

2025年普通高等学校招生全国统一考试(新II卷)

数学

注意事项:

1. 答卷前,考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号,试室号,座位号填写在答题卡上。用2B铅笔将试卷类型和考生号填涂在答题卡相应位置上。
2. 选择题每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应的题目选项的答案信息点涂黑;如需改动,用橡皮擦干净后,再填涂其他答案。答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答,答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上;如需改动,先划掉原来的答案,然后再写上新的答案,不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

一、单选题:本题共8小题,每小题5分,共40分,每小题只有一个选项符合要求

1. 样本数据2,8,14,16,20的平均数为 ()
A. 8 B. 9 C. 12 D. 18
2. 已知 $z=1+i$,则 $\frac{1}{z-1} =$ ()
A. -i B. i C. -1 D. 1
3. 已知集合 $A=\{-4,0,1,2,8\}$, $B=\{x|x^3=x\}$,则 $A\cap B=$ ()
A. $\{0,1,2\}$ B. $\{1,2,8\}$ C. $\{2,8\}$ D. $\{0,1\}$
4. 不等式 $\frac{x-4}{x-1} \geq 2$ 的解集是 ()
A. $\{x|-2 \leq x \leq 1\}$ B. $\{x|x \leq -2\}$ C. $\{x|-2 \leq x < 1\}$ D. $\{x|x > 1\}$
5. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC=2$, $AC=1+\sqrt{3}$, $AB=\sqrt{6}$,则 $A=$ ()
A. 45° B. 60° C. 120° D. 135°
6. 设抛物线 $C:y^2=2px(P>0)$ 的焦点为 F ,点 A 在 C 上,过 A 作 C 准线的垂线,垂足为 B .若直线 BF 的方程为 $y=-2x+2$,则 $|AF|=$ ()
A. 3 B. 4 C. 5 D. 6
7. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,若 $S_3=6$, $S_5=-5$,则 $S_6=$ ()
A. -20 B. -15 C. -10 D. -5
8. 已知 $0 < \alpha < \pi$, $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$,则 $\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) =$ ()
A. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{5}$ C. $\frac{3\sqrt{2}}{10}$ D. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

二、多选题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， q 为 $\{a_n\}$ 的公比， $q > 0$ 。若 $S_3 = 7, a_3 = 1$ ，则 ()
- A. $q = \frac{1}{2}$ B. $a_5 = \frac{1}{9}$ C. $S_5 = 8$ D. $a_n + S_n = 8$
10. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且当 $x > 0$ 时， $f(x) = (x^2 - 3)e^x + 2$ ，则 ()
- A. $f(0) = 0$ B. 当 $x < 0$ 时， $f(x) = -(x^2 - 3)e^{-x} - 2$
- C. $f(x) \geq 2$ ，当且仅当 $x \geq \sqrt{3}$ D. $x = -1$ 是 $f(x)$ 的极大值点
11. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 ，左、右顶点分别为 A_1, A_2 ，以 F_1F_2 为直径的圆与曲线 C 的一条渐近线交于 M, N 两点，且 $\angle NA_1M = \frac{5\pi}{6}$ ，则 ()
- A. $\angle A_1MA_2 = \frac{\pi}{6}$ B. $|MA_1| = 2|MA_2|$
- C. C 的离心率为 $\sqrt{13}$ D. 当 $a = \sqrt{2}$ 时，四边形 NA_1MA_2 的面积为 $8\sqrt{3}$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分

12. 已知平面向量 $\mathbf{a} = (x, 1), \mathbf{b} = (x - 1, 2x)$ ，若 $\mathbf{a} \perp (\mathbf{a} - \mathbf{b})$ ，则 $|\mathbf{a}| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
13. 若 $x = 2$ 是函数 $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - a)$ 的极值点，则 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
14. 一个底面半径为 4 cm，高为 9 cm 的封闭圆柱形容器（容器壁厚度忽略不计）内有两个半径相等的铁球，则铁球半径的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ cm。

四、解答题：本题共5小题，共77分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤

15. (13分)

已知函数 $f(x) = \cos(2x + \varphi)$ ($0 \leq \varphi < \pi$), $f(0) = \frac{1}{2}$ 。

(1) 求 φ ；

(2) 设函数 $g(x) = f(x) + f\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ ，求 $g(x)$ 的值域和单调区间。

16. (15分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 长轴长为 4,

(1) 求 C 的方程;

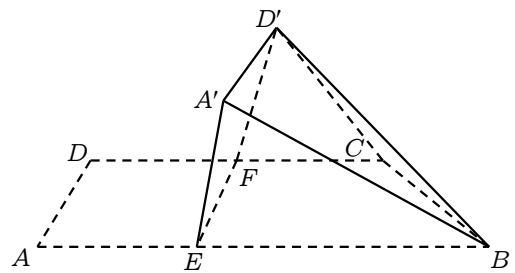
(2) 过点 $(0, -2)$ 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, O 为坐标原点. 若 ΔOAB 的面积为 $\sqrt{2}$, 求 $|AB|$.

17. (15分)

如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle DAB = 90^\circ$, F 为 CD 中点, E 在 AB 上, $EF \parallel AD$, $AB = 3AD$, $CD = 2AD$, 将四边形 $EFDA$ 沿 EF 翻折至四边形 $EFD'A'$, 使得面 $EFD'A'$ 与面 $EFCD$ 所成的二面角为 60° .

(1) 证明: $A'B \parallel$ 平面 $CD'F$.

(2) 求面 BCD' 与面 $EFD'A'$ 所成二面角的正弦值.



18. (17 分)

已知函数 $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 - kx^3$, 其中 $0 < k < \frac{1}{3}$.

(1) 证明: $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 存在唯一的极值点和唯一的零点;

(2) 设 x_1, x_2 分别为 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 的极值点和零点.

(i) 设函数 $g(t) = f(x_1+t) - f(x_1-t)$, 证明: $g(t)$ 在区间 $(0, x_1)$ 单调递减;

(ii) 比较 $2x_1$ 与 x_2 的大小, 并证明你的结论.

19. (17 分)

甲、乙两人进行乒乓球练习, 每个球胜者得 1 分、负者得 0 分. 设每个球甲胜的概率为 p ($\frac{1}{2} < p < 1$), 乙胜的概率为 q , $p+q=1$, 且各球的胜负相互独立, 对正整数 $k \geq 2$, 记 p_k 为打完 k 个球后甲比乙至少多得 2 分的概率, q_k 为打完 k 个的球后乙比甲至少多得 2 分的概率.

(1) 求 p_3, p_4 (用 p 示)

(2) 若 $\frac{p_4 - p_3}{q_4 - q_3} = 4$, 求 p ;

(3) 证明: 对任意正整数 m , $p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m} < p_{2m+2} - q_{2m+2}$.

2025 年全国统一高考数学试卷（新高考II）

参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 2, 8, 14, 16, 20 平均数为 ()

A. 8

B. 9

C. 12

D. 18

【答案】C

【解答】 $\bar{x} = \frac{2+8+14+16+20}{5} = 12$

2. $z=1+i$, $\frac{1}{z-1} = ()$

A. $-i$

B. i

C. -1

D. 1

【答案】A

【解答】 $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+i-1} = \frac{1}{i} = -i$.

3. $A = \{-4, 0, 1, 2, 8\}$ $B = \{x | x^3 = x\}$, $A \cap B = ()$

A. $\{0, 1, 2\}$

B. $\{1, 2, 8\}$

C. $\{2, 8\}$

D. $\{0, 1\}$

【答案】D

【解答】 $B = \{x | x(x-1)(x+1) = 0\} = \{0, -1, 1\}$, $A \cap B = \{0, 1\}$.

4. $\frac{x-4}{x-1} \geq 2$ 解集是 ()

A. $\{x | -2 \leq x \leq 1\}$

B. $\{x | x \leq -2\}$

C. $\{x | -2 \leq x < 1\}$

D. $\{x | x > 1\}$

【答案】C

【解答】

$\frac{x-4}{x-1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x-4}{x-1} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x-2}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow -(x+2)(x-1) \geq 0$ 且 $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x < 1$.

5. $\triangle ABC$, $BC=2$, $AC=1+\sqrt{3}$, $AB=\sqrt{6}$, $A=(\quad)$

- A. 45° B. 60° C. 120° D. 135°

【答案】A

【解答】由余弦定理

$$\cos A = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2AC \cdot AB} = \frac{(1+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2 - 2^2}{2 \times (1+\sqrt{3}) \times \sqrt{6}} = \frac{2(\sqrt{3}+3)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+3)} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$A \in (0, \pi), \text{ 故 } A = \frac{\pi}{4}.$$

6. 抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 焦点 F , $A \in C$, 过 A 作 C 准线的垂线, 垂足为 B . 若

$l_{BF}: y = -2x + 2$, 则 $|AF| = (\quad)$

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【答案】C

【解答】 $l_{BF}: y = -2x + 2$ 与 x 轴交于 F 点, 则 $F(1, 0)$,

$$\text{故 } \frac{p}{2} = 1 \Leftrightarrow p = 2 \Leftrightarrow C: y^2 = 4x;$$

设 $l_{BF}: y = -2x + 2$ 与 y 轴交于 N 点, 则 $N(0, 2)$;

准线与 x 轴交于 M 点, 由 $\triangle FON \sim \triangle FMB$, $MB = 2NO = 4$, 故 $y_A = 4$,

$$\text{代入 } C: y^2 = 4x \text{ 得 } x_A = 4, A(4, 4), |AF| = \sqrt{(4-1)^2 + 4^2} = 5$$

7. S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和, $S_3 = 6$, $S_5 = -5$, $S_6 = (\quad)$

- A. -20 B. -15 C. -10 D. -5

【答案】B

【解答】 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 故 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 为等差数列, 该等差数列的公差为 d_1

$$\frac{S_5}{5} - \frac{S_3}{3} = 2d_1 \Rightarrow d_1 = -\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{S_6}{6} = \frac{S_5}{5} + d_1 = -1 - \frac{3}{2} \Rightarrow S_6 = -15.$$

8. $0 < \alpha < \pi$, $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = (\quad)$

A. $\frac{\sqrt{2}}{10}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{5}$

C. $\frac{3\sqrt{2}}{10}$

D. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

【答案】D

【解答】

$$\because \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = -\frac{3}{5},$$

$$\text{又} \because 0 < \alpha < \pi,$$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{4}{5},$$

$$\text{则} \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \alpha - \cos \alpha) = \frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分，在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的 0 分。

9. S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和， q 为 $\{a_n\}$ 公比， $q > 0$ ， $S_3 = 7$ ， $a_3 = 1$ ，则 ()

A. $q = \frac{1}{2}$

B. $a_5 = \frac{1}{9}$

C. $S_5 = 8$

D. $a_n + S_n = 8$

【答案】AD

【解答】由已知条件

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{a_3}{q^2} + \frac{a_3}{q} + a_3 = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} + 1 = 7 \Rightarrow \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} - 6 = 0 \Rightarrow (\frac{1}{q} + 3)(\frac{1}{q} - 2) = 0$$

$$\text{又} q > 0, \text{ 则 } \frac{1}{q} = 2 \Rightarrow q = \frac{1}{2},$$

$$\text{故 } a_1 = \frac{a_3}{q^2} = 4, a_n = 4 \times (\frac{1}{2})^{n-1} = (\frac{1}{2})^{n-3}, S_n = 8 - (\frac{1}{2})^{n-3},$$

$$a_5 = a_3 q^2 = \frac{1}{4}, S_5 = 8 - (\frac{1}{2})^2 \neq 8, a_n + S_n = (\frac{1}{2})^{n-3} + 8 - (\frac{1}{2})^{n-3} = 8,$$

综上 AD 正确.

10. $f(x)$ 定义在 $\mathbf{R}$ 上奇函数, $x > 0$ 时, $f(x) = (x^2 - 3)e^x + 2$, 则 ()

A. $f(0) = 0$

B. 当 $x < 0$ 时, $f(x) = -(x^2 - 3)e^{-x} - 2$

C. $f(x) \geq 2$ 当且仅当 $x \geq \sqrt{3}$

D. $x = -1$ 是 $f(x)$ 极大值点

【答案】ABD

【解答】 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 故 $f(0) = 0$, A 正确;

$x < 0$ 时, $-x > 0$, 故 $f(-x) = [(-x)^2 - 3]e^{-x} + 2 = (x^2 - 3)e^{-x} + 2$,

$f(x) = -f(-x) = -(x^2 - 3)e^{-x} - 2$, B 正确;

$x > 0$ 时, $f(x) = (x^2 - 3)e^x + 2 \Rightarrow f'(x) = (x + 3)(x - 1)e^x$, $f'(1) = 0$;

$0 < x < 1$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, $x > 1$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 故 $x = 1$ 为

$f(x)$ 极小值点, 由 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 故 $x = -1$ 为 $f(x)$ 极大值点, D 正确;

$f(-1) = 2e - 2 = 2(e - 1) > 2$, C 错.

11. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 左右焦点为 F_1, F_2 , 左右顶点为 A_1, A_2 . 以 F_1F_2 为

直径的圆与 C 的一条渐近线交于 M, N , 且 $\angle NA_1M = \frac{5\pi}{6}$, 则 ()

A. $\angle A_1MA_2 = \frac{\pi}{6}$

B. $|MA_1| = 2|MA_2|$

C. C 离心率为 $\sqrt{13}$

D. 当 $a = \sqrt{2}$ 时, 四边形 NA_1MA_2 面积为 $8\sqrt{3}$

【答案】ACD

【解答】

由对称性不妨取斜率为正的渐近线 $l_{MN}: y = \frac{b}{a}x$,

又 $MO = r = c$, 则易知 $M(a, b)$, 又 $A_1(-a, 0)$,

$A_2(a, 0)$,

则 $MA_2 \perp A_1A_2$, 如图

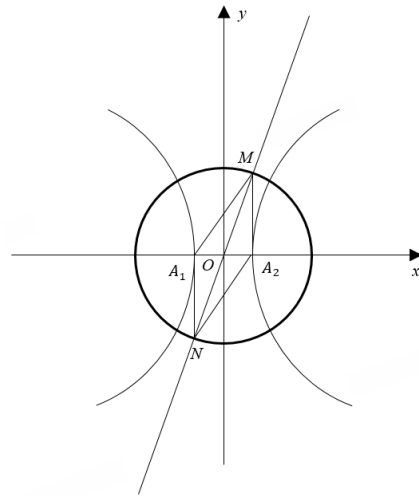
$\angle A_1MA_2 = \pi - \angle NA_1M = \frac{\pi}{6}$, A 选项正确;

则在 $Rt\triangle A_1MA_2$ 中, $|MA_1| = \frac{2}{\sqrt{3}}|MA_2|$, B 选项错误,

$\therefore \tan \angle A_1MA_2 = \frac{2a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

则 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{13}$, C 选项正确;

当 $a = \sqrt{2}$ 时, $S_{NA_1MA_2} = 2 \times \frac{1}{2}|A_1A_2| \cdot |MA_2| = 2ab = 8\sqrt{3}$, D 选项正确.



三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. $\vec{a} = (x, 1)$, $\vec{b} = (x-1, 2x)$, $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b})$ 则 $|\vec{a}| = \underline{\quad}$.

【答案】 $|\vec{a}| = \sqrt{2}$

【解答】 $\vec{a} - \vec{b} = (1, 1-2x)$, $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b}) \Leftrightarrow \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow x+1-2x=0 \Rightarrow x=1$.

所以 $\vec{a} = (1, 1)$, 即 $|\vec{a}| = \sqrt{2}$

13. $x = 2$ 是 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-a)$ 的极值点, 则 $f(0) = \underline{\quad}$.

【答案】 -4

【解答】 $f'(x) = (x-2)(x-a) + (x-1)(x-a) + (x-1)(x-2)$,

若 $x = 2$ 为 $f(x)$ 的极值点, 则 $f'(2) = 2 - a = 0 \Rightarrow a = 2$.

$f(x) = (x-1)(x-2)^2 \Rightarrow f(0) = -1 \times 4 = -4$

14. 一个底面半径为 4cm ，高为 9cm 的封闭圆柱形容器内有两个半径相等的铁球. 则铁球半径的最大值为 _____ cm

【答案】 $\frac{5}{2}$

【解答】

设铁球半径为 r ，两铁球位置如图所示，

竖直方向有， $h = O_1H_1 + O_1O_2 \cdot \sin \theta + O_2H_2$ ，

即 $9 = 2r + 2r \sin \theta$ ，

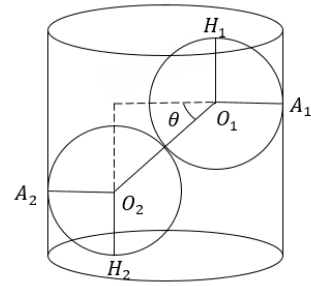
水平方向有， $2r = A_1O_1 + O_1O_2 \cdot \cos \theta + A_2O_2$ ，

即 $8 = 2r + 2r \cos \theta$ ，则 $(9 - 2r)^2 + (8 - 2r)^2 = 4r^2$

化简得： $4r^2 - 68r + 145 = 0$ ， $(2r - 29)(2r - 5) = 0$ ，

解得： $r = \frac{5}{2}$ ， $r = \frac{29}{2}$ （舍）

故答案为： $\frac{5}{2}$



四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分) $f(x) = \cos(2x + \varphi)$ ($0 \leq \varphi < \pi$), $f(0) = \frac{1}{2}$

(1) 求 φ ；

(2) $g(x) = f(x) + f(x - \frac{\pi}{6})$ ，求 $g(x)$ 的值域和单调区间.

【解答】解：(1) $f(0) = \cos \varphi = \frac{1}{2}$ ，由 $0 \leq \varphi < \pi$ ，故 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ；

(2) $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$ ， $f(x - \frac{\pi}{6}) = \cos 2x$ ， $g(x) = f(x) + f(x - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} \cos(2x + \frac{\pi}{6})$

故 $g(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ ，

令 $2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \pi + 2k\pi$ ，解得 $-\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi$ ，

即 $g(x)$ 的单调递减区间为 $[-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi]$ ， $k \in \mathbf{Z}$

同理可得 $g(x)$ 的单调递增区间为 $[\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{11\pi}{12} + k\pi]$ ， $k \in \mathbf{Z}$

16. (15分) 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 长轴长为 4.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过点 $(0, -2)$ 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, O 为坐标原点, 若 $S_{\triangle OAB} = \sqrt{2}$, 求 $|AB|$.

【解答】(1) $a = 2$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{2}$, 椭圆方程为: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$;

(2) 设 $l: y = kx - 2$, 点 $P(0, -2)$, 点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ y = kx - 2 \end{cases}$ 可得: $(2k^2 + 1)x^2 - 8kx + 4 = 0$, 其判别式为 $\Delta = 32k^2 - 16$,

$$x_1 + x_2 = \frac{8k}{2k^2 + 1}, \quad x_1 x_2 = \frac{4}{2k^2 + 1} > 0 \quad (\text{两根同号}),$$

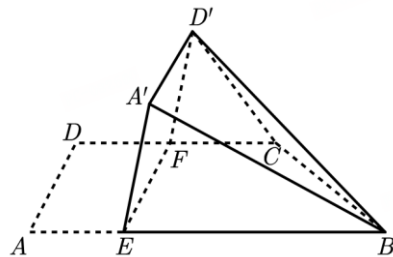
由 $\Delta > 0$, 可得 $k > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $k < -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OPB} - S_{\triangle OPA} = \frac{1}{2} \times 2|x_2| - \frac{1}{2} \times 2|x_1| = |x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{\Delta}}{2k^2 + 1} = \sqrt{2},$$

$$\text{解得 } k^2 = \frac{3}{2},$$

$$|AB| = \sqrt{k^2 + 1}|x_2 - x_1| = \sqrt{\frac{5}{2}} \times \sqrt{2} = \sqrt{5}.$$

17. (15分). 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle DAB = 90^\circ$, F 为 CD 中点, E 在 AB 上, $EF \parallel AD$, $AB = 3AD$, $CD = 2AD$. 将四边形 $EFDA$ 沿 EF 翻折至四边形 $EFD'A'$, 使得面 $EFD'A'$ 与面 $EFCB$ 所成的二面角为 60°



(1) 证明: $A'B \parallel$ 平面 $CD'F$;

(2) 求面 BCD' 与面 $EFD'A'$ 所成二面角的正弦值.

【解答】(1) 由 $EB \parallel FC$, $A'E \parallel D'F$, $A'E \cap EB = E$,

$$D'F \cap CF = F$$

$$A'E \subset \text{平面 } A'EB, \quad EB \subset \text{平面 } A'EB,$$

$$D'F \subset \text{平面 } D'FC, \quad CF \subset \text{平面 } D'FC,$$

可得平面 $A'EB \parallel$ 平面 $D'FC$, 又由 $A'B \subset$ 平面 $D'FC$

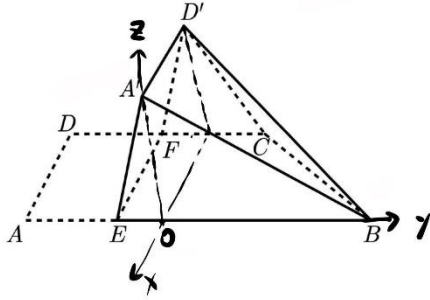
故 $A'B \parallel$ 平面 $A'EB$;

(2) 由 $EF \perp A'E$ 且 $EF \perp EB$, 可知 $A'EB$ 即为二面角的平面角, 为 60°

不妨设 $AD=1$, 在平面 $A'EB$ 内, 由点 A' 作 EB 垂线, 垂足为 O ,

可证 $A'O \perp$ 底面 $EBCF$, $EO = \frac{1}{2}$, $OB = \frac{3}{2}$

如图建系,



$\overrightarrow{FE} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{EA'} = (0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 设平面 $EFD'A'$ 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$

则有 $\begin{cases} x_1 = 0 \\ \frac{1}{2}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_1 = 0 \end{cases}$, 取 $y_1 = -\sqrt{3}$, $\vec{n}_1 = (0, -\sqrt{3}, 1)$;

$\overrightarrow{CB} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{D'B} = (1, \frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, 设平面 BCD' 的法向量为 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, 则有

$\begin{cases} x_2 + y_2 = 0 \\ x_2 + \frac{3}{2}y_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}z_2 = 0 \end{cases}$, 取 $y_2 = \sqrt{3}$, 则 $\vec{n}_2 = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1)$

即平面 BCD' 与平面 $EFD'A'$ 成角 θ , 则有 $\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{7}}{7}$, 故 $\sin \theta = \frac{\sqrt{42}}{7}$.

18. (17分) $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 - kx^3, 0 < k < \frac{1}{3}$.

(1) 证明: $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 存在唯一极值点和唯一零点;

(2) 设 x_1, x_2 为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 的极值点和零点;

(i) $g(t) = f(x_1+t) - f(x_1-t)$. 证明: $g(t)$ 在 $(0, x_1)$ 单调递减.

(ii) 比较 $2x_1$ 与 x_2 的大小, 并证明.

【解答】(1) 证明：因为 $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 - kx^3$, $k \in (0, \frac{1}{3})$,

$$\begin{aligned}\text{所以 } f'(x) &= \frac{1}{1+x} - 1 + x - 3kx^2 \\ &= \frac{1-1-x+x+x^2-3kx^2-3kx^3}{1+x} \\ &= \frac{-3kx^2}{1+x} \left(x+1-\frac{1}{3k}\right),\end{aligned}$$

当 $x > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{3k} - 1 > 0$,

所以当 $0 < x < \frac{1}{3k} - 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x > \frac{1}{3k} - 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

所以 $x = \frac{1}{3k} - 1$ 是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上唯一的极值点, 是极大值点.

又因为 $f(\frac{1}{3k} - 1) > f(0) = 0$, $f(\frac{1}{2k}) = \ln(1 + \frac{1}{2k}) - \frac{1}{2k} < 0$,

所以 $\exists x_2 \in (\frac{1}{3k} - 1, \frac{1}{2k})$, $f(x_2) = 0$,

即 x_2 是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上唯一的零点;

(2) 解: (i) 因为 $g(t) = f(x_1 + t) - f(x_1 - t)$,

所以 $g'(t) = f'(x_1 + t) + f'(x_1 - t)$

$$\begin{aligned}&= \frac{-3k(x_1 + t)^2}{1 + x_1 + t} (x_1 + t - x_1) + \frac{-3k(x_1 - t)^2}{1 + x_1 - t} (x_1 - t - x_1) \\ &= 3kt \left[\frac{(x_1 - t)^2}{1 + x_1 + t} + \frac{(x_1 + t)^2}{1 + x_1 - t} \right] \\ &= \frac{6kt^2(t^2 - x_1^2 - 2x_1)}{(1 + x_1)^2 - t^2},\end{aligned}$$

因为 $t \in (0, x_1)$, 所以 $t^2 - x_1^2 - 2x_1 < 0$, $(1 + x_1)^2 - t^2 > 0$,

所以 $g'(t) = \frac{6kt^2(t^2 - x_1^2 - 2x_1)}{(1 + x_1)^2 - t^2} < 0$,

即 $g(t)$ 在 $t \in (0, x_1)$ 上单调递减;

(ii) 由 (i) 得, $g(t)$ 在 $t \in (0, x_1)$ 上单调递减,

所以 $g(x_1) < g(0)$,

即 $f(2x_1) - f(0) < f(x_1) - f(x_1) = 0$, $f(2x_1) < 0$,

因为 x_2 是 $f(x)$ 的零点, 所以 $f(x_2) = 0$,

所以 $f(2x_1) < f(x_2)$,

又因为 $x_2 > x_1$, $2x_1 > x_1$, 且 $f(x)$ 在 $(x_1, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $2x_1 > x_2$.

19. (17 分)

甲、乙乒乓球练习, 每个球胜者得 1 分, 负者得 0 分. 设每个球甲胜的概率为 p ($\frac{1}{2} < p < 1$),

乙胜的概率为 q , $p + q = 1$, 且各球胜负独立. 对正整数 $k \geq 2$, 记 p_k 为打完 k 个球后, 甲

比乙至少多得 2 分的概率, q_k 为打完 k 个球后乙比甲至少多得 2 分的概率.

(1) 求 p_3, p_4 (用 p 表示);

(2) 若 $\frac{p_4 - p_3}{q_4 - q_3} = 4$, 求 p ;

(3) 证明: 对任意正整数 m , $p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m} < p_{2m+2} - q_{2m+2}$.

【解答】(1) 3 球后甲比乙至少多两分, 只能是甲 3 分乙 0 分, 因此 $p_3 = p^3$;

4 球后甲比乙至少多两分, 可能是甲 4 分乙 0 分, 或者甲 3 分乙 1 分,

因此 $p_4 = C_4^3 p^3 q + p^4 = 4p^3 q + p^4 = 4p^3(1-p) + p^4 = 4p^3 - 3p^4$.

(2) 根据对称性, 以及 (1) 的结果, 可得 $q_3 = q^3, q_4 = 4q^3 - 3q^4$.

$$\text{因此 } \frac{p_4 - p_3}{q_4 - q_3} = \frac{4p^3 - 3p^4 - p^3}{4q^3 - 3q^4 - q^3} = \frac{3p^3(1-p)}{3q^3(1-q)} = \frac{p^3 q}{q^3 p} = \frac{p^2}{q^2} = 4$$

$$\text{因此 } \frac{p}{q} = 2, \text{ 又 } p + q = 1, \text{ 故 } p = \frac{2}{3}, q = \frac{1}{3}.$$

$$\text{答案为 } p = \frac{2}{3}$$

(3) 记 $a_m(x)$ 表示 m 球甲得 x 分的概率

$$p_{2m+1} = p_{2m} - q \cdot a_{2m}(m+1)$$

$$q_{2m+1} = q_{2m} - p \cdot a_{2m}(m-1)$$

故

$$p_{2m+1} - p_{2m} = -q \cdot a_{2m}(m+1)$$

$$q_{2m+1} - q_{2m} = -p \cdot a_{2m}(m-1)$$

故要证:

$$p_{2m+1} - p_{2m} < q_{2m+1} - q_{2m}$$

只需证:

$$p \cdot a_{2m}(m-1) < q \cdot a_{2m}(m+1)$$

即只需证:

$$p \cdot p^{m-1} \cdot q^{m+1} \cdot C_{2m}^{m-1} < q \cdot p^{m+1} \cdot q^{m-1} \cdot C_{2m}^{m+1}$$

即只需证:

$$p^m q^{m+1} < q^m p^{m+1}$$

即 $q < p$. 由条件 $q = 1 - p < \frac{1}{2} < p$, 故结论成立.

由

$$p_{2m+2} = p_{2m+1} + p \cdot a_{2m+1}(m+1) = p_{2m} + p \cdot a_{2m+1}(m+1) - q a_{2m}(m+1)$$

$$q_{2m+2} = q_{2m+1} + q \cdot a_{2m+1}(m) = q_{2m} + q \cdot a_{2m+1}(m) - p a_{2m}(m-1)$$

现在考虑右边的不等式

$$p_{2m} - q_{2m} < p_{2m+2} - q_{2m+2}$$

只需证:

$$p \cdot a_{2m+1}(m+1) - q a_{2m}(m+1) > q a_{2m+1}(m) - p \cdot a_{2m}(m-1)$$

只需证:

$$p^{m+2} q^m C_{2m+1}^{m+1} - p^{m+1} q^m C_{2m}^{m+1} > q^{m+2} p^m C_{2m+1}^{m+1} - q^{m+1} p^m C_{2m}^{m+1}$$

只需证:

$$p^2 C_{2m+1}^{m+1} - p C_{2m}^{m+1} > q^2 C_{2m+1}^{m+1} - q C_{2m}^{m+1}$$

只需证:

$$(p-q)(p+q)C_{2m+1}^{m+1} > (p-q)C_{2m}^{m+1}$$

只需证:

$$C_{2m+1}^{m+1} > C_{2m}^{m+1}$$

因为 $C_{2m+1}^{m+1} = C_{2m}^{m+1} + C_{2m}^m$, 且 $C_{2m}^m > 0$, 故上面不等式成立. 证毕.