赣州三中 2024~2025 学年第一学期第一次随堂作业

初三数学

（时间：120 分钟　　满分：120 分）

一、单选题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1．一元二次方程 $x^2-2x=0$ 的解是（　）

A．$x_1=3$，$x_2=1$　B．$x_1=2$，$x_2=0$　C．$x_1=3$，$x_2=-2$　D．$x_1=-2$，$x_2=-1$

2．关于 x 的一元二次方程 $2x^2-3x+k=0$ 有实数根，则实数 k 的取值范围是（　）

A．$k<\frac{9}{8}$　B．$k\le\frac{9}{8}$　C．$k\ge\frac{9}{8}$　D．$k<-\frac{9}{8}$

3．红星村种的水稻 2021 年平均每公顷产 7200kg，2023 年平均每公顷产 8450kg，求水稻每公顷产量的年平均增长率．设水稻每公顷产量的年平均增长率为 x．列方程为（　）

A．$7200(1+x)^2=8450$　　B．$7200(1+2x)=8450$

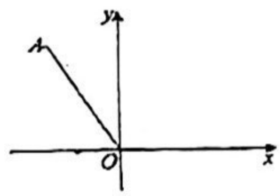
C．$8450(1-x)^2=7200$　　D．$8450(1-2x)=7200$

4．下列关于二次函数 $y=(x-2)^2-3$ 的说法正确的是（　）

A．图象是一条开口向下的抛物线　　B．图象与 x 轴没有交点

C．当 $x<2$ 时，y 随 x 增大而增大　　D．图象的顶点坐标是 $(2,-3)$

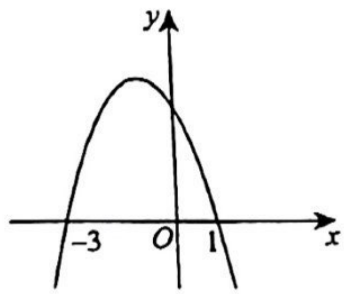
5．如图，点 A 的坐标是 $(-4,6)$，将线段 OA 绕点 O 顺时针旋转 90°，点 A 的对应点的坐标是（　）



A．$(4,6)$　　B．$(6,4)$

C．$(-6,-4)$　　D．$(-4,-6)$

6．已知抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\ne0)$ 的图像如图所示，则下列结论正确的是（　）



A　$abc<0$

B　$a-b=0$

C．$3a-c=0$

D．$am^2+bm\le a-b$（m 为任意实数）

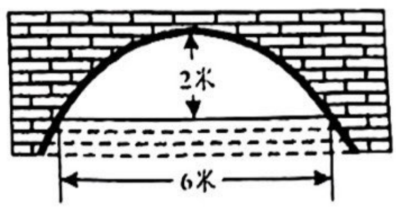
二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

7．已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+mx-2=0$ 的一个根为 -1，则 m 的值为________.

8．抛物线 $y=x^2-6x+c$ 与 x 轴只有一个交点，则 $c=$________.

9．关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x-1=0$ 的两根之和为________.

10．如图是抛物线形拱桥，当拱顶离水面 2 米时，水面宽 6 米，水面下降______米，水面宽 8 米.



11．已知二次函数 $y=x^2-2x+1$ 的图象向左平移两个单位得到抛物线 C，点 $P(2,y_1)$，$Q(3,y_2)$ 在抛物线 C 上，则 y_1________y_2（填“>”或“<”）.

12．已知二次函数 $y=(x-h)^2$（h 为常数），当自变量 x 的值满足 $-1\le x\le3$ 时，与其对应的函数值 y 的最小值为 4，则 h 的值为______.

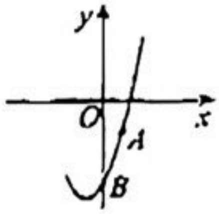
三、解答题（本大题共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

13. 解方程：$x^2-6x+5=0$.

14. 有一人患了流感，经过两轮传染后共有 64 人患了流感，求每轮传染中平均一个人传染了几个人.

15. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+(2k+1)x+k^2+1=0$ 有两个不等实数根 x_1，x_2，求 k 的取值范围.

16. 如图，已知二次函数 $y=x^2+bx+c$ 图象经过点 $A(1,-2)$ 和 $B(0,-5)$.



（1）求该二次函数的表达式及图象的顶点坐标.

（2）当 $y\le-2$ 时，请根据图象直接写出 x 的取值范围.

17. 如图，直角坐标系 xOy 中，抛物线上有 C、D 两点，抛物线与 y 轴交于 C 点，$CD\parallel x$ 轴，请你用无刻度的直尺按要求画图.

（1）在图 1 中，抛物线与 x 轴有两个交点，求作抛物线的对称轴.

（2）在图 2 中，抛物线与 x 轴无交点，$DF\perp x$ 轴，求作抛物线的顶点.

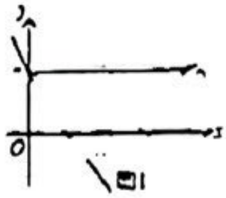


图1

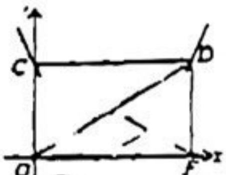


图2

四、解答题（本大题共 3 小题，每小题 8 分，共 24 分）

18. 如图 1，D 为等边$\triangle ABC$ 内一点，将线段 AD 绕点 A 逆时针旋转 60°得到 AE，连接 CE，BD 的延长线与 AC 交于点 G，与 CE 交于点 F.

求证：$BD=CE$.

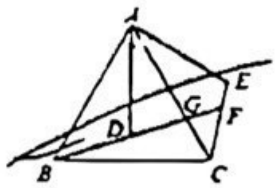


图1

19. 已知关于 x 的方程 $x^2-(k+4)x+4k=0$

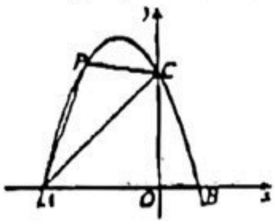
（1）求证：无论 k 取何值，方程总有实数根；

（2）若等腰三角形 ABC 的底边长为 5，另两边的长恰好是这个方程的两个根，求$\triangle ABC$ 的周长.

20. 如图，抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A、B 两点，与 y 轴交于点 C，其中 $B(1,0)$，$C(0,3)$.

（1）求抛物线的解析式.

（2）在第二象限的抛物线上是否存在一点 P，使得$\triangle APC$ 的面积最大．若存在，请求出点 P 坐标和$\triangle APC$ 的面积最大值；若不存在，请说明理由.



三、解答题（本大题共 2 小题，每小题 9 分，共 18 分）

21．阅读材料：

材料 1：关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个实数根 x_1，x_2 和系数 a、b、c 有如下关系：$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$．

材料 2：已知一元二次方程 $x^2-x-1=0$ 的两个实数根分别为 m，n，求 m^2n+mn^2 的值．

解：∵ m、n 是一元二次方程 $x^2-x-1=0$ 的两个实数根，

∴ $m+n=1$，$mn=-1$．

则 $m^2n+mn^2=mn(m+n)=-1\times1=-1$．

根据上述材料，结合你所学的知识，完成下列问题：

（1）应用：一元二次方程 $2x^2+3x-1=0$ 的两个实数根为 x_1，x_2，则 $x_1+x_2=$__________，$x_1x_2=$__________；

（2）类比：已知一元二次方程 $2x^2+3x-1=0$ 的两个实数根为 m，n，求 m^2+n^2 的值；

（3）提升：已知实数 s，t 满足 $2s^2+3s-1=0$，$2t^2+3t-1=0$ 且 $s\neq t$，求 $\frac{1}{s}-\frac{1}{t}$ 的值．

22．请根据以下素材，完成探究任务．

<table>
<tr><th colspan="3">制定加工方案</th></tr>
<tr><td rowspan="2">生产背景</td><td>背景 1</td><td>◆某民族服装厂安排 70 名工人加工一批夏季服装，有“风”“雅”“正”三种样式．
◆因工艺需要，每位工人每天可加工且只能加工“风”服装 2 件，或“雅”服装 1 件，或“正”服装 1 件．
◆要求全厂每天加工“雅”服装至少 10 件，“正”服装总件数和“风”服装相等．</td></tr>
<tr><td>背景 2</td><td>每天加工的服装都能销售出去，扣除各种成本，服装厂的获利情况为：
①“风”服装：24 元/件；
②“正”服装：48 元/件；
③“雅”服装：当每天加工 10 件时，每件获利 100 元；如果每天多加工 1 件，那么平均每件获利将减少 2 元．</td></tr>
<tr><td>信息整理</td><td colspan="2">现安排 x 名工人加工“雅”服装，y 名工人加工“风”服装，列表如下：
<table>
<tr><th>服装种类</th><th>加工人数（人）</th><th>每人每天加工量（件）</th><th>平均每件获利（元）</th></tr>
<tr><td>风</td><td>y</td><td>2</td><td>24</td></tr>
<tr><td>雅</td><td>x</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>正</td><td></td><td>1</td><td>48</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td rowspan="3">探究任务</td><td>任务 1</td><td>探寻变量关系　｜　求 x、y 之间的数量关系．</td></tr>
<tr><td>任务 2</td><td>建立数学模型　｜　设该工厂每天的总利润为 w 元，求 w 关于 x 的函数表达式．</td></tr>
<tr><td>任务 3</td><td>拟定加工方案　｜　制定使每天总利润最大的加工方案．</td></tr>
</table>

六、解答题（本大题共1小题，每小题12分，共12分）

23．综合与实践

问题提出：某兴趣小组开展综合实践活动：在Rt$\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，D为AC上一点，$CD=\sqrt{2}$，动点P以每秒1个单位的速度从C点出发，在三角形边上沿$C\to B\to A$匀速运动，到达点A时停止，以DP为边作正方形$DPEF$设点P的运动时间为ts，正方形$DPEF$的面积为S．探究S与t的关系

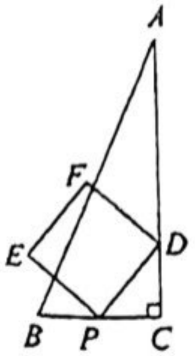


图1

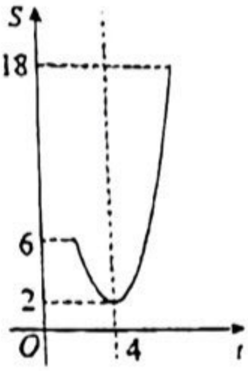


图2

（1）初步感知：如图1，当点P由点C运动到点B时，

①当$t=1$时，$S=$________．

②S关于t的函数解析式为________．

（2）当点P由点B运动到点A时，经探究发现S是关于t的二次函数，并绘制成如图2所示的图象请根据图象信息，求S关于t的函数解析式及线段AB的长．

（3）延伸探究：若存在3个时刻t_1,t_2,t_3（$t_1<t_2<t_3$）对应的正方形$DPEF$的面积均相等．

①$t_1+t_2=$________

②当$t_3=4t_1$时，求正方形$DPEF$的面积．

参考答案：

题号	1	2	3	4	5	6				
答案	B	B	A	D	B	D				

1．B【来源】2024年贵州省中考数学试题

【分析】本题考查了解一元二次方程，利用因式分解法求解即可．

【详解】解： $x^2-2x=0$，

$\therefore x(x-2)=0$，

$\therefore x=0$ 或 $x-2=0$，

$\therefore x_1=2$， $x_2=0$，

故选：B．

2.B【分析】本题考查了判别式与一元二次方程根的情况，熟知一元二次方程有实数根的条件是解题的关键．根据一元二次方程有实数根的条件是 $\Delta\ge0$，据此列不等式求解即可．

【详解】解：∵关于 x 的一元二次方程 $2x^2-3x+k=0$ 有实数根，

$\therefore \Delta=(-3)^2-4\times2k\ge0$，解得 $k\le\frac{9}{8}$．

故选 B．

3．A【来源】2024年江苏省南通市中考数学试题

【分析】本题主要考查了一元二次方程的应用，设水稻每公顷产量的年平均增长率为 x，则2022年平均每公顷 $7200(1+x)\mathrm{kg}$，则2023年平均每公顷产 $7200(1+x)^2\mathrm{kg}$，根据题意列出一元二次方程即可．

【详解】解：设水稻每公顷产量的年平均增长率为 x，则2022年平均每公顷产 $7200(1+x)\mathrm{kg}$，

则2023年平均每公顷产 $7200(1+x)^2\mathrm{kg}$，

根据题意有： $7200(1+x)^2=8450$，

故选：A．

4．D【来源】2023年四川省甘孜藏族自治州中考数学真题

【分析】由二次函数解析式可得抛物线开口方向、对称轴、顶点坐标，与 x 轴的交点个数，由此解答即可．

【详解】解：A、∵$a=1>0$，图象的开口向上，故此选项不符合题意；

B、∵ $y=(x-2)^2-3=x^2-4x+1$，

$\therefore \Delta=(-4)^2-4\times1\times1=12>0$，

即图象与 x 轴有两个交点，

故此选项不符合题意；

C、∵抛物线开口向上，对称轴为直线 $x=2$，

∴当 $x<2$ 时，y 随 x 增大而减小，

故此选项不符合题意；

D、∵ $y=(x-2)^2-3$，

∴图象的顶点坐标是 $(2,-3)$，

故此选项符合题意；

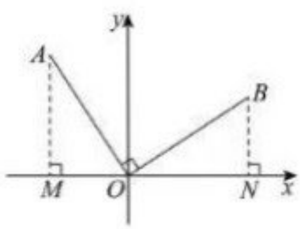
故选：D．

【点睛】本题考查了二次函数的图象性质，解题的关键是掌握二次函数图象与系数的关系．

5. B【分析】本题主要考查了坐标与图形变化－旋转，全等三角形的判定和性质，熟知图形旋转的性质是解题的关键．

根据题意画出旋转后的图形，再结合全等三角形的判定与性质即可解决问题．

【详解】解：如图所示，



分别过点 A 和点 B 作 x 轴的垂线，垂足分别为 M 和 N，

由旋转可知，

$OA=OB$，$\angle AOB=90^\circ$，

$\therefore \angle AOM+\angle BON=\angle A+\angle AOM=90^\circ$，

$\therefore \angle A=\angle BON$．

在 $\triangle AOM$ 和 $\triangle OBN$ 中，

$\begin{cases}\angle A=\angle BON\\ \angle AMO=\angle ONB\\ OA=OB\end{cases}$，

$\therefore \triangle AOM\cong\triangle OBN(AAS)$，

$\therefore BN=MO$，$ON=AM$．

$\because$点A的坐标为$(-4,6)$，

$\therefore BN=MO=4$，$ON=AM=6$，

$\therefore$点B的坐标为$(6,4)$．

故选：B．

6．D【来源】2024年山东省东营市中考数学试题

【分析】本题考查了二次函数的图象和性质，熟知二次函数的图象和性质及巧用数形结合的思想是解题的关键；由图象可知：$a<0$，$c>0$，根据抛物线的与x轴的交点可求对称轴，根据对称轴及a与b的符号关系可得$b=2a<0$，则可判断选项A、B、C，由当$x=-1$时，函数有最大值，可判断选项D．

【详解】解：A、$\because$抛物线开口往下，

$\therefore a<0$，

$\because$抛物线与y轴交于正半轴，

$\therefore c>0$

$\because$抛物线的与x轴的交点是：$(-3,0)$和$(1,0)$

$\therefore$对称轴为$x=-1$，

$\therefore -\dfrac{b}{2a}=-1$，

$\therefore b=2a<0$，

$\therefore abc>0$，故选项A错误．

$\because b=2a$，

$\therefore 2a-b=0$，故选项B错误（否则可得$a=0$，不合题意）．

$\because a<0$，$c>0$，

$\therefore 3a-c<0$，故选项C错误．

$\because$抛物线的对称轴为直线$x=-1$，且开口向下，

$\therefore$当$x=-1$时，函数值最大为$y=a-b+c$，

$\therefore$当$x=m$时，$y=am^2+bm+c$，

$\therefore am^2+bm+c\le a-b+c$，

$\therefore am^2+bm\le a-b$，故选项D正确．

故选：D．

7．　-1　【分析】将$x=-1$代入原方程，解得m．

【详解】解：$\because$关于x的一元二次方程$x^2+mx-2=0$的一个根为-1，

$\therefore 1-m-2=0$

解得：$m=-1$，

故答案为：-1．

【点睛】本题考查了一元二次方程根的定义．

8．$c>\dfrac{1}{4}$　【分析】本题主要考查了抛物线$y=ax^2+bx+c$与x轴的交点问题，掌握抛物线$y=ax^2+bx+c$与x轴没有交点与$x^2-x+c=0$没有实数根是解题的关键．

由抛物线与x轴没有交点，运用根的判别式列出关于c的一元一次不等式求解即可．

【详解】解：$\because$抛物线$y=x^2-x+c$与x轴没有交点，

$\therefore x^2-x+c=0$没有实数根，

$\therefore \Delta=1^2-4\times1\times c=1-4c<0$，$c>\dfrac{1}{4}$．

故答案为：$c>\dfrac{1}{4}$．

9．-2　【分析】利用根与系数的关系进行求值．

【详解】解：$x^2+2x-1=0$，

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{2}{1}=-2$，

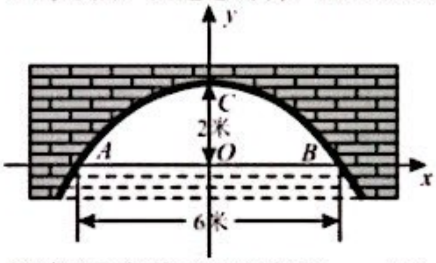
故答案为：-2．

【点睛】本题主要考查了根与系数的关系，熟练掌握$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$．

10．$\frac{14}{9}$/$1\frac{5}{9}$　【来源】2022年四川省广安市中考数学真题

【分析】根据已知得出直角坐标系，通过代入A点坐标（-3，0），求出二次函数解析式，再根据把$x=4$代入抛物线解析式得出下降高度，即可得出答案．

【详解】解：建立平面直角坐标系，设横轴x通过AB，纵轴y通过AB中点O且通过C点，则通过画图可得知O为原点，由题意可得：$AO=OB=3$米，C坐标为（0，2），



通过以上条件可设顶点式$y=ax^2+2$，把点A点坐标（-3，0）代入得，

$\therefore 9a+2=0$，

$\therefore a=-\frac{2}{9}$，

$\therefore$抛物线解析式为：$y=-\frac{2}{9}x^2+2$；

当水面下降，水面宽为8米时，有

把$x=4$代入解析式，得$y=-\frac{2}{9}\times4^2+2=-\frac{2}{9}\times16+2=-\frac{14}{9}$；

$\therefore$水面下降$\frac{14}{9}$米；

故答案为：$\frac{14}{9}$；

【点睛】此题主要考查了二次函数的应用，根据已知建立坐标系从而得出二次函数解析式是解决问题的关键．

11．<

【分析】先求出抛物线的对称轴，然后根据二次函数的性质解决问题．

【详解】解：$y=x^2-3$的对称轴为y轴，

$\because a=1>0$，

$\therefore$开口向上，当$x>0$时，　y随x的增大而增大，

$\because 0<x_1<x_2$，

$\therefore y_1<y_2$．

故答案为：<．

【点睛】本题主要考查了二次函数的增减性，解题的关键是根据抛物表达式得出函数的开口方向和对称轴，从而分析函数的增减性．

12．－3或5

【来源】福建省2019年中考数学三模试题

【分析】由解析式可知该函数在x=h时取得最小值0，x>h时，y随x的增大而增大；当x<h时，y随x的增大而减小；根据$-1\le x\le3$时，函数的最小值为4可分如下两种情况：①若$h<-1\le x\le3$，$x=-1$时，y取得最小值4；②若$-1\le x\le3<h$，当x=3时，y取得最小值4，分别列出关于h的方程求解即可．

【详解】$\because$当$x>h$时，y随x的增大而增大，当$x<h$时，y随x的增大而减小，

$\therefore$①若$h<-1\le x\le3$，$x=-1$时，y取得最小值4，

可得：$(-1-h)^2=4$，

解得：$h=-3$或$h=1$（舍）；

②若$-1\le x\le3<h$，当$x=3$时，y取得最小值4，

可得：$(3-h)^2=4$，

解得：$h=5$或$h=1$（舍）；

③若 $-1<h<3$ 时，当 $x=h$ 时，y 取得最小值为0，不是4，

∴此种情况不符合题意，舍去.

综上，h 的值为 -3 或5，

故答案为 -3 或5.

【点睛】本题主要考查二次函数的性质和最值，根据二次函数的性质和最值分类讨论是解题的关键.

13．$x_1=1$，$x_2=5$　【来源】2023年广东广州中考数学真题

【分析】直接利用因式分解法解一元二次方程即可.

【详解】解：$x^2-6x+5=0$，

$(x-1)(x-5)=0$，

$x-1=0$ 或 $x-5=0$，

$x_1=1$，$x_2=5$.

【点睛】本题考查因式分解法解一元二次方程，正确计算是解题的关键.

14．（1）每轮传染中平均一个人传染了7个人；（2）第三轮将又有448人被传染

【来源】2013年初中毕业升学考试（湖北襄阳卷）数学

【分析】（1）设每轮传染中平均每人传染了 x 人，根据经过两轮传染后共有64人患了流感，可求出 x，（2）进而求出第三轮过后，又被感染的人数.

【详解】解：（1）设每轮传染中平均每人传染了 x 人，

$1+x+x(x+1)=64$

$x=7$ 或 $x=-9$（舍去）.

答：每轮传染中平均一个人传染了7个人；

【点睛】本题考查了一元二次方程的应用，先求出每轮传染中平均每人传染了多少人数是解题关键.

15．(1) $k>\frac{3}{4}$【分析】（1）利用一元二次方程根的判别式大于0建立不等式，解不等式即可得；

【详解】（1）解：∵关于 x 的一元二次方程 $x^2+(2k+1)x+k^2+1=0$ 有两个不等实数根，

∴此方程根的判别式 $\Delta=(2k+1)^2-4(k^2+1)>0$，

解得 $k>\frac{3}{4}$.

【点睛】本题考查了一元二次方程根的判别式、以及根与系数的关系，熟练掌握一元二次方程的相关知识是解题关键.

16．(1) $y=x^2+2x-5$，顶点坐标为 $(-1,-6)$；

(2) $-3\le x\le 1$

【来源】2023年浙江省宁波市中考数学真题

【分析】（1）把 $A(1,-2)$ 和 $B(0,-5)$ 代入 $y=x^2+bx+c$，建立方程组求解解析式即可，再把解析式化为顶点式，可得顶点坐标；

（2）把 $y=-2$ 代入函数解析式求解 x 的值，再利用函数图象可得 $y\le -2$ 时 x 的取值范围.

【详解】（1）解：∵二次函数 $y=x^2+bx+c$ 图象经过点 $A(1,-2)$ 和 $B(0,-5)$，

∴ $\begin{cases}c=-5\\1+b+c=-2\end{cases}$，解得：$\begin{cases}b=2\\c=-5\end{cases}$，

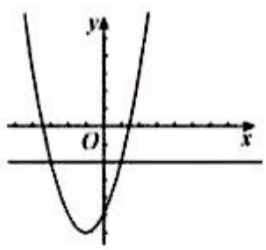
∴抛物线为 $y=x^2+2x-5=(x+1)^2-6$，

∴顶点坐标为：$(-1,-6)$；

（2）当 $y=-2$ 时，$(x+1)^2-6=-2$，

∴ $(x+1)^2=4$

解得：$x_1=1$，$x_2=-3$，



如图，当 $y\le -2$ 时，

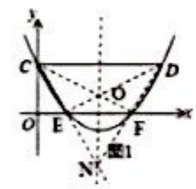
∴ $-3\le x\le 1$.

【点睛】本题考查的是利用待定系数法求解二次函数的解析式，二次函数的顶点坐标，利用图象法解不等式，熟练的运用数形结合的方法解题是关键.

17．(1)见解析；(2)见解析

【来源】【南昌新东方】2020年9月心远初三开学考 26

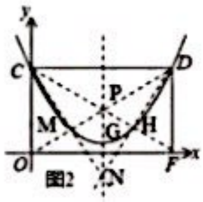
【分析】(1)连接线段CE、DF，并延长CE、DF交于点N，连接CF、DE相较于点O，作过点O和点N的直线即可；



(2)连接CF、OD交于点P，分别与抛物线交于点M和点H，连接CM、DH并延长CM和DH相交于点N，连接PN与抛物线的交点G即为顶点.

【详解】解：(1)连接线段CE、DF，并延长CE、DF交于点N，连接CF、DE相较于点O，作过点O和点N的直线，

(2)连接CF、OD交于点P，分别与抛物线交于点M和点H，连接CM、DH并延长CM和DH相交于点N，连接PN与抛物线的交点G即为顶点.



【点睛】本题主要考查的是作图，根据题目条件正确的作出符合要求的图是解题的关键.

18.（1）见解析；

【分析】（1）根据旋转的性质可得 $AD=AE$，$\angle DAE=60°$，结合已知条件可得 $\angle BAC=\angle DAE$，进而证明 $\triangle ABD\cong\triangle ACE$，即可证明 $BD=CE$；

【详解】解：证明：（1）如图1，∵线段 AD 绕点 A 逆时针旋转 $60°$ 得到 AE，

∴ $AD=AE$，$\angle DAE=60°$，

∵ $\angle BAC=60°$，

∴ $\angle BAC=\angle DAE$，

∴ $\angle BAD=\angle CAE$，

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中，

$$\begin{cases} AB=AC \\ \angle BAD=\angle CAE \\ AD=AE \end{cases},$$

∴ $\triangle ABD\cong\triangle ACE$（$SAS$），

∴ $BD=CE$，

19. (1)见解析；

(2)13；

【来源】浙江省湖州市长兴县龙山共同体2023-2024学年八年级下学期3月月考数学试题

【分析】本题考查一元二次方程根与判别式的关系，解一元二次方程；

（1）根据完全平方公式的非负性判别即可得到证明；

（2）解一元二次方程，再根据周长公式求解即可得到答案；

【详解】（1）证明：由题意可得，

$\Delta=\left[-(k+4)\right]^2-4\times1\times4k=k^2+8k+16-16k=(k-4)^2$，

∵ $(k-4)^2\geq0$，

∴无论 k 取何值，方程总有实数根；

（2）解：∵等腰三角形 ABC 的底边长为5，另两边的长恰好是这个方程的两个根，

∴ $x^2-(k+4)x+4k=0$ 由两个相等的实数根，

∴ $k-4=0$，

∴ $k=4$，

∴原方程变形为：$x^2-8x+16=0$，

解得：$x_1=x_2=4$，

∴ $C_{\triangle ABC}=4+4+5=13$.

20. (1) $y=-x^2-2x+3$

(2)存在，点 P 的坐标是 $P\left(-\frac{3}{2},\frac{15}{4}\right)$，$\triangle APC$ 的面积最大值是 $\frac{27}{8}$

【分析】本题主要考查二次函数的图象与性质以及与几何综合；

（1）将 B、C 两点坐标代入函数解析式，求出 b，c 的值即可；

（2）过点 P 作 $PE\perp x$ 轴于点 E，设 $P\left(x,-x^2-2x+3\right)$，且点 P 在第二象限，根据 $S_{\triangle APC}=S_{\triangle APE}+S_{梯形PCOE}-S_{\triangle AOC}$ 可得二次函数关系式，再利用二次函数的性质即可求解.

【详解】（1）解：将 $B(1,0)$，$C(0,3)$ 代入 $y=-x^2+bx+c$ 得，

$$\begin{cases} -1+b+c=0 \\ c=3 \end{cases}$$

解得：$\begin{cases}b=-2\\c=3\end{cases}$

$\therefore y=-x^2-2x+3$

（2）解：对于$y=-x^2-2x+3$，令$y=0$,则$-x^2-2x+3=0$,

解得，$x_1=-3,x_2=1$,

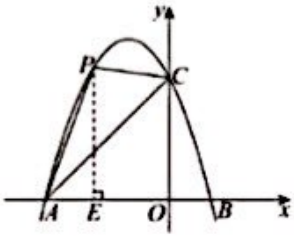
$\therefore A(-3,0)$,

$\therefore OA=3$,

$\because C(0,3)$,

$\therefore OC=3$,

过点 P 作 $PE\perp x$ 轴于点 E，如图，



设$P(x,-x^2-2x+3)$，且点 P 在第二象限，

$\therefore OE=-x, AE=3+x$,

$\therefore S_{\triangle APC}=S_{\triangle APE}+S_{梯形PCOE}-S_{\triangle AOC}$

$=\frac{1}{2}AE\times PE+\frac{1}{2}(OC+PE)\times OE-\frac{1}{2}OA\times OC$

$=\frac{1}{2}(3+x)(-x^2-2x+3)+\frac{1}{2}(3-x^2-2x+3)(-x)-\frac{1}{2}\times3\times3$

$=-\frac{3}{2}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{8}$

$\because -\frac{3}{2}<0$,

$\therefore$ S 有最大值，

$\therefore$ 当 $x=-\frac{3}{2}$时，S 有最大值，最大值为$\frac{27}{8}$，此时点 P 的坐标为$\left(-\frac{3}{2},\frac{15}{4}\right)$

21．(1)$-\frac{3}{2}$，$-\frac{1}{2}$

(2)$\frac{13}{4}$

(3)$\frac{1}{s}-\frac{1}{t}$的值为$\sqrt{17}$或$-\sqrt{17}$．

【来源】2023 年内蒙古通辽市中考数学真题

【分析】(1) 直接利用一元二次方程根与系数的关系求解即可；

（2）利用一元二次方程根与系数的关系可求出$m+n=-\frac{3}{2}$，$mn=-\frac{1}{2}$，再根据$m^2+n^2=(m+n)^2-2mn$，最后代入求值即可；

（3）由题意可将 s、t 可以看作方程$2x^2+3x-1=0$的两个根，即得出$s+t=-\frac{3}{2}$，$st=-\frac{1}{2}$，从而由$(t-s)^2=(t+s)^2-4st$，求得$t-s=\frac{\sqrt{17}}{2}$或$t-s=-\frac{\sqrt{17}}{2}$，最后分类讨论分别代入求值即可．

【详解】(1) 解：$\because$一元二次方程$2x^2+3x-1=0$的两个根为x_1，x_2，

$\therefore x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{3}{2}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=-\frac{1}{2}$．

故答案为：$-\frac{3}{2}$，$-\frac{1}{2}$；

（2）解：$\because$一元二次方程$2x^2+3x-1=0$的两根分别为 m、n，

$\therefore m+n=-\frac{b}{a}=-\frac{3}{2}$，$mn=\frac{c}{a}=-\frac{1}{2}$，

$\therefore m^2+n^2=(m+n)^2-2mn$

$=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{9}{4}+1$

$=\frac{13}{4}$；

（3）解：∵实数 s、t 满足 $2s^2+3s-1=0, 2t^2+3t-1=0$，

∴s、t 可以看作方程 $2x^2+3x-1=0$ 的两个根，

∴$s+t=-\frac{b}{a}=-\frac{3}{2}$，$st=\frac{c}{a}=-\frac{1}{2}$，

∵$(t-s)^2=(t+s)^2-4st$

$=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{17}{4}$，

∴$t-s=\frac{\sqrt{17}}{2}$ 或 $t-s=-\frac{\sqrt{17}}{2}$，

当 $t-s=\frac{\sqrt{17}}{2}$ 时，

$\frac{1}{s}-\frac{1}{t}=\frac{t-s}{st}=\frac{\frac{\sqrt{17}}{2}}{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{17}$，

当 $t-s=-\frac{\sqrt{17}}{2}$ 时，

$\frac{1}{s}-\frac{1}{t}=\frac{t-s}{st}=\frac{-\frac{\sqrt{17}}{2}}{-\frac{1}{2}}=\sqrt{17}$，

综上分析可知，$\frac{1}{s}-\frac{1}{t}$ 的值为 $\sqrt{17}$ 或 $-\sqrt{17}$.

【点睛】本题考查一元二次方程根与系数的关系，完全平方公式的变形计算，分式的混合运算．理解题意，掌握一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 根与系数的关系：$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ 和 $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ 是解题关键.

22．任务 1：$y=-\frac{1}{3}x+\frac{70}{3}$；任务 2：$w=-2x^2+72x+3360(x\geq10)$；任务 3：安排 19 名工人加工"雅"服装，17 名工人加工"风"服装，34 名工人加工"正"服装，即可获得最大利润

【来源】2024 年江苏省盐城市中考数学试题

【分析】题目主要考查一次函数及二次函数的应用，理解题意，根据二次函数的性质求解是解题关键.

任务 1：根据题意安排 x 名工人加工"雅"服装，y 名工人加工"风"服装，得出加工"正"服装的有 $(70-x-y)$ 人，然后利用"正"服装总件数和"风"服装相等，得出关系式即可得出结果；

任务 2：根据题意得："雅"服装每天获利为：$x[100-2(x-10)]$，然后将 2 种服装的获利求和即可得出结果；

任务 3：根据任务 2 结果化为顶点式，然后结合题意，求解即可.

【详解】解：任务 1：根据题意安排 70 名工人加工一批夏季服装，

∵安排 x 名工人加工"雅"服装，y 名工人加工"风"服装，

∴加工"正"服装的有 $(70-x-y)$ 人，

∵"正"服装总件数和"风"服装相等，

∴$(70-x-y)\times1=2y$，

整理得：$y=-\frac{1}{3}x+\frac{70}{3}$；

∴可设 S关于 t的函数解析式为 $S=a(t-4)^2+2$，

把$(2,6)$代入$S=a(t-4)^2+2$中得：$6=a(2-4)^2+2$，

解得$a=1$，

∴S关于t的函数解析式为$S=(t-4)^2+2=t^2-8t+18(2\le t\le 8)$，

在$S=t^2-8t+18$中，当$S=t^2-8t+18=18$时，解得$t=8$或$t=0$，

∴ $AB=8-2=6$；

（3）解：①∵点 P在BC上运动时， $S=t^2+2$，点 P在AB上运动时$S=(t-4)^2+2$，

∴可知函数$S=(t-4)^2+2$可以看作是由函数$S=t^2+2$向右平移四个单位得到的，

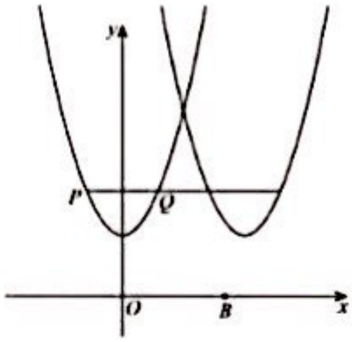
设$P(m_1,\ n)$，$Q(m_2,\ n)(m_2>m_1)$是函数$S=t^2+2$上的两点，则$(m_1+4,\ n)$，$(m_2+4,\ n)$是函数$S=(t-4)^2+2$上的两点，

∴ $m_1+m_2=0$，$m_1<m_2<m_1+4<m_2+4$，

∴ $m_2+m_1+4=4$，

∵存在 3 个时刻t_1,t_2,t_3（$t_1<t_2<t_3$）对应的正方形$DPEF$的面积均相等．

∴可以看作$t_1=m_2$，$t_2=m_1+4$，$t_3=m_2+4$，



∴ $t_1+t_2=4$，

故答案为：4；

②由（3）①可得$t_3=t_1+4$，

∵ $t_3=4t_1$，

∴ $4t_1=t_1+4$，

∴ $t_1=\dfrac{4}{3}$，

∴ $S=t^2+2=\left(\dfrac{4}{3}\right)^2+2=\dfrac{34}{9}$．

【点睛】本题主要考查了二次函数与图形运动问题，待定系数法求函数解析式，勾股定理等等，正确理解题意利用数形结合的思想求解是解题的关键．