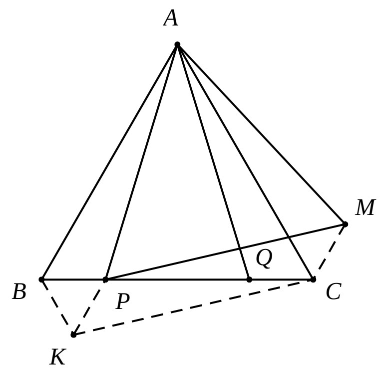
（2）①下图；②利用想法 1 证明：首先根据（1）得到$\angle BAP=\angle CAQ$，然后由轴对称，得到$\angle CAQ=\angle CAM$，进一步得到$\angle CAM=\angle BAP$，根据$\angle BAC=60°$，可以得到$\angle PAM=60°$，根据轴对称可知 $AQ=AM$，结合已知 $AP=AQ$，可知△APM 是等边三角形，进而得到 $PA=PM$.（利用其他想法的线索证明也可以）



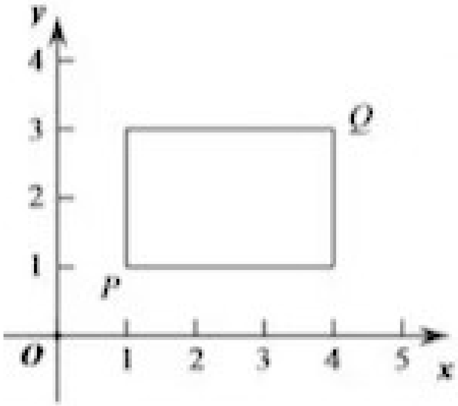
想法 2 辅助线如下：在 AB 上取一点 N，使 $BN=BP$，连接 PN，CM．∵△ABC 是等边三角形，∴∠B=∠ACB=60°，BA=BC=AC，∴△BPN 是等边三角形，AN=PC，BP=NP，∠BNP=60°，∴∠ANP=120°．由轴对称知 CM=CQ，∠ACM=∠ACB=60°，∴∠PCM=120°．由（1）知，∠APB=∠AQC，∴△ABP≌△ACQ（AAS），∴BP=QC，∴NP=CM，∴△ANP≌△PCM（SAS），∴AP=PM．



想法 3 辅助线如下：将线段 BP 绕点 B 顺时针旋转 60°，得到线段 BK，连接 PK，KC，CM．则△BPK 是等边三角形，∴∠ABP=∠CBK=60°，又 AB=CB，BP=BK，∴△ABP≌△CBK（SAS），∴PA=KC①；由轴对称知∠ACB=∠ACM，CQ=CM，又∵∠ACB=60°，∴∠MCK=120°．∵∠△BPK 是等边三角形，∴∠PBK=∠BKP=60°，BP=PK．∵在△BKC 中，∠CBK+∠BKC+∠BCK=180°，∴∠PKC+∠PCK=60°，∴∠PKC+∠PCK+∠PCM=180°，∴PK∥CM．同想法 3 理，BP=QC，∴PK=CM，∴四边形 $PKCM$ 是平行四边形，∴KC=PM②，由①②知 PA=PM．



29．在平面直角坐标系 xOy 中，点 P 的坐标为$(x_1，y_1)$，点 Q 的坐标为$(x_2，y_2)$，且 $x_1\neq x_2$，$y_1\neq y_2$，若 P，Q 为某个矩形的两个顶点，且该矩形的边均与某条坐标轴垂直，则称该矩形为点 P，Q 的“相关矩形”．下图为点 P，Q 的“相关矩形”的示意图．



（1）已知点 A 的坐标为（1，0），

①若点 B 的坐标为（3，1），求点 A，B 的“相关矩形”的面积；

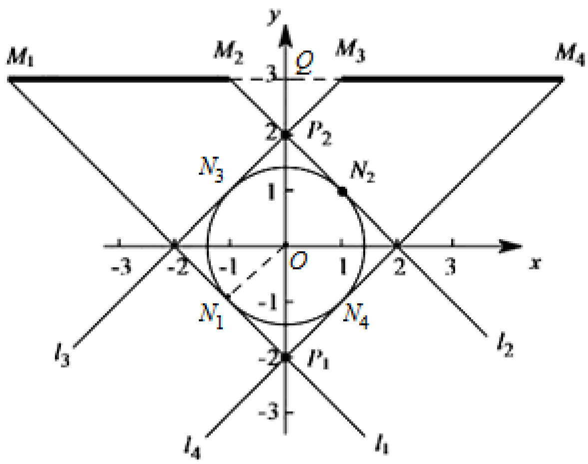
②点 C 在直线 $x=3$ 上，若点 A，C 的“相关矩形”为正方形，求直线 AC 的表达式；

（2）⊙O 的半径为 $\sqrt{2}$，点 M 的坐标为(m，3)．若在⊙O 上存在一点 N，使得点 M，N 的“相关矩形”为正方形，求 m 的取值范围．

解：（1）解：①∵A(1，0)，B(3，1)，∴点 A，B 的“相关矩形”的长和宽分别是 2 和 1，∴点 A，B 的“相关矩形”的面积为 $2\times1=2$；

②∵点 C 在直线 $x=3$ 上，且点 A，C 的“相关矩形”为正方形，∴点 C 的坐标能为 (3，2)或者(3，－2)，设直线 AC 的表达式为 $y=kx+b$，将 A、C 分别代入直线 AC 的表达式得到 $\begin{cases}0=k+b\\2=3k+b\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0=k+b\\-2=3k+b\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k=1\\b=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=-1\\b=1\end{cases}$，则直线 AC 的表达式为 $y=x-1$ 或 $y=-x+1$．

（2）解：①∵点 M，N 的“相关矩形”为正方形，∴MN 是正方形的对角线；②无论 m 的值怎样变化，所有可能的点 M 都在直线 $y=3$ 上；③点 N 在⊙O 上，由①②③知，直线 MN 与⊙O 相交或相切，与直线 $y=3$ 相交，且与 x 轴的夹角为 45°，如图所示：



当直线 MN 与⊙O 相切于点 N_1 时，设 MN 交 y 轴于点 P_1，连接 ON_1．

∵点 M，N 的“相关矩形”为正方形，∴∠M_1＝45°，∴∠OP_1N_1＝45°，∵MN 与⊙O 相切，切点为 N_1，∴∠ON_1P_1＝90°，∴∠N_1OP_1＝45°，∴$N_1O=N_1P_1$，∵⊙O 的半径为 $\sqrt{2}$，

∴$N_1O=N_1P_1=\sqrt{2}$，由勾股定理得 $OP_1=2$．设直线 $y=3$ 交 y 轴于点 Q，则 $OQ=3$，∴$P_1Q=5$．∵$\angle M_1=\angle M_1P_1Q=45°$，∴$\triangle M_1P_1Q$ 是等腰直角三角形，∴$M_1Q=5$，∴点 M_1 的横坐标为－5．

同理可求点 M_2 的横坐标为－1．

点 M_3 的横坐标为 1．

点 M_4 的横坐标为 5．

因此可以得到 m 的范围为 $1\le m\le 5$ 或 $-5\le m\le -1$．